Álgebra y Trigonometría

Max Peters \ William L. Schaaf

EDITORIAL REVERTÉ

Álgebra y Trigonometría

Max Peters \ William L. Schaaf

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
ALGEBRA AND TRIGONOMETRY
a modern approach

Edición original en lengua inglesa publicada por
D. Van Nostrand Company Inc.
450 West 33rd Street, New York, N. Y.

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1972
ISBN: 978-84-291-5106-0

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2022
ISBN: 978-84-291-9125-7

Versión española por
Ing. Roberto Treviño González
Profesor en la Universidad Regiomontana
Monterrey, N. L. Méx.

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Prefacio

En el libro "Algebra y Trigonometría; Un Enfoque Moderno", fue escrito cuidadosamente para completar el curso iniciado en "Algebra", y como éste, refleja, en forma didáctica, los temas que el S.M.S.G. (Grupo para el estudio de las Matemáticas Escolares), ha recomendado como indispensables, ofreciendo una presentación modernizada de la Matemática tradicional.

La aceptación tan entusiasta con que el público recibió el primer libro nos indica que es posible hacer una exposición moderadamente rigurosa y al mismo tiempo dar la importancia adecuada a la precisión de los conceptos y las estructuras algebraicas y la racionalización de las operaciones y procedimientos matemáticos.

Un curso de Matemáticas para un segundo ciclo de la enseñanza media, necesita incluir temas tradicionales. Este texto trata dichos temas desde un punto de vista moderno. El objetivo primordial es que el estudiante vaya adquiriendo los conceptos fundamentales por descubrimiento propio así como la habilidad necesaria para manipular fácilmente tanto el Algebra como la Triginometría. El "porque" y el "cómo" en matemáticas es tanto más indispensable en un segudo curso como en el primero.

Aun cuando el texto está presentado con un grado razonable de rigor matemático, los autores están plenamente consientes de la capacidad intelectual de la mayoría de los estudiantes para lo que se ha escrito. Adoptando, en general, el espíritu y filosofía del S.M.S.G., los autores han utilizado su experiencia adquirida al enseñar matemáticas modernas para presentar, en forma realística, el material adecuado al nivel de los estudiantes de preparatoria.

Desde el punto de vista matemático, se ha dado énfasis a:

1o. No omitir ni tratar superficialmente, ningún tema que deba conocer un estudiante de enseñanza media superior.

2o. Comprender la estructura del Algebra. No solamente se han establecido claramente las leyes algebraicas, sino que son usadas constantemente.

3o. Dar en forma clara y precisa las definiciones, los axiomas y la demostración de los teoremas más importante.
4o. Hacer uso en todo el texto de la teoría de conjuntos como un elemento unificador.
5o. Exponer, las propiedades de las desigualdades e inecuaciones y el concepto de valor absoluto en su lugar apropiado.
6o. Usar con todo rigor en el lenguaje algebraico, la terminología de la matemática moderna. De esta manera cuando el alumno continúe estudios más avanzados, estará en posesión del vocabulario matemático apropiado.
Desde el punto de vista pedagógico, se ha puesto especial atención a los hechos siguientes:
1o. El estilo es informal y el lenguaje es sencillo. El alumno tendrá poca dificultad en leer y entender el texto.
2o. La exposición está hecha de manera que pueda servir al autodidacta, no en forma mecánica como el material "programado", sino de un modo reflexivo y que se entienda lo estudiado.
3o. Los ejemplos se han explicado, paso a paso, para que el alumno pueda seguir el desarrollo por sí mismo.
4o. El gran número de ejercicios, además de los de repaso y los acumulativos, dan suficiente material para obtener la destreza necesaria.
Por último, se ha puesto atención con miras a las diferencias individuales; en lograr:
1o. Que el alumno promedio del curso logre adquirir habilidad en el manejo del material presentado. Los párrafos "opcionales" pueden ser omitidos por los alumnos con menor preparación sin perder la secuencia del libro.
2o. Los "Temas extraordinarios" están escritos para los estudiantes sobresalientes que pueden trabajar por sí mismos o que tienen una aptitud matemática especial. Se incluyen al final de cada capítulo como unidades independientes, en forma breve, y relacionados o no con el tema del capítulo. Después de una breve exposición de los principios, se dan unos cuantos ejercicios para incitar la curiosidad intelectual del alumno. La capacidad matemática se adquirirá solamente por la aplicación de los conceptos estudiados inicialmente.
3o. Se da la Bibliografía para los estudiantes que tengan un mayor interés en la matemática, aun cuando les falte capacidad creadora. El campo de los temas e ideas es intencionalmente variado. Las referencias bibliográficas son específicas y dan amplias fuentes de lectura para exploración y enriquecimiento de conocimientos. Se debe animar a los alumnos a exponer oralmente resúmenes o trabajos breves de los temas sugeridos. Obviamente el material es muy flexible y puede servir al maestro para descubrir talentos latentes. También le puede ser útil como motivación de los alumnos de la clase, incremento de conocimientos y apreciación de cualidades.

Finalmente, los autores expresan su deuda con muchas fuentes, incluyendo las sugerencias de muchos colegas, así como el material que se ha publicado debido a varios grupos de profesionales dedicados a experimentar los nuevos programas de matemática moderna en la enseñanza media superior.

Contenido

1

Los Números Naturales y los Enteros

CONJUNTOS Y RELACIONES

1.1 CONJUNTOS

En nuestra conversación diaria, hablamos a menudo de conjuntos o colecciones de objetos. En efecto, con frecuencia, usamos palabras que envuelven la idea de un conjunto. Por ejemplo:

Un equipo de beisbol.
Un lote de libros.
La junta directiva de una escuela.
El senado de nuestra república.

En este libro estudiaremos ciertos conjuntos de números.

Se puede determinar un conjunto con palabras, o describirse encerrando sus elementos en llaves. Por ejemplo:

A = El conjunto de los días de la semana.
$A = \{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo$\}$.

En el ejemplo anterior, "jueves" es un elemento del conjunto A. Esto se puede escribir en forma más simple:
Jueves $\in A$, (que se lee "jueves pertenece al conjunto A").

En el mismo ejemplo, "julio" no es un elemento del conjunto A. Puede escribirse simplemente julio $\notin$ A (se lee "julio no pertenece al conjunto A").

Un conjunto puede tener demasiados elementos, entonces no resulta conveniente enumerarlos todos. Por ejemplo: el alfabeto inglés tiene 26 elementos. Podemos indicarlos como sigue:

$$B = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$$

donde los puntos suspensivos nos dicen que las letras desde *d,* hasta *w,* están también en el conjunto, pero no han sido escritas.

En muchos casos un conjunto contiene un número infinito de elementos, siendo imposible enlistarlos. Por ejemplo, el conjunto de los números impares, que puede ser indicado:

$$C = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

los puntos suspensivos indican que la lista de elementos continúa indefinidamente.

Un conjunto que carece de elementos se llama "conjunto vacío" y se le representa con el símbolo "$\varnothing$". Ejemplos:

A = El conjunto de meses del año que tienen 25 días.
B = El conjunto de números impares cuyos cuadrados sean números pares.

Decimos que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Ejemplo: {Juan, Federico, Benjamín, David} y {Benjamín, Juan, David, Federico}. Son conjuntos iguales.

Más adelante tendremos oportunidad de hablar de *subconjuntos.* Por ahora diremos que: el conjunto A es un subconjunto del conjunto B, si todos los elementos del conjunto A, son elementos del conjunto B. Por ejemplo: Algunos subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$ son $\{a\}$, $\{b, c\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c, d\}$.

Se considera que "el conjunto vacío", es subconjunto de otro cualquiera.

Ejercicio 1-1

1. Enumerar, dentro de llaves, los elementos de los siguientes conjuntos:

   (a) El conjunto de tres de tus maestros en este año.
   (b) El conjunto de las estaciones del año.
   (c) El conjunto de los días feriados de julio.
   (d) El conjunto de los múltiplos de 3, entre 6 y 21 inclusive.
   (e) El conjunto de los números impares mayores que 2 y menores que 20.
   (f) El conjunto de los Presidentes de los Estados Unidos Mexicanos.

2. En cada uno de los ejercicios siguientes, se han desplegado todos los elementos de un conjunto encerrándolos en llaves. Describir cada conjunto.
   La descripción puede hacerse, a menudo de dos o más maneras distintas.

   (a) {centavo, cinco, diez, veinte, cincuenta}
   (Todas las palabras anteriores se refieren a monedas con valor en centavos de peso.)

(b) {a, e, i, o,u,}
(c) {1, 3, 5, 7, 9, 11, 15,}
(d) {1, 4, 9, 16, 25, 36,}
(e) {jardinero derecho, jardinero central, jardinero izquierdo}

3. Enumerar los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos, colocándolos dentro de llaves, y usando puntos suspensivos cuando sea inconveniente escribirlos todos.

(a) Los estados de nuestro país, en orden alfabético.
(b) Las consonantes del alfabeto.
(c) Todos los múltiplos de cinco.
(d) Los nombres de los meses del año que tienen la letra "r".
(e) Los alumnos de la clase de matemáticas.

4. ¿Cuáles de los siguientes son "conjuntos vacíos"?

(a) El conjunto de los números impares divisibles por 6.
(b) El conjunto de las mujeres que han sido presidentes de los Estados Unidos Mexicanos.
(c) El conjunto de los números pares que son números primos.
(d) El conjunto de los círculos cuyos diámetros son menores que sus radios.
(e) El conjunto de números, cuadrados perfectos, que terminen en 5.
(f) El conjunto de estados limitados tanto por el Océano Atlántico como por el Océano Pacífico.

5. Dar tres subconjuntos de cada uno de los conjuntos del ejercicio 2.

1.2 VARIABLES, ECUACIONES Y DESIGUALDADES

Para expresar ideas, acostumbramos usar oraciones. Considérense las siguientes:

(a) ________ es un día de la semana.
(b) ________ es una vocal del alfabeto.

Estos son ejemplos de oraciones o proposiciones *abiertas*. Se les llama proposiciones abiertas porque la idea no queda expresada en forma completa hasta que "________" es sustituida por una palabra apropiada. En el caso (a), "________" puede ser reemplazada por un elemento del conjunto {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}, dando entonces una proposición verdadera. Si sustituimos "________" por otra palabra tendremos una proposición falsa. De igual manera, en el caso de la proposición (b), "________" puede ser sustituida por un elemento del conjunto {*a, e, i, o, u*} para darnos una proposición verdadera. El conjunto formado por los elementos que hacen que una proposición abierta sea verdadera, se llama *conjunto de soluciones* o *conjunto solución* de la proposición abierta.

De particular interés para nosotros son las proposiciones abiertas cuyo conjunto solución son conjuntos de números. Consideramos el siguiente ejemplo:

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ < 5$$

En vez de usar "________" es más conveniente usar una letra. Si ponemos la letra n, la proposición abierta anterior se convierte en:

$$n < 5$$

Si en esta proposición abierta nos referimos a los números naturales, entonces el conjunto solución es $\{1, 2, 3, 4\}$. Así pues, si sustituimos n por cualquiera de los números naturales 1, 2, 3, 4, obtenemos una proposición verdadera. A la letra n, usada en esta forma, se le denomina una <u>variable</u> y al conjunto del cual podemos seleccionar un elemento que haga verdadera la proposición abierta, se le llama el <u>conjunto de sustitución o dominio de la variable.</u> Por ejemplo para la proposición "$n < 5$", el dominio de la variable n es el conjunto de los números naturales. De una manera formal decimos:

Una <u>variable</u>, es un elemento no especificado de un conjunto específico. El conjunto específico es el <u>dominio de la variable</u>; el elemento no especificado puede ser reemplazado por un elemento del dominio.

La expresión de que dos cantidades son iguales, se denomina una <u>ecuación</u>. Consideremos la proposición abierta

$$2x + 7 = 7 + 2x$$

Al tratar de encontrar el conjunto solución de esta proposición, es evidente que cualquier sustitución numérica de x hará cierta la expresión. Una igualdad de este tipo, la llamamos <u>identidad</u>. Cuando una ecuación no es una identidad, se le llama ecuación <u>condicional</u>. Por brevedad, tanto a las identidades como a las ecuaciones condicionales, se les nombra "ecuaciones" Un ejemplo de una ecuación condicional es

$$2x + 3 = 11$$

El conjunto solución de esta ecuación es $\{4\}$, que tiene un solo elemento.

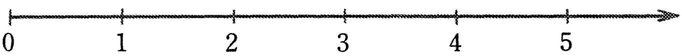
La expresión de que dos cantidades son diferentes es llamada <u>"desigualdad" o "inecuación".</u>

Por ejemplo:

$$\begin{array}{ll} x > 5 & (x \text{ es mayor que } 5) \\ y \neq 3 & (y \text{ no es igual a } 3) \\ z < 6 & (z \text{ es menor que } 6) \end{array}$$

Frecuentemente es útil asociar números con puntos de una recta. Seleccionamos convenientemente dos puntos de una recta y ponemos un 0 en el punto de la izquierda y un 1 en el de la derecha. La distancia entre 0 y 1 la usamos como unidad de medida.

Los puntos a la derecha del 1 se localizan a intervalos iguales a la distancia entre 0 y   y se les asigna los números 2, 3, 4, etc., tal como se ındica en la figura.



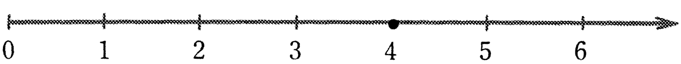
Claramente vemos que podemos asociar cualquier número natural con un punto de la línea. Una recta en la que se han asociado sus puntos con números, se llama recta numérica.

El número correspondiente a cada punto de la recta numérica, es la coordenada del punto.

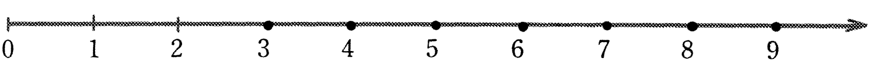
La recta numérica se usa para representar gráficamente los conjuntos solución de proposiciones abiertas, como vemos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Consideremos la ecuación $2x + 3 = 11$.

El conjunto de sustitucıón es el de los números naturales. Sabemos que el conjunto solución es $\{4\}$, cuya representación gráfica se obtiene simplemente localizando el elemento en la recta numérica.



Ejemplo 2. Sea la desigualdad $x > 2$: El dominio es el conjunto de los números naturales. Sabemos que el conjunto solución es $\{3, 4, 5 \ldots\}$. Localizamos los elementos de dicho conjunto en la recta numérica. La flecha indica que la recta se extiende indefinidamente hacia la derecha.



Al escribir proposiciones abiertas, se usa algunas veces la notación siguiente, que se llama "constructor de conjunto"

$\{d|d$ es un dentista$\}$, se lee "El conjunto de todos los dentistas"

Cuando se especifica el dominio de la variable, .esta proposición tiene un significado más preciso. Supongamos, por ejemplo, que el dominio de la variable en la proposición anterior es el conjunto de los dentistas mexicanos que viven. En este caso,

$$\{d|d \text{ es un dentista, } d \text{ es un dentista mexicano vivo}\}.$$

que puede leerse, "el conjunto de todos los dentistas mexicanos que viven"

Ejemplo 1. $\{x \mid x + 7 = 12, x \text{ es número natural}\}$, se lee "Todos los números naturales x, tales que $x + 7 = 12$".

Ejemplo 2. $\{y \mid y < 16, y \text{ es número par}\}$, se lee, "El conjunto de números pares menores que 16".

Ejemplo 3. $\{a \mid 2a + 5 > 17, a \text{ es un número impar}\}$, se lee, "El conjunto de todos los números impares a, tales que $2a + 5 > 17$".

Ejercicio 1-2

1. Escribir el conjunto solución de cada ejercicio siguiente. Hacer la gráfica de cada una de las proposiciones.
   (a) $x < 7$; dominio, el conjunto de los números naturales
   (b) $\{x \mid x + 4 = 10; x \text{ es número natural}\}$.
   (c) $2x + 3 = 12$; dominio, el conjunto de los números naturales.
   (d) $x^2 - 5x + 6 = 0$; dominio, el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   (e) $\{y \mid y \neq 3, y \text{ es un número natural menor que } 10\}$.
   (f) $2x > 5$; dominio, el conjunto de los números naturales, pares, menores que 15.
   (g) $\{y \mid 3y + 2 < 12, y \text{ es un número natural impar}\}$.
   (h) $36 < 2x + 5$, dominio, el conjunto de los números naturales.
   (*i*) $3y + 1 \not> 15$; dominio, el conjunto $\{2, 4, 6, 8. 10\}$.
   (j) $\{x \mid 5x + 3 \leq 40, x \text{ es un número natural}\}$.

2. Escribir las siguientes oraciones como proposiciones abiertas y hallar el conjunto solución para cada una. El dominio de la variable es el conjunto de los números naturales, en todas ellas.
   (a) La suma de un número con 3 es 12.
   (b) El doble de un número es menor que 15.
   (c) Si le agregamos 5 a un número, el resultado no es mayor que 9.
   (d) Si del triple de un número restamos 1, el resultado no es mayor que 11.
   (e) Si le sumamos 3 al cuádruplo de un número, el resultado es igual o menor que 25.
   (f) Si al doble de un número le añadimos 9 obtenemos 5.

3. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son identidades y cuáles ecuaciones condicionales?

   (a) $x + 2x = 12$
   (b) $3x + 5 = x + 5 + 2x$
   (c) $y + 7 + 3y = 2y + 7 + 2y$
   (d) $5x + 1 = 2x + 16$

4. Escribir las siguientes oraciones como proposiciones abiertas, usando la notación "constructor de conjunto". Encontrar después el conjunto solución de cada proposición. Para todas ellas el dominio de la variable es el de los números naturales.

   (**a**) El conjunto de números menores que 7.
   (**b**) El conjunto de números tales que, si se suma 3 a un número, el resultado es menor que 5.
   (**c**) El conjunto de los números pares menores que 15.
   (**d**) El conjunto de los números impares menores que 10.
   (**e**) El conjunto de números tales que la suma del doble de un número y el triple de él, es menor que 50.

1.3 ESTRUCTURA LOGICA

En la antigüedad se descubrieron muchas propiedades de las figuras geométricas. Sabemos que los egipcios las usaron en la construcción de sus pirámides. Sin embargo, las relaciones que conectaban tales propiedades fueron desconocidas, o se les concedió poca importancia. Aproximadamente en el año 300 A.C., el matemático griego Euclides, sistematizó, en forma lógica, el estudio de la geometría. Estableció un conjunto de proposiciones, llamadas axiomas o postulados, aceptadas como verdades evidentes. Demostró entonces, que por medio de razonamientos lógicos, otras propiedades a las que les llamamos teoremas.

En forma semejante en los dos últimos siglos, la Aritmética y el Algebra se nan estructurado lógicamente. Por ejemplo, se ha establecido una estructura lógica para los sistemas de números. Esto nos permite ver cómo se relacionan las propiedades de dichos sistemas y estudiar las propiedades comunes que tienen sistemas de números diferentes y las que diferencian un sistema de otro.

Como dijimos antes, los teoremas son conclusiones, a las que se llega por razonamiento lógico, deducidas de uno o más postulados. El enunciado de un teorema es, con frecuencia, de la forma

"si es *A*, entonces también es *B*"

donde *A* y *B* representan ciertas premisas. Si el enunciado de un teorema no está hecho en la forma anterior, siempre es posible expresarlo en ella. En la redacción muchas veces se suprime la palabra entonces.)

Ejemplos. "Si un triangulo es isósceles, entonces los ángulos de la base son iguales", o bien, "Si un triángulo es isósceles, los ángulos de la base son iguales"

"Si dos números son cuadrados perfectos, su producto es un cuadrado perfecto"

Debe observarse que si se pide demostrar "si es A, entonces es B", lo que hay que dar son razonamientos que prueben que B es cierto en caso de que A lo sea. No es necesario que A sea verdadero, ni que lo sea B. Una demostración consiste únicamente de la evidencia convincente de la verdad de B, si es cierto A.

El recíproco de un teorema se obtiene intercambiando la hipótesis y la conclusión. El recíproco de "si es A, entonces es B" es el teorema "Si es B, entonces es A".

El recíproco de un teorema cierto, puede o no, ser verdadero. Ejemplos:

"Si un cuadrilátero es paralelogramo, entonces sus diagonales se bisectan mutuamente".

"Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan mutuamente, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo"

En este caso, el teorema y su recíproco son ciertos ambos.

"Si dos números son impares, entonces su suma es un número par"

"Si la suma de dos números es un número par, los dos números son impares"

En este caso, el teorema es cierto pero su recíproco no lo es.

Si tanto el teorema como su recíproco son ciertos, esto es "si es A entonces es B" y "si es B entonces es A" decimos, "es A, si y sólo si es B" Por ejemplo:

Teorema: Si un triángulo es equilátero, entonces es equiángulo.
Recíproco: Si un triángulo es equiángulo, entonces es equilátero.

Puesto que tanto el teorema como su recíproco, son verdaderos, podemos combinarlos así:

"Un triángulo es equilátero, si y sólo si es equiángulo"

Ejercicio 1-3

1. Enunciar el recíproco de cada uno de los teoremas siguientes. Si ambos son ciertos, enunciarlos en la forma "si y sólo si".

   (a) Si un número es par, entonces es múltiplo de 2.
   (b) Si está lloviendo, la tierra está húmeda.
   (c) Si los lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos, la figura es un paralelógramo.
   (d) Todos los ángulos rectos son iguales.
   (e) Si un hombre vive en Los Angeles, vive en California.
   (f) Si hoy es lunes entonces mañana es martes.

2. Cada una de las siguientes proposiciones, contiene un teorema y su recíproco separadamente. En cada caso enunciar separadamente el teorema y su recíproco.

(a) Un polígono es regular si y sólo si es equilátero y equiángulo.
(b) $3x + 2 = 17$ si y sólo si $x = 5$.
(c) Un conjunto de puntos es colineal si y sólo si hay una recta que los contiene a todos.
(d) Un rectángulo es un cuadrado si y sólo si su largo y su ancho son iguales.
(e) Un triángulo es obtusángulo si y sólo si uno de sus ángulos es obtuso.

1.4 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Cualquier número lo podemos escribir de muchas maneras diferentes. Cuando contamos votos en una elección de nuestra escuela, podemos escribir ~~////~~ //, o sea una raya por cada voto, lo que equivale a escribir "7" en otra forma que con el símbolo usual. Podemos ver que una anotación en un papel (6, VII, ~~////~~/, etc.) no es un número, sino un símbolo para el número. Un número es una idea. Así la idea de 6 tiene nombres o símbolos diferentes, tales como VI, $4 + 2$, $\frac{18}{3}$, etc. El símbolo que usamos para representar a un número se denomina <u>numeral.</u> Los numerales "$3 + 8$" y "$7 + 4$" son símbolos del mismo número. A la relación que expresa esto, la llamamos <u>igualdad</u> y para indicarla se usa el signo "=".

Al trabajar con números, hacemos uso frecuente de la relación de igualdad. Vamos a enunciar las propiedades de la igualdad como leyes. Se cumplen para todos los sistemas de números que se consideran en este libro.

LEY I 1. PROPIEDAD DE DICOTOMÍA.

Para todo a y b, o $a = b$, o $a \neq b$.

LEY I 2. PROPIEDAD REFLEXIVA.

Para todo a, a es igual a sí mismo.

LEY I 3. PROPIEDAD SIMÉTRICA.

Para todo a y b, si $a = b$, entonces $b = a$.

LEY I 4. PROPIEDAD TRANSITIVA.

Para todo a, b y c, si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Si tenemos una serie de igualdades como $a = b$, $b = c$, $c = d$, $d = e$, se puede concluir que $a = e$. Nuestra razonamiento es:

Puesto que $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$; propiedad transitiva.
Puesto que $a = c$ y $c = d$, entonces $a = d$; propiedad transitiva.

Puesto que $a = d$ y $d = e$, entonces $a = e$; propiedad transitiva.

En casos como éste, simplemente decimos que si $a = b$, $b = c$, $c = d$ y $d = e$; entonces $a = e$, por la "propiedad transitiva",

LEY I 5. PROPIEDAD ADITIVA.

Para todo a, b y c, si $a = b$ entonces $a + c = b + c$.

LEY I 6. PROPIEDAD MULTIPLICATIVA.

Para todo a, b y c, si $a = b$, entonces $ac = bc$.

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS NATURALES

1.5 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS NATURALES

Los números naturales son los que usamos para contar; 1, 2, 3, 4, ... El conjunto de los números naturales, como es obvio, contiene un número infinito de elementos y tiene ciertas propiedades que estudiaremos en lo que sigue.

PROPIEDAD DE CERRADURA.

Las dos operaciones que se consideran en conexión con los números naturales son la adición y la multiplicación. Sabemos por experiencia que la suma de dos números naturales es siempre un número natural. De igual manera siempre que multiplicamos dos números naturales obtenemos un número natural. Decimos que el conjunto de los números naturales es cerrado con respecto a las operaciones de adición y multiplicación. El conjunto de los números naturales no es cerrado con respecto a las operaciones de sustracción y división, puesto que al efectuar dichas operaciones entre dos números naturales, no siempre obtenemos otro número natural. Así, por ejemplo, $2 - 5$ y $7 \div 3$, no son números naturales.

Siempre que tengamos una suma o un producto de números naturales se entenderá que el resultado será un número natural. Por ejemplo, si x y y, son ambos números naturales, $x + y$ y xy, serán números naturales.

Además, expresiones como $3x + 7y$, también serán números naturales, si x y y lo son. En efecto: puesto que tanto 3 como x son números naturales, la propiedad de cerradura nos indican también que $3x$ es un número natural. Por las mismas razones $7y$ también lo es. La propiedad de cerradura nos dice también que $3x + 7y$, suma de dos números naturales, es otro elemento del mismo conjunto.

PROPIEDAD CONMUTATIVA.

Sabemos, por experiencia, que el orden en que sumemos dos números naturales no afecta el resultado; esto es, $5 + 7$ y $7 + 5$, dan la misma suma. También sabemos que el orden en que multipliquemos dos números naturales no altera el producto; así 5×7 y 7×5 son iguales. Esta propiedad se conoce como la propiedad conmutativo de la adición y de la multiplicación, respectivamente.

Propiedad conmutativa de la adición. Para cualquier número natural a y cualquier número natural b es $a+b = b+a$.
Propiedad conmutativa de la multiplicación. Para cualquier número natural a y cualquier número natural b es $a \cdot b = b \cdot a$.

PROPIEDAD ASOCIATIVA.

Si se nos pide encontrar la suma de 6, 9 y 7, podemos sumar primero 6 y 9 y agregar 7 al resultado. Hacemos esto porque la adición es una operación binaria; esto es, se efectúa entre dos números.

La agrupación que fue usada para obtener esta suma la podemos indicar por medio de un paréntesis: $(6 + 9) + 7$. Pero obtenemos el mismo resultado con una agrupación diferente, digamos $6 + (9 + 7)$. En este caso la suma de $9 + 7$ se la agregamos a 6. Es evidente que los dos agrupamientos nos dan un resultado correcto. Esta propiedad de los números naturales se llama la propiedad asociativa de la adición. La palabra "asociativa" es adecuada, porque indica agrupamiento.

Al multiplicar 5, 3 y 2, multiplicamos primero 5 y 3, y el resultado lo multiplicamos por 2, puesto que la multiplicación es una operación binaria. Por medio de paréntesis indicamos el agrupamiento usado en la operación: $(5 \times 3) \times 2$. Desde luego que podemos obtener el mismo resultado si agrupamos $5 \times (3 \times 2)$; esto es, multiplicando 5 por el producto de 3 y 2. Esta propiedad es la propiedad asociativa de la multiplicación.

De una manera formal, establecemos estas propiedades como sigue:

Propiedad asociativa de la adición. Para cualquier número natural a, cualquier número natural b, y cualquier número natural c es $(a + b) + c = a (b + c)$.
Propiedad asociativa de la multiplicación. Para cualquier número natural a, cualquier número natural b, y cualquier número natural c es $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Consideremos ahora la expresión $[(a + b) + c] + d$, donde a, b, c y d son números naturales. Puesto que a y b son números naturales, $(a + b)$ es un número natural. Además, $[(a + b) + c] + d = (a + b) + (c + d)$; por la propiedad asociativa de la adición. De una manera análoga $a + [(b + c) + d] = [a + (b + c)] + d$. Así pues la expresión, $a + b + c + d$, significa el número que se obtiene usando paréntesis de manera que se llegue a la suma de dos números naturales. Podemos decir que:

$$a + b + c + d = [a + (b + c)] + d = [(a + b) + c] + d = a + [b + (c + d)]$$
$$= a + [(b + c) + d] = (a + b) + (c + d), \text{ etc.}$$

El mismo comentario podemos aplicar a expresiones como $a + b + c + d + e$, o a la suma de tantos números naturales como se desee, $a + b + c + d + e + \ldots + k$.

La inserción o eliminación de paréntesis en tales expresiones se justifica por la propiedad asociativa generalizada de la suma de números naturales.

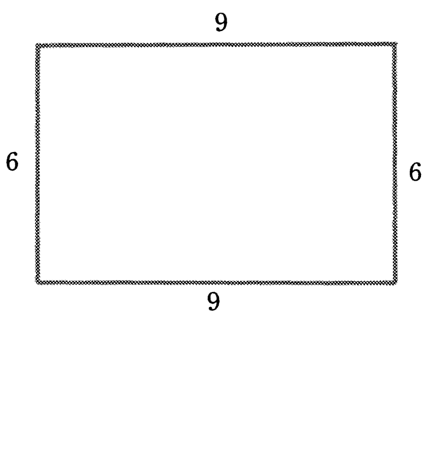
Consideremos ahora la expresión $[(ab) \cdot c] \cdot d$ donde a, b, c y d, son números naturales. Puesto que a y b son números naturales, lo es también el producto (ab) Por lo tanto, $[(ab) \cdot c] \cdot d = (ab) \cdot [c \cdot d]$, por la propiedad asociativa de la multiplicación. De un modo semejante $a \cdot [(bc) \cdot d] = [a \cdot (bc)] \cdot d$. Así pues el resultado del producto a, b, c, d es el número obtenido al usar paréntesis en forma adecuada. Podemos pues, decir que:

$$abcd = [a \cdot (bc) \cdot d] = [(ab) \cdot c] \cdot d = a \cdot [b \cdot (cd)] = (ab) \cdot (cd) = a \cdot [(bc) \cdot d], \text{ etc.}$$

El mismo comentario se aplica al producto $abcde$ o al producto de un número cualquiera de términos $abcde \ldots k$. La introducción o supresión de paréntesis en tales expresiones se justifica por la propiedad asociativa generalizada de la multiplicación de números naturales.

Propiedad Distributiva de la Multiplicación con Respecto a la Adición

Si se nos pidiera calcular el perímetro de este rectángulo, podríamos hacerlo de varios modos. Puesto que la suma "6 + 9" representa la mitad del perímetro, podemos indicar todo el perímetro por la expresión $2(6 + 9)$. Por otra parte, podemos usar el hecho de que el perímetro de un rectángulo es la suma de dos largos y dos anchos. En este caso, podemos indicar el perímetro por la expresión $2 \cdot 6 + 2 \cdot 9$. Puesto que las dos expresiones para el perímetro del mismo rectángulo deben ser iguales, tenemos $2(6 + 9) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 9$. Este es un ejemplo de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en el conjunto de los números naturales.



Formalmente, expresamos esta propiedad como sigue:

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Para cualquier número natural a, cualquier número natural b y cualquier número natural c es $a\ (b + c) = ab + ac$.

IDENTIDAD MULTIPLICATIVA.

El conjunto de los números naturales tiene un elemento con una propiedad especial. Es el número 1. Podemos dejar establecida esta propiedad como sigue:

Identidad multiplicativa. (Propiedad multiplicativa del número uno). Para cualquier número natural a, se tiene: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Cuando hablamos de un conjunto de números, estamos pensando en esos números como elementos del conjunto. Cuando decimos, sistema de números nos referimos a un conjunto de números y las operaciones con ellos. Los sistemas de números en este libro, pueden ser definidos como sigue: Un conjunto de números, y dos operaciones (adición y multiplicación), constituyen un sistema de números, si y sólo si estas operaciones son ambas conmutativas, ambas asociativas, y una de ellas es distributiva con respecto a la otra. Así pues, de aquí en adelante, nos referiremos al sistema de números naturales o al conjunto de números naturales, indistintamente.

Ejercicio 1-4

1. ¿Cuáles de los siguientes son números naturales?

(a) $16 \div 2$	**(d)** $4 \div 8$	**(g)** $5 \cdot \frac{1}{2}$
(b) $15 - 3$	**(e)** $6 + 5$	**(h)** $9 \div 10$
(c) $3 - 15$	**(f)** $9 - 9$	**(i)** $1\frac{1}{5} + \frac{4}{5}$

2. Decir cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados con respecto a: (i) adición, (ii) sustracción, (iii) multiplicación, (iv) división. En los casos en que la respuesta sea "no", dar un ejemplo como prueba. Tal ejemplo es llamado un "contraejemplo"

(a) El conjunto de los números naturales.
(b) El conjunto de los números naturales pares.
(c) El conjunto de los números naturales impares.
(d) $\{1, 2\}$

(e) Los múltiplos de 10.
(f) Los números naturales mayores que 20.
(g) El conjunto de los números naturales mayores que 50 y menores que 100.
(h) El conjunto de cuadrados perfectos.

3. Dar el nombre de la ley o propiedad que justifica cada una de las siguientes igualdades:

(a) $(5 \times 6) \times 2 = 5 \times (6 \times 2)$
(b) $8 \times 7 = 7 \times 8$
(c) $4(3 + 7) = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 7$
(d) $8(7 + 9) = 8(9 + 7)$
(e) $4 \cdot 1 = 4$

4. Los siguientes cálculos pueden hacerse mentalmente. Efectúense y diga qué propiedad o propiedades se usan en cada caso.

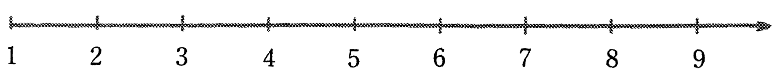
(a) $96 + (178 + 4)$
(b) $25 \times (49 \times 4)$
(c) $(67 \times 93) + (67 \times 7)$
(d) $693 + (157 + 7)$
(e) $79 \times 7 + 3 \times 79$
(f) $(3 + 150) + 997$

5. En las siguientes proposiciones, las variables representan números naturales. ¿Cuáles de las proposiciones son ciertas para cualquier valor de la variable? En cada caso justificar la respuesta.

(a) $5y + 9 = 9 + 5y$
(b) $3x + y = x + 3y$
(c) $7 \cdot (a + 3) = (3 + a) \cdot 7$
(d) $(p + q) + r = p + (r + q)$
(e) $(tv)w = t(wv)$
(f) $8 + (5a + 2) = 10 + 5a$
(g) $(cd^2) + f = c + (d^2 + f)$
(h) $x(4 + 7) = (3 + 8) \cdot x$

1.6 ORDEN EN EL SISTEMA DE NUMEROS NATURALES

Cuando usamos los números naturales para contar objetos, nos damos cuenta que aparecen en un orden definido. El más pequeño es el número 1. Le siguen el 2, 3, etc. Hay un número infinito de ellos. El orden de los números naturales, lo podemos representar en la recta numérica, tal como aparece aquí:



La relación de orden tiene algunas propiedades fundamentales que vamos a enunciar. Los signos tienen los siguientes significados:

$a > b$ significa "*a* es mayor que *b*"
o "*a* está a la derecha de *b* en la recta numérica"
$a < b$ significa "*a* es menor que *b*"
o "*a* precede a *b* en la recta numérica"

Propiedad de tricotomía. Si a y b son números naturales, se verifica una de las siguientes relaciones.

$$a = b, \quad a < b, \quad \text{o} \quad a > b.$$

Así pues la propiedad de tricotomía nos dice que si consideramos dos números naturales, entonces una y sólo una de tres posibilidades puede ser cierta: *a* igual a *b*, *a* menor que *b*, o *a* mayor que *b*.

Propiedad transitiva. Si a, b y c son números naturales y $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Nótese que es análoga a la propiedad transitiva de las igualdades.

Propiedad aditiva. Si a, b y c son números naturales y $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

También es análoga a la de las igualdades.

Propiedad multiplicativa. Si a, b y c son números naturales y $a < b$, entonces $ac < bc$.

Esta propiedad también es análoga a la de los números naturales. Cuando estudiemos el sistema de los números enteros, veremos que para ellos hay que modificarla.

En relación al orden de los números naturales se usan también los signos:

$a \leq b$, significa "*a* es menor o igual a *b*"
$a \geq b$, significa "*a* es mayor o igual que a *b*"
$a \neq b$, significa "*a* no es igual a *b*" En este caso no sabemos si $a > b$, o $b > a$.
$x > b$ y $x < a$, significa "*x* es mayor que *b* y menor que *a*". Podemos combinar las dos ideas, escribiendo: "$b < x < a$", lo cual significa que *x* está entre *a* y *b*.

$b \leq x \leq a$ significa "x es menor o igual a a y mayor o igual a b"
Si $a > b$ entonces existe un número natural, c, tal que $a = b + c$.
Por ejemplo, si $7 > 2$, existe el número 5 tal que $7 = 2 + 5$.

Ejercicio 1-5

1. Para cada ejercicio escribir el conjunto de números naturales, que cumplen las condiciones que se indican:

(a) $y < 7$
(b) $y \leq 4$
(c) $x > 5$
(d) $x \geq 2$
(e) $1 < x < 3$
(f) $2 \leq y < 7$
(g) $6 \leq y \leq 10$
(h) $4 < x \leq 9$

2. Si x es un número natural, dibujar los siguientes conjuntos en la recta numérica.

(a) $x < 4$
(b) $x \leq 3$
(c) $x > 2$
(d) $x \geq 5$
(e) $2 < x < 5$
(f) $4 \leq x \leq 8$

3. Reescribir las siguientes proposiciones usando los símbolos de orden ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$ etc.). En todos los casos x es un número natural.

(**a**) x es menor que 17.
(**b**) x es mayor o igual a 5.
(**c**) x es mayor que 2 y menor que 7.
(**d**) x es menor que 12 y mayor que 3.
(**e**) x es igual a o menor que 6.
(**f**) x está entre 10 y 17.

4. Si $a + b = c$ y $c + d = e$, ¿cuál es la relación de orden entre a y e? Justificar la respuesta. (Todas las letras representan números naturales.)

1.7 LAS DEMOSTRACIONES EN ALGEBRA

En la sección 1-3 dijimos que la Aritmética y el Algebra pueden ser estructuradas lógicamente. Para ello se empieza estableciendo hipótesis o propiedades y de ellas se deducen teoremas por medio del razonamiento lógico. En efecto, las propiedades de las que partimos las consideramos verdaderas y los teoremas son las bases de los métodos usados al trabajar con expresiones algebraicas.

Con frecuencia, al trabajar con expresiones algebraicas, hemos usado este método pero sin poner de manifiesto su base lógica. Tomaremos ahora un punto de vista diferente: aun cuando continuaremos trabajando con expresiones algebraicas como lo hicimos antes, estaremos más pendientes del razonamiento lógico del que dependen los pasos que usemos. En esta sección, en que nos referimos al sistema de los números naturales, todas las variables representan números de ese tipo.

Ejemplo. Demostrar que $(x + 3) + (4 + 5x) = 6x + 7$.

Pasos	Razones
1. $(x + 3) + (4 + 5x) = [(x + 3) + 4] + 5x$	Propiedades asociativa y cerradura con respecto a la adición.
2. $= [x + (3 + 4)] + 5x$	Propiedad asociativa de la adición.
3. $= (x + 7) + 5x$	Por aritmética $(3 + 4 = 7)$.
4. $= x + (7 + 5x)$	Propiedad asociativa de la adición.
5. $= x + (5x + 7)$	Propiedad conmutativa de la adición.
6. $= (x + 5x) + 7$	Propiedad asociativa de la adición.
7. Puesto que	
$x + 5x = 1 \cdot x + 5 \cdot x = x \cdot 1 + x \cdot 5$	Propiedad del número 1
$= x(1 + 5) = x \cdot 6 = 6x$,	Propiedades distributiva y conmutativa de la multiplicación.
Podemos escribir	
8. $(x + 3) + (4 + 5x) = 6x + 7$	Propiedad transitiva

Desde luego que podríamos llegar a este resultado en forma mucho más simple y directa, pero la demostración dada explica por qué es cierto ese resultado. En nuestro trabajo diario usamos métodos más simples, pero el lector debe estar seguro de que dichos métodos están basados en procedimientos lógicos como el que se describió anteriormente.

Ejercicio 1-6

En todos los ejercicios que siguen las variables representan números naturales.

1. Probar que $(a + b) + c = (c + a) + b$. Se dan los pasos y hay que exponer las razones:

Pasos	Razones
$(a + b) + c = a + (b + c)$	?
$= a + (c + b)$	?
$= (a + c) + b$	?
$= (c + a) + b$	?

2. Demostrar que $(6a) \cdot (2b) = 12\,ab$

Pasos	Razones
$(6a)(2b) = [(6 \cdot a) \cdot 2] \cdot b$	?
$= [2 \cdot (6 \cdot a)] \cdot b$	?
$= [(2 \cdot 6) \cdot a] \cdot b$	?
$= (12 \cdot a) \cdot b$	?
$= 12(a \cdot b)$, or $12ab$	?

3. Probar que $(3x + 2)(x + 4) = 3x^2 + 14x + 8$.

Pasos	Razones
$(3x + 2)(x + 4) = 3x(x + 4) + 2(x + 4)$	?
$= (3x^2 + 12x) + (2x + 8)$	?
$= [(3x^2 + 12x) + 2x] + 8$	?
$= [3x^2 + (12x + 2x)] + 8$	?
$12x + 2x = x(12 + 2)$	?
$12x + 2x = 14x$	?
$(3x + 2)(x + 4) = 3x^2 + 14x + 8$	?

4. Demostrar que $x(y + z) + yw = xz + y(w + x)$.

Pasos	Razones
$x(y + z) + yw = (xy + xz) + yw$	?
$= (xz + xy) + yw$	?
$= (xz + yx) + yw$	?
$= xz + (yx + yw)$	?
$= xz + y(x + w)$	?
$= xz + y(w + x)$	?

5. Demostrar que $(x + 3) + 5 = x + 8$.
6. Probar que $3a + 7a = 10a$.
7. Demostrar que $(ab)c = (ca)b$.
8. Probar que $(ab)(cd) = (dc)(ab)$.
9. Demostrar que $(3a + 2)(a + 5) = 3a^2 + 17a + 10$.

Los ejercicios anteriores indican cómo se utilizan las propiedades de los números naturales en el cálculo algebraico. También se usan para llegar a resultados más generales, que constituyen los teoremas, como sigue:

Teorema. Si a, b, c y d son números naturales, demostrar que $a(b + c + d) = ab + ac + ad$.

Demostración

Pasos	Razones
1. $a(b + c + d) = a([b + c] + d)$	Definición de $b + c + d$
2. $= a[b + c] + ad$	Propiedad distributiva
3. $= (ab + ac) + ad$	Propiedad distributiva
4. $a(b + c + d) = ab + ac + ad$	Propiedad transitiva

Análogamente, podríamos demostrar que

$$a(b + c + d + \dots + n) = ab + ac + ad + \dots + an.$$

Ejercicio 1-6 A

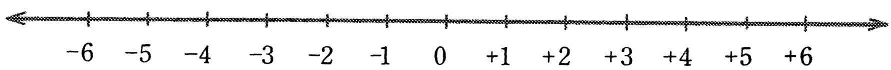
En los siguientes ejemplos, las variables son números naturales.

1. Probar que $x(y + z + w) = x(z + w) + xy$
2. Probar que $3y(x + 2y + z) = 3xy + 3y(2y + z)$
3. Probar que $(2x + 1)(x^2 + x + 3) = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 3$
4. Probar que $(x + y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS ENTEROS

1.8 EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros contiene los enteros negativos, el cero y los enteros positivos. Este conjunto lo podemos representar en la recta numérica así:



El conjunto de los números naturales está incluido, implícitamente, en el conjunto de los números enteros aunque, estrictamente hablando, el número natural 1, o el número natural 2, no es lo mismo que el número entero $+ 1$, o el número entero $+ 2$.

Supondremos que el sistema de los números enteros, tiene las mismas propiedades que el de los números naturales, es decir, cerradura, las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, y la identidad multiplicativa. El sistema de los números posee además las dos propiedades siguientes:

Identidad aditiva o elemento neutro de la adición. Para cualquier número, a, del sistema de números enteros, hay el elemento cero tal que $a + 0 = a$.
Inverso aditivo. Para cualquier elemento, a, del sistema de los números enteros, existe un elemento inverso, $- a$, tal que $a + (- a) = 0$.

Por ejemplo, el inverso aditivo de $+6$ es -6 y el de -5 es $+5$, o sea $-(-5)$; puesto que $(-5) + (+5) = 0$.

Debemos notar que el signo "$-$" es usado de tres modos distintos. (1) Como símbolo operacional, indica sustracción. (2) Para indicar un elemento inverso aditivo. (3) Para designar un número negativo. También conviene notar que $-a$ es un número negativo si a es positivo, pero $-a$ es un número positivo cuando a es negativo.

El sistema de los números naturales nos permite encontrar conjuntos solución, no vacíos, para ecuaciones como $x + 5 = 8$. Sin embargo, si deseamos hallar conjuntos solución, no vacíos, para ecuaciones como $x + 3 = 1$, necesitamos pasar al sistema de los números enteros. En este último la ecuación $x + 3 = 1$ tiene solución. Encontraremos ventajoso ampliar el sistema de números una y otra vez. Veremos que cada ampliación sigue una norma definida: se mantienen las propiedades que tenía el sistema próximo anterior y se le agregan otras que aquél no tiene. De esta manera se encuentran conjuntos solución, no vacíos, para nuevos tipos de ecuaciones.

1.9 OPERACIONES EN EL SISTEMA DE LOS NUMEROS ENTEROS

Adición

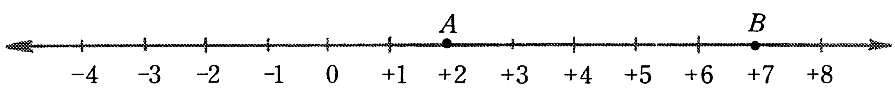
Antes de hacer uso del sistema de números enteros, será necesario definir en él las operaciones de adición, sustracción y multiplicación. La experiencia nos dice que dicho sistema es cerrado con respecto a estas tres operaciones. Por ejemplo:

$$-3 + 5, \quad -3 - (-5), \quad \text{y} \quad (-3)\cdot(-5)$$

nos dan números enteros. Este sistema no es cerrado con respecto a la operación de división. Ejemplo: $(-3) \div 5$, no es un entero.

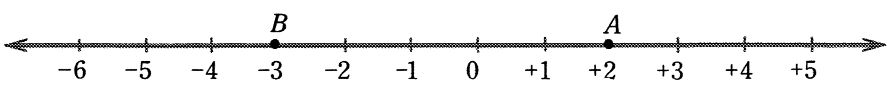
Los enteros son frecuentemente llamados números dirigidos o números con signo, puesto que pueden ser usados para indicar dirección. Usamos la recta numérica para interpretar la adición de números enteros.

Ejemplo 1. $(+2) + (+5) = ?$



En la recta numérica $+2$ indica que estamos en el punto A y $+ \ (+5)$ nos indica que debemos avanzar 5 unidades a la derecha. Entonces $+7$ (punto B) señala el resultado de la operación. Así pues, $(+2) + (+5) = +7$.

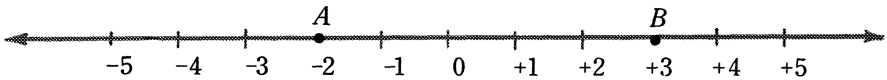
Ejemplo 2. $+2 + (-5) = ?$



$+2$ nos indica que estamos en el punto A de la recta numérica; $+\ (-5)$ nos dice que debemos movernos 5 unidades a la izquierda. Entonces -3 (punto B) nos da el resultado de la operación.

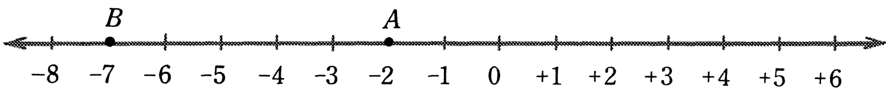
Así que $(+2) + (-5) = -3$.

Ejemplo 3. $-2 + (+5) = ?$



-2 nos dice que comenzamos en el punto *A;* $+\ (+5)$ nos indica movernos 5 unidades a la derecha. Entonces, $+3$ (punto B) nos da el resultado de la operación. Vemos que $-2 + (+5) = +3$.

Ejemplo 4. $(-2) + (-5) = ?$



-2 nos dice que partimos del punto A de la recta; $+\ (-5)$ nos dice que hay que recorrer 5 unidades a la izquierda. Luego -7 (punto B) es el resultado de la operación. Es decir: $(-2) + (-5) = -7$.

La aritmética de los números enteros positivos es la misma que la de los números naturales. Podemos pensar, por ejemplo, en $(+2) + (+5)$ como en $2 + 5$, y de $(+9) - (+2)$, como $9 - 2$. Entonces trataremos la adición de enteros positivos como la de números naturales.

Para hacer un resumen de los resultados de los ejemplos anteriores, introduciremos el concepto de valor absoluto de un entero. El valor absoluto de un número entero es el número que representa la distancia del cero al número en la recta numérica. El símbolo para el valor absoluto es $|\ |$. Otra definición de valor absoluto es:

$$|a| = a, \text{ si } a \geq 0; \ |a| = -a, \text{ si } a < 0.$$

Nota: Debemos notar que cuando $a < 0$, $-a$ es positivo. Así pues, $-3 = -(-3)$, o sea, $a + 3$.

Ejercicio 1-7

1. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

(a) $|5| > |3|$
(b) $|-4| < |2|$
(c) $|3| \not< |-7|$
(d) $|-6| \leq |-8|$
(e) $|-9| \not< |4|$
(f) $|-3| < |8|$
(g) $|7| > |-2|$
(h) $|-6| < |6|$

2. Efectuar las operaciones indicadas.

(a) $5 + |-3|$
(b) $|6| + |4|$
(c) $|-3| - |2|$
(d) $|-4| + |4 - 5|$
(e) $|-3| \cdot |-4|$
(f) $|6 - 8| \cdot |5|$
(g) $|-7| + |-4|$
(h) $|7| - |-2|$

Definimos la suma de dos enteros en la siguiente forma:

1. Si a y b son ambos positivos o cero, su suma es la suma de sus valores absolutos.

2. Si a y b son negativos ambos, su suma es el inverso aditivo de la suma de sus valores absolutos.

3. Si uno de los números a y b es positivo o cero y el otro es negativo, el valor absoluto de su suma es la diferencia de sus valores absolutos. Si la suma no es cero, el resultado será un número positivo o negativo dependiendo del sumando que tenga mayor valor absoluto.

Sustracción

Vamos a considerar ahora la sustracción de números enteros. La sustracción de números naturales, tal como $(7 - 4)$, podemos hacerla contestándonos la pregunta: "¿Cuánto hay que agregar a 4 para tener 7?" Análogamente, se obtiene la resta de números enteros contestando la pregunta: "¿Cuánto debemos sumar al sustraendo para tener el minuendo?"

$+9$	(minuendo)	$+9$	-9	-9
$+2$	(sustraendo)	-2	$+2$	-2
$+7$		$+11$	-11	-7

¿Estamos de acuerdo con los resultados?

Los mismos resultados se obtienen si sumamos al minuendo al inverso aditivo del sustraendo.

$+9$	$+9$	-9	-9
-2	$+2$	-2	$+2$
$+7$	$+11$	-11	-7

Así, en general, $a - b = a + (-b)$. Lo cual expresaremos como teorema: