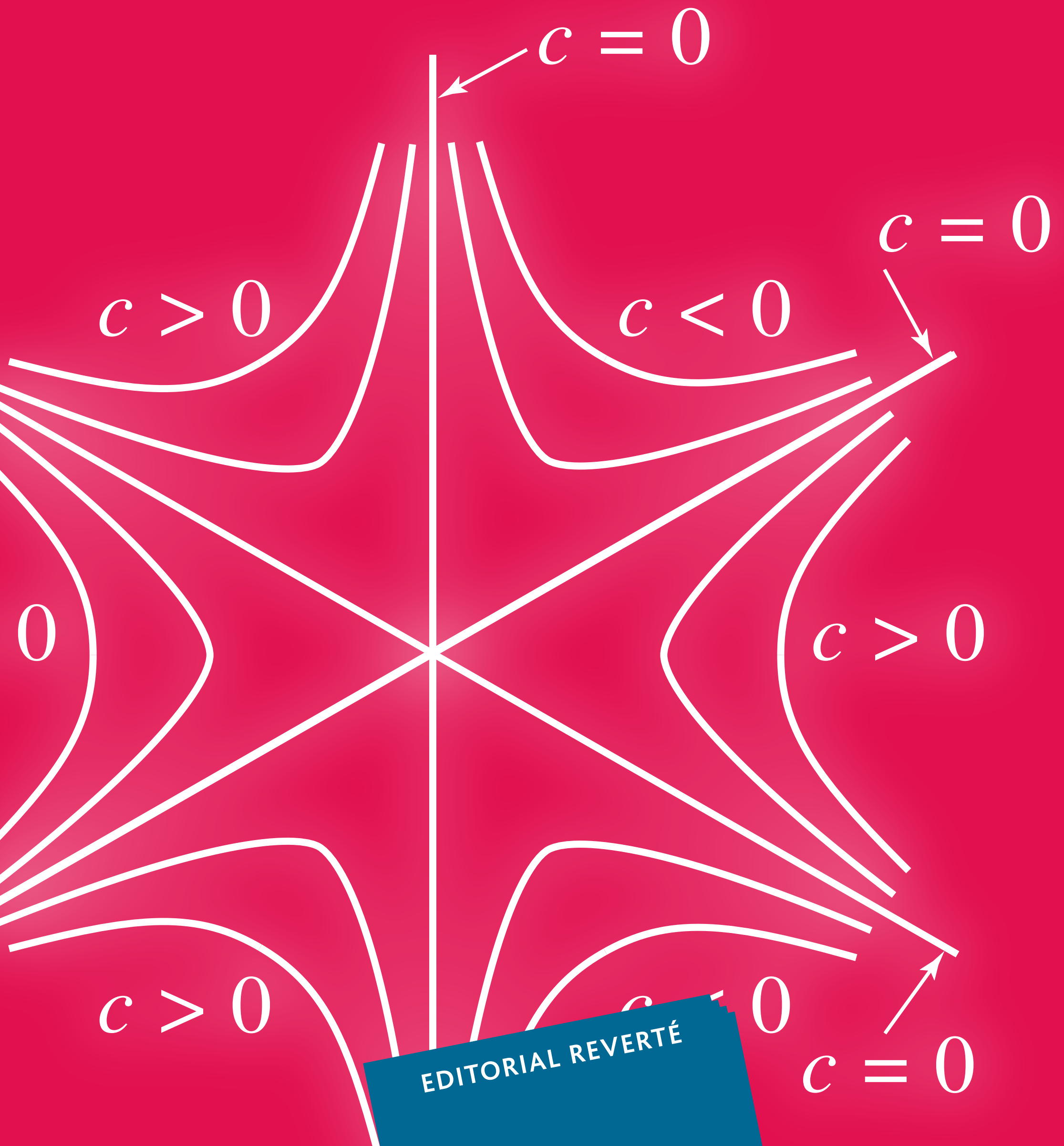
Tom M. Apostol

CÁLCULO II

Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear, com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades



EDITORIAL REVERTÉ

Tom M. Apostol

CÁLCULO II

Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear,
com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título da obra original:

CALCULUS, one – variable calculus,
with an introduction to linear algebra
Second Edition. Volume 2

Edição original em língua inglesa publicada por

Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.

Edição em português:

ISBN: 978-84-291-5016-2 Tomo 2
ISBN: 978-84-291-5014-8 Obra completa

Edição em português (PDF):

ISBN: 978-84-291-9671-9

Tradução de:

Joaquim Ferreira Marques
Doutor em Ciências Exatas

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

a

Jane e Stephen

PREFÁCIO

Este livro é a continuação do livro do autor *Cálculo, volume I, Segunda Edição.* O presente volume foi escrito com a mesma ideia fundamental que norteou o primeiro. Uma adequada orientação para a técnica ligada a um rigoroso e profundo desenvolvimento teórico. Procurou-se fazer chegar ao estudante o espírito da matemática moderna sem exagerar o formalismo. Como no Volume I, incluem-se notas históricas para dar ao estudante uma ideia da evolução do pensamento matemático.

O segundo volume está dividido em três partes, intituladas *Análise Linear, Análise não Linear e Tópicos Especiais.* Os dois últimos capítulos do Volume I repetem-se aqui, constituindo os dois primeiros capítulos deste Volume, com a finalidade de que todo o material relativo à Álgebra Linear se apresenta de forma completa em cada um dos volumes.

A Parte 1 contém uma introdução à álgebra linear, incluindo transformações lineares, matrizes, determinantes, valores próprios e formas quadráticas. Fazem-se algumas aplicações à Análise, em particular ao estudo das equações diferenciais lineares. Com a ajuda do cálculo matricial estudam-se os sistemas de equações diferenciais. Demonstram-se teoremas de existência e unicidade por intermédio do método de Picard das aproximações sucessivas, que também se trata na teoria dos operadores de contracção.

Na Parte 2 estuda-se o cálculo para funções de várias variáveis. O cálculo diferencial é unificado e simplificado com auxílio da álgebra linear. Incluem-se a generalização da regra de derivação de uma função composta para campos vectoriais e escalares e aplicações às equações de derivadas parciais e a problemas de extremos. O cálculo integral inclui os integrais de linha, integrais múltiplos, e integrais de superfície, com aplicações à Análise vectorial. Aqui a exposição segue mais ou menos a linha clássica e não inclui um desenvolvimento formal das formas diferenciais.

Os tópicos especiais tratados na Parte 3 são *Probabilidades e Análise Numérica.* A parte referente às Probabilidades está dividida em dois capítulos, um que trata o assunto considerando o conjunto fundamental (ou espaço amostra) finito ou infinito numerável; o outro em que se consideram conjuntos fundamentais não numeráveis, variáveis aleatórias e funções de repartição. Fazem-se algumas aplicações no estudo de variáveis aleatórias uni e bidimensionais.

O último capítulo contém uma introdução à Análise Numérica, dando-se particular ênfase ao estudo de diferentes tipos de aproximação polinomial. Aqui, mais uma vez se procura a unificação das ideias pela notação e terminologia da álgebra linear. O livro termina com o estudo de fórmulas de integração aproximada, tais como a regra de Simpson, e com uma discussão da fórmula de somação de Euler.

Contém este volume matéria suficiente para um curso anual com três ou quatro tempos semanais. Pressupõe a conhecimento do cálculo para funções de uma variável tal como se estuda na maior parte dos primeiros anos dos cursos de cálculo. O autor idealizou a matéria exposta para um curso com quatro aulas semanais, duas de exposição por parte do professor e duas para questões postas aos alunos, desenvolvido ao longo de dez semanas para cada parte e omitindo as secções assinaladas com um asterisco.

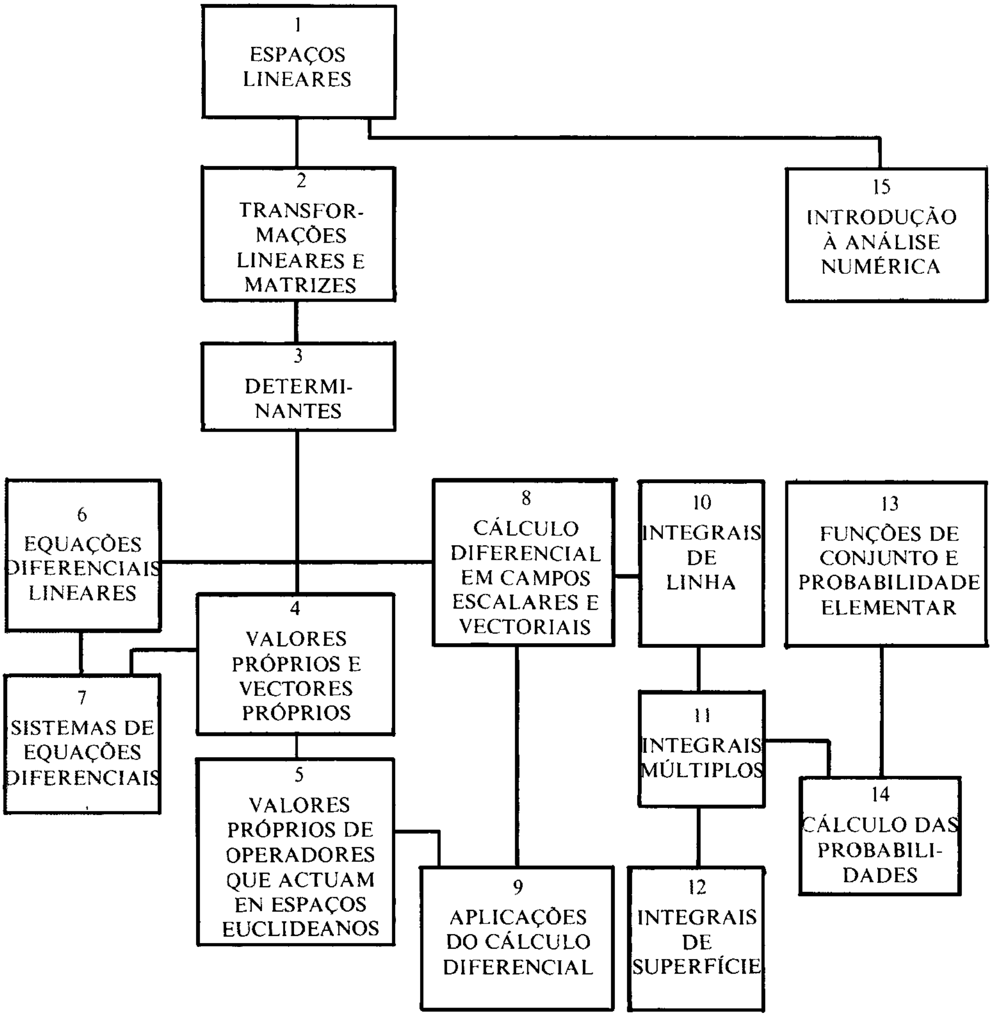
Este segundo volume foi planeado de maneira a poderem omitirse vários capítulos em cursos abreviados. Por exemplo, o último capítulo de cada uma das partes pode ser omitido, sem que tal origine descontinuidade na exposição. A Parte 1 proporciona material para um curso combinado de álgebra linear e equações diferenciais ordinárias. Cada professor pode escolher os tópicos adequados às suas necessidades e preferências por consulta do diagrama da página seguinte que coindencia a interdependência lógica dos capítulos.

Mais uma vez agradeço com prazer a colaboração de muitos amigos e colegas. Ao preparar a segunda edição recebi valiosa ajuda dos Professores Herbert S. Zuckerman da Universidade de Washington e Basil Gordon da Universidade da Califórnia, Los Angeles, tendo cada um deles sugerido várias modificações. Agradecimento são também devidos ao pessoal da Blaisdell Publishing Company pela sua assistência e cooperação.

Como noutras ocasiões, é para mim uma satisfação especial exprimir a minha gratidão a minha esposa pela sua valiosa e variada colaboração. Em sinal de reconhecimento dedico-lhe gostosamente este livro.

T. M. A.

Pasadena, Califórnia


1
ESPAÇOS LINEARES
2
TRANSFOR-MAÇÕES LINEARES E MATRIZES
3
DETERMI-NANTES
4
VALORES PRÓPRIOS E VECTORES PRÓPRIOS
5
VALORES PRÓPRIOS DE OPERADORES QUE ACTUAM EN ESPAÇOS EUCLIDEANOS
6
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES
7
SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
8
CÁLCULO DIFERENCIAL EM CAMPOS ESCALARES E VECTORIAIS
9
APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL
10
INTEGRAIS DE LINHA
11
INTEGRAIS MÚLTIPLOS
12
INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE
13
FUNÇÕES DE CONJUNTO E PROBABILIDADE ELEMENTAR
14
CÁLCULO DAS PROBABILI-DADES
15
INTRODUÇÃO À ANÁLISE NUMÉRICA

ÍNDICE ANALÍTICO

Parte 1. ANÁLISE LINEAR

1. ESPAÇOS LINEARES

2. TRANSFORMAÇÕES LINEARES E MATRIZES

3. DETERMINANTES

4. VALORES PRÓPRIOS E VECTORES PRÓPRIOS

5. VALORES PRÓPRIOS DE OPERADORES EM ESPAÇOS EUCLIDIANOS

6. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

7. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

PARTE 2. ANÁLISE NÃO LINEAR

8. CÁLCULO DIFERENCIAL EM CAMPOS ESCALARES E VECTORIAIS

9. APLICAÇÕES DO CÁLCULO DIFERENCIAL

10. INTEGRAIS DE LINHA

11. INTEGRAIS MÚLTIPLOS

12. INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

PARTE 3. TEMAS ESPECIAIS

13. FUNÇÕES DE CONJUNTO E PROBABILIDADE ELEMENTAR

14. CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

Cálculo

PARTE 1

ANÁLISE LINEAR

1

ESPAÇOS LINEARES

1.1. Introdução

No desenvolvimento da Matemática encontramos muitos exemplos de objectos matemáticos que podem ser adicionados uns aos outros e multiplicados por números reais. O primeiro exemplo de tais objectos são os próprios números reais. Outros exemplos são as funções reais, os números complexos, as séries infinitas, os vectores num espaço *n dimensional* e as funções vectoriais. Neste capítulo vamos analisar um conceito matemático geral, chamado *espaço linear*, que inclui todos estes exemplos e muitos outros como casos particulares.

Em resumo, um espaço linear é um conjunto de elementos de natureza qualquer no qual se efectuam certas operações (chamadas *adição* e *multiplicação por números)*. Ao definir-se um espaço linear, *não é necessário especificar* a natureza dos elementos nem dizer como se realizam entre eles as operações acabadas de referir. Em vez disso, exige-se que as operações gozem de certas propriedades que se tomam como axiomas do espaço linear. Vamos precisamente, em seguida, fazer uma descrição pormenorizada desses axiomas.

1.2. Definição de espaço linear

Seja V um conjunto não vazio de objectos, chamados *elementos*. O conjunto V chama-se um espaço linear se satisfaz aos dez axiomas que a seguir se enunciam, divididos em três grupos.

Axiomas de fecho.

AXIOMA 1. FECHO A RESPETTO DA ADIÇÃO. *A todo o par de elementos x e v de V corresponde um único elemento de V, chamado soma de x e y e representado por $x + y$.*

AXIOMA 2. FECHO A RESPEITO DA MULTIPLICAÇÃO POR NÚMEROS REAIS. *A todo o x de V e todo o número real a corresponde um elemento de V, chamado o produto de a por x e representado por ax.*

Axiomas para a adição.

AXIOMA 3. PROPRIEDADE COMUTATIVA. *Para todo o x e y de V, temse $x + y = y + x$.*

AXIOMA 4. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA. *Para todo o x, y e z de V, tem-se $x + (y + z) = (x + y) + z$.*

AXIOMA 5. EXISTÊNCIA DE ELEMENTO ZERO. *Existe um elemento em V, representado pelo símbolo O, tal que*

$$x + O = x \qquad \textit{para todo o } x \textit{ de } V.$$

AXIOMA 6. EXISTÊNCIA DE SIMÉTRICOS. *Para todo o x de V, o elemento $(-1)x$ tem a propriedade*

$$x + (-1)x = O.$$

Axiomas para a multiplicação por núme os.

AXIOMA 7. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA. *Para todo o x de V, e todo o par de números reais a e b, tem-se*

$$a(bx) = (ab)x.$$

AXIOMA 8. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA PARA A ADIÇÃO EM V. *Para todo o par x e y de V e todo o real a, tem-se*

$$a(x + y) = ax + ay.$$

AXIOMA 9. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA PARA A ADIÇÃO DE NÚMEROS. *Para todo o x em V e todo o par de reais a e b tem-se*

$$(a + b)x = ax + bx.$$

AXIOMA 10. EXISTÊNCIA DE ELEMENTO IDENTIDADE. *Para todo x em V, tem-se $1x = x$.*

Os espaços lineares, como foram definidos atrás, são muitas vezes chamados espaços lineares *reais*, para fazer ressaltar o facto de que se multiplicam elementos de V por números reais. Se nos Axiomas 2, 7, 8 e 9 substiuimos *número real* por *número* *complexo*, a estrutura resultante chama-se um *espaço linear complexo*. Por vezes um espaço linear chama-se também *espaço vectorial linear*, ou mais simplesmente *espaço vectorial*; os números usados como multiplicadores chamam-se *escalares*. Um espaço linear real admite os números reais como escalares, um espaço linear complexo admite os números complexos como escalares. Embora se considerem aqui fundamentalmente exemplos de espaços vectoriais lineares reais, todos os teoremas são verdadeiros igualmente para os espaços vectoriais complexos. Quando fazemos uso da expressão espaço linear, sem qualquer designação suplementar, deve subentender-se que o espaço pode ser real ou complexo.

1.3. Exemplos de espaços lineares

Se especificamos qual o conjunto V e dizemos como somar os seus elementos e como multiplicá-los por números, obtemos um exemplo concreto de um espaço linear. O leitor pode facilmente verificar que cada um dos seguintes exemplos satisfaz a todos os axiomas para um espaço linear real.

EXEMPLO 1. Seja $V = \mathbf{R}$ o conjunto dos números reais, e sejam $x + y$ e ax a adição e multiplicação usuais de números reais.

EXEMPLO 2. Seja $V = \mathbf{C}$ o conjunto dos números complexos, e seja $x + y$ a adição ordinária de números complexos e ax a multiplicação de números complexos x pelo número real a. Embora os elementos de V sejam números complexos, este é um espaço linear real porque os escalares são reais.

EXEMPLO 3. Seja $V = V_n$ o espaço vectorial dos sistemas de n números reais, com a adição e a multiplicação por escalares definida da maneira usual em função das componentes.

EXEMPLO 4. Seja V o conjunto de todos os vectores em V_n ortogonais a um dado vector não nulo N. Se $n = 2$, este espaço linear é uma recta que passa por O, admintindo N como vector normal. Se $n = 3$, é um plano que passa por O com N como vector normal.

Os exemplos que se seguem dizem-se *espaços funcionais*. Os elementos de V são funções reais, com a adição de duas funções f e g definidas na forma usual:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo o real x pertencente à intersecção dos domínios de f e g. A multiplicação de uma função f por um escalar real a define-se do modo seguinte: af é a função cujo valor para cada x no domínio de f e $af(x)$. O elemento zero é a função cujos valores são sempre zero. O leitor verificará com facilidade que cada um dos conjuntos seguintes é um espaço funcional.

EXEMPLO 5. O conjunto de todas as funções definidas num dado intervalo.

EXEMPLO 6. O conjunto de todos os polinómios.

EXEMPLO 7. O conjunto de todos os polinómios de grau $\leqq n$, com n fixo. (Sempre que se considera este conjunto subentende-se que o polinómio zero está também incluido). O conjunto de todos os polinómios de grau *igual a n* não é um espaço linear porque os axiomas de fecho não são satisfeitos. Por exemplo, a soma de dois polinómios de grau n não terá necessariamente grau n.

EXEMPLO 8. O conjunto de todas as funções contínuas num dado intervalo. Se o intervalo é $[a, b]$ representamos este espaço linear por $C(a, b)$.

EXEMPLO 9. O conjunto de todas as funções deriváveis num dado ponto.

EXEMPLO 10. O conjunto de todas as funções integráveis num dado intervalo.

EXEMPLO 11. O conjunto de todas as funções f definidas no ponto 1, com $f(1) = 0$. O número 0 é fundamental neste exemplo. Se substituirmos 0 por um número c não nulo, violamos os axiomas de fecho.

EXEMPLO 12. O conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial linear homogénea $y'' + ay' + by = 0$, com a e b constantes. Aqui mais uma vez o 0 é essencial. O conjunto de soluções de uma equação diferencial não homogénea não satisfaz aos axiomas de fecho.

Estes exemplos e muitos outros mostram bem quanto o conceito de espaço linear está estendido à Algebra, Geometria e Análise. Quando se deduz um teorema a partir dos axiomas de um espaço linear, obtemos, de uma vez, um resultado válido para cada exemplo concreto. Unificando diferentes exemplos desta maneira ganhamos um conhecimento mais aprofundado de cada um. Algumas vezes o conhecimento de um exemplo particular ajuda-nos a antecipar ou interpretar resultados válidos para outros exemplos e põe em evidência relações que de outro modo poderiam passar despercebidas.

1.4. Consequências elementares dos axiomas

Os teoremas que se seguem deduzem-se facilmente dos axiomas para um espaço linear.

TEOREMA 1.1. UNICIDADE DO ELEMENTO ZERO. *Em qualquer espaço linear existe um e um só elemento zero.*

Demonstração. O axioma 5 diz-nos que existe pelo menos um elemento zero. Suponhamos que existiam dois, por exemplo O_1 e O_2. Tomando $x = O_1$ e $O = O_2$ no Axioma

5, obtemos $O_1 + O_2 = O_1$. Analogamente, tomando $x = O_2$ e $O = O_1$, encontramos $O_2 + O_1 = O_2$. Mas $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$, devido à propriedade comutativa, pelo que $O_1 = O_2$.

TEOREMA 1.2. UNICIDADE DOS ELEMENTOS SIMÉTRICOS. *Em qualquer espaço linear todo o elemento admite unicamente um simétrico, isto é, para todo o x existe um e um só y tal que $x + y = O$.*

Demonstração. O Axioma 6 diz-nos que cada x admite pelo menos um simétrico, a saber $(-1)x$. Admitamos agora que x tinha dois simétricos, y_1 e y_2. Então $x + y_1 = O$ e $x + y_2 = O$. Somando y_2 a ambos os membros da primeira igualdade e utilizando os Axiomas 5, 4 e 3, encontramos

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2,$$

e

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1.$$

Portanto $y_1 = y_2$, pelo que x tem precisamente um simétrico, o elemento $(-1)x$.

Notação. O simétrico de x representa-se por $-x$. A diferença $y - x$ é definida pela soma $y + (-x)$.

O teorema seguinte refere um certo número de propriedades que regem os cálculos algébricos elementares num espaço linear.

TEOREMA 1.3. *Num dado espaço linear, sejam x e y elementos arbitrários e a e b escalares arbitrários. Então verificam-se as seguintes propriedades:*

(a) $0x = O$.
(b) $aO = O$.
(c) $(-a)x = -(ax) = a(-x)$.
(d) *Se* $ax = O$, *então ou* $a = 0$ ou $x = O$.
(e) *Se* $ax = ay$ e $a \neq 0$, *então* $x = y$.
(f) *Se* $ax = bx$ e $x \neq O$, *então* $a = b$.
(g) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$.
(h) $x + x = 2x$, $x + x + x = 3x$, *e em geral* $\sum_{i=1}^{n} x = nx$.

Vamos demonstrar (a), (b) e (c), deixando as demonstrações das restantes ao cuidado do leitor.

Demonstração de (a). Seja $z = 0x$. Desejamos provar que $z = O$. Somando z a si próprio e aplicando o Axioma 9, verificamos que

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$

Adiconamos agora $-z$ a ambos os membros e obtemos $z = O$.

Demonstração de (b). Seja $z = aO$, adicionemos z a si próprio e utilizemos o Axioma 8.

Demonstração de (c). $z = (-a)x$. Adicionando z a ax e utilizando o Axioma 9, verificamos que

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O,$$

pelo que z é o simétrico de ax, $z = -(ax)$. Analogamente, se adicionamos $a(-x)$ a ax e utilizamos o Axioma 8 e a propriedade (b), encontramos que $a(-x) = -(ax)$.

1.5. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 28, determinar se cada um dos conjuntos dados é um espaço linear real, com a adição e a multiplicação por escalares reais definidas da forma usual. Para os Exercícios em que assim não seja, dizer quais são os axiomas que não se verificam. As funções nos Exercícios 1 a 17 são reais. Nos Exercícios 3, 4 e 5 cada função tem um domínio contendo 0 e 1. Nos Exercícios 7 a 12, o domínio é o conjunto de todos os números reais.

1. Todas as funções racionais.
2. Todas as funções racionais f/g, com o grau de $f \leqq$ que o grau de g (incluindo $f = 0$).
3. Todas as funções f com $f(0) = f(1)$.
4. Todas as funções f com $2f(0) = f'(1)$.
5. Todas as funções f com $f(1) = 1 + f(0)$.
6. Todas as funções em escada definidas em escada $[0, 1]$.
7. Todas as funções com $f(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.
8. Todas as funções pares.
9. Todas as funções ímpares.
10. Todas as funções limitadas.
11. Todas as funções crescentes.
12. Todas as funções periódicas de período 2π.
13. Todas as funções f integraveis em $[0, 1]$, com $\int_0^1 f(x)dx = 0$.
14. Todas as funções f integráveis em $[0, 1]$, com $\int_0^1 f(x)dx \geqq 0$.
15. Todas as funções verificando $f(x) = f(1 - x)$ para todo o x.
16. Todos os polinómios de Taylor de grau $\leqq n$ para um n dado (incluindo o polinómio zero).
17. Todas as soluções da equação diferencial linear homogénea de segunda ordem $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, com P e Q funções dadas e contínuas para todo o x.
18. Todas as sucessões reais limitadas.
19. Todas as sucessões reais convergentes.
20. Todas as séries reais convergentes.
21. Todas as séries reais absolutamente convergentes.
22. Todos os vectores (x, y, z) de V_3 com $z = 0$.
23. Todos os vectores (x, y, z) de V_3 com $x = 0$ ou $y = 0$.
24. Todos os vectores (x, y, z) de V_3 com $y = 5x$.
25. Todos os vectores (x, y, z) de V_3 com $3x + 4y = 1$, $z = 0$.
26. Todos os vectores (x, y, z) de V_3 que são múltiplos escalares de $(1, 2, 3)$.
27. Todos os vectores (x, y, z) de V_3 cujas componentes satisfazem a um sistema de três equações lineares de forma:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0.$$