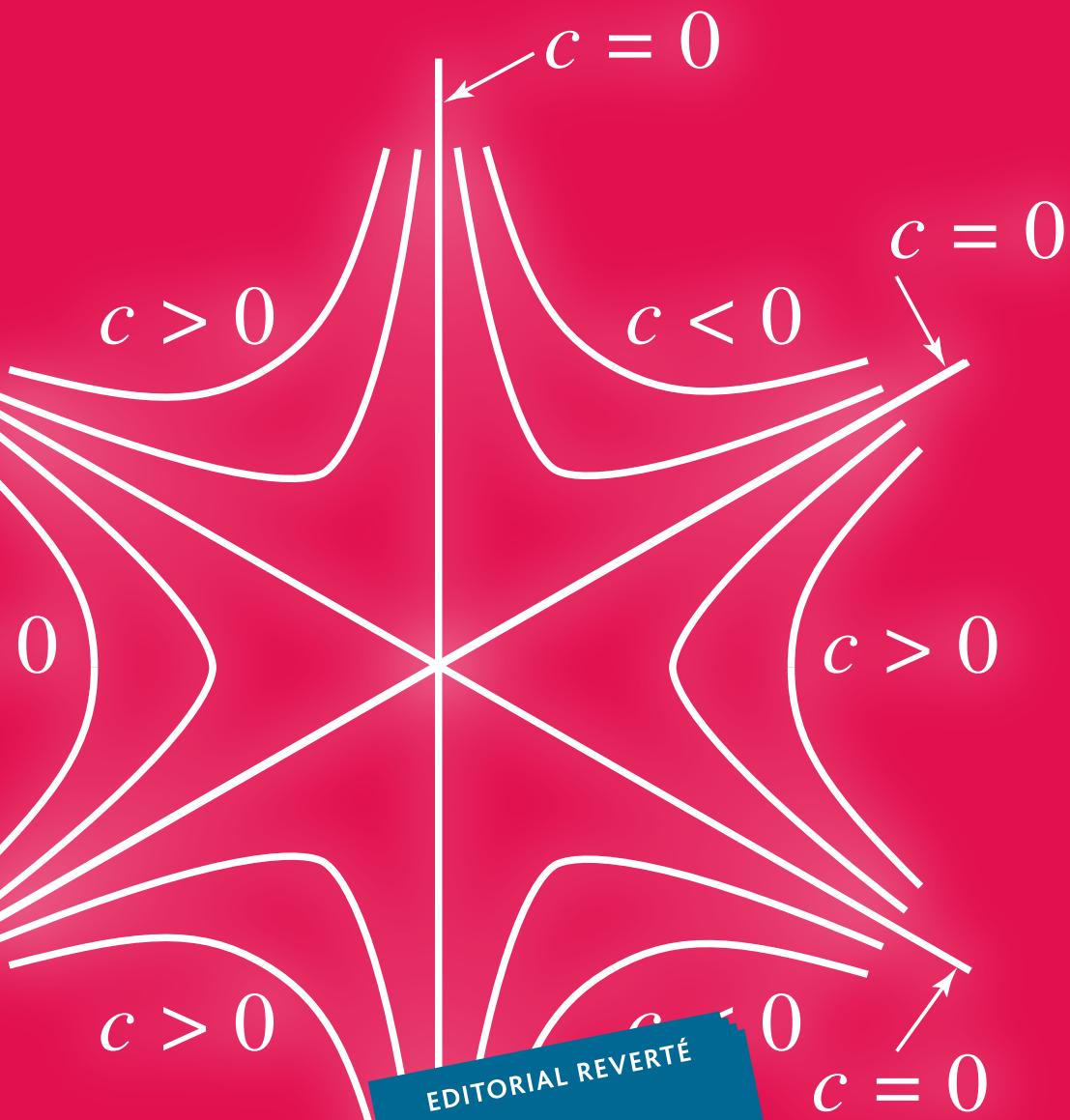


Tom M. Apostol

# CÁLCULO II

Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear,  
com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades



EDITORIAL REVERTÉ



Tom M. Apostol

# CÁLCULO II

Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear,  
com aplicações às equações diferenciais e às probabilidades



EDITORIAL  
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

*Título da obra original:*

**CALCULUS, one – variable calculus,  
with an introduction to linear algebra  
Second Edition. Volume 2**

*Edição original em língua inglesa publicada por*

**Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.**

Copyright © by Blaisdell Publishing Company

*Edição em português:*

© Editorial Reverté, S. A., 1988

ISBN: 978-84-291-5016-2 Tomo 2

ISBN: 978-84-291-5014-8 Obra completa

*Edição em português (PDF):*

© Editorial Reverté, S. A., 2022

ISBN: 978-84-291-9671-9

*Tradução de:*

**Joaquim Ferreira Marques**

Doutor em Ciências Exatas

**Propiedad de:**

**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

[reverte@reverte.com](mailto:reverte@reverte.com)

[www.reverte.com](http://www.reverte.com)

Proibida a reprodução de toda ou parte desta obra, sob qualquer forma, sem autorização por escrito do editor.

*a*

*Jane e Stephen*



# PREFÁCIO

---

Este livro é a continuação do livro do autor *Cálculo, volume I, Segunda Edição*. O presente volume foi escrito com a mesma ideia fundamental que norteou o primeiro. Uma adequada orientação para a técnica ligada a um rigoroso e profundo desenvolvimento teórico. Procurou-se fazer chegar ao estudante o espírito da matemática moderna sem exagerar o formalismo. Como no Volume I, incluem-se notas históricas para dar ao estudante uma ideia da evolução do pensamento matemático.

O segundo volume está dividido em três partes, intituladas *Análise Linear, Análise não Linear e Tópicos Especiais*. Os dois últimos capítulos do Volume I repetem-se aqui, constituindo os dois primeiros capítulos deste Volume, com a finalidade de que todo o material relativo à Álgebra Linear se apresenta de forma completa em cada um dos volumes.

A Parte 1 contém uma introdução à álgebra linear, incluindo transformações lineares, matrizes, determinantes, valores próprios e formas quadráticas. Fazem-se algumas aplicações à Análise, em particular ao estudo das equações diferenciais lineares. Com a ajuda do cálculo matricial estudam-se os sistemas de equações diferenciais. Demonstram-se teoremas de existência e unicidade por intermédio do método de Picard das aproximações sucessivas, que também se trata na teoria dos operadores de contracção.

Na Parte 2 estuda-se o cálculo para funções de várias variáveis. O cálculo diferencial é unificado e simplificado com auxílio da álgebra linear. Incluem-se a generalização da regra de derivação de uma função composta para campos vectoriais e escalares e aplicações às equações de derivadas parciais e a problemas de extremos. O cálculo integral inclui os integrais de linha, integrais múltiplos, e integrais de superfície, com aplicações à Análise vectorial. Aqui a exposição segue mais ou menos a linha clássica e não inclui um desenvolvimento formal das formas diferenciais.

Os tópicos especiais tratados na Parte 3 são *Probabilidades e Análise Numérica*. A parte referente às Probabilidades está dividida em dois capítulos, um que trata o

assunto considerando o conjunto fundamental (ou espaço amostra) finito ou infinito numerável; o outro em que se consideram conjuntos fundamentais não numeráveis, variáveis aleatórias e funções de repartição. Fazem-se algumas aplicações no estudo de variáveis aleatórias uni e bidimensionais.

O último capítulo contém uma introdução à Análise Numérica, dando-se particular ênfase ao estudo de diferentes tipos de aproximação polinomial. Aqui, mais uma vez se procura a unificação das ideias pela notação e terminologia da álgebra linear. O livro termina com o estudo de fórmulas de integração aproximada, tais como a regra de Simpson, e com uma discussão da fórmula de somação de Euler.

Contém este volume matéria suficiente para um curso anual com três ou quatro tempos semanais. Pressupõe a conhecimento do cálculo para funções de uma variável tal como se estuda na maior parte dos primeiros anos dos cursos de cálculo. O autor idealizou a matéria exposta para um curso com quatro aulas semanais, duas de exposição por parte do professor e duas para questões postas aos alunos, desenvolvido ao longo de dez semanas para cada parte e omitindo as secções assinaladas com um asterisco.

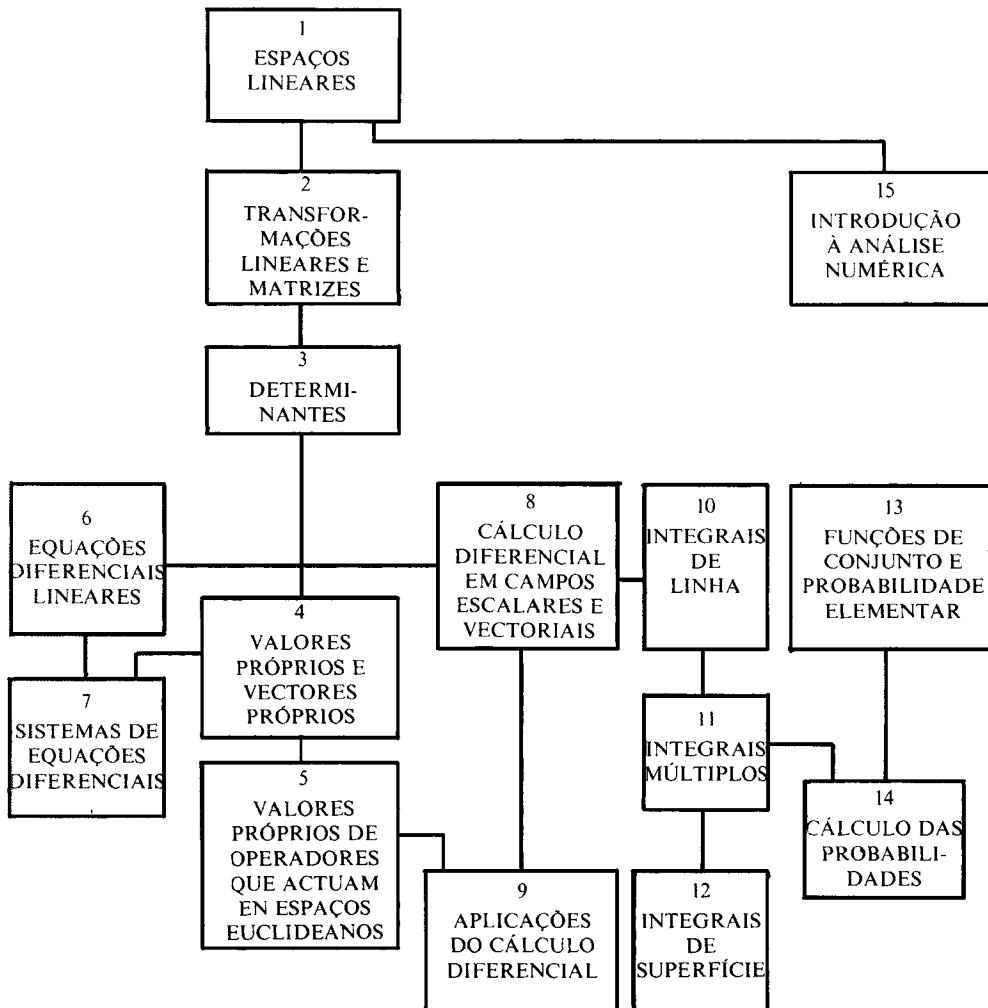
Este segundo volume foi planeado de maneira a poderem omitir-se vários capítulos em cursos abreviados. Por exemplo, o último capítulo de cada uma das partes pode ser omitido, sem que tal origine descontinuidade na exposição. A Parte I proporciona material para um curso combinado de álgebra linear e equações diferenciais ordinárias. Cada professor pode escolher os tópicos adequados às suas necessidades e preferências por consulta do diagrama da página seguinte que coincide a interdependência lógica dos capítulos.

Mais uma vez agradeço com prazer a colaboração de muitos amigos e colegas. Ao preparar a segunda edição recebi valiosa ajuda dos Professores Herbert S. Zuckerman da Universidade de Washington e Basil Gordon da Universidade da Califórnia, Los Angeles, tendo cada um deles sugerido várias modificações. Agradecimento são também devidos ao pessoal da Blaisdell Publishing Company pela sua assistência e cooperação.

Como noutras ocasiões, é para mim uma satisfação especial exprimir a minha gratidão a minha esposa pela sua valiosa e variada colaboração. Em sinal de reconhecimento dedico-lhe gostosamente este livro.

T. M. A.

*Pasadena, Califórnia*





# ÍNDICE ANALÍTICO

## PARTE 1. ANÁLISE LINEAR

### 1. ESPAÇOS LINEARES

1.1.	Introdução	3
1.2.	Definição de espaço linear	3
1.3.	Exemplos de espaços lineares	5
1.4.	Consequências elementares dos axiomas	6
1.5.	Exercícios	8
1.6.	Subespaços de um espaço linear	9
1.7.	Conjuntos dependentes e independentes num espaço linear	10
1.8.	Bases e dimensão	13
1.9.	Componentes	15
1.10.	Exercícios	15
1.11.	Produto interno, espaços euclidianos. Normas	16
1.12.	Ortogonalidade num espaço euclidiano	20
1.13.	Exercícios	23
1.14.	Construção de conjuntos ortogonais. O método de Gram-Schmidt	25
1.15.	Complementos ortogonais. Projeções	30
1.16.	A melhor aproximação de elementos de um espaço euclidiano por elementos de um subespaço de dimensão finita	32
1.17.	Exercícios	34

### 2. TRANSFORMAÇÕES LINEARES E MATRIZES

2.1.	Transformações lineares	35
2.2.	Espaço nulo e contradomínio	37
2.3.	Nulidade e ordem	38

2.4.	Exercícios	39
2.5.	Operações elgébricas relativas a transformações lineares	41
2.6.	Inversas	43
2.7.	Transformações lineares biunívocas	46
2.8.	Exercícios	48
2.9.	Transformações lineares com valores determinados	50
2.10.	Representação matricial das transformações lineares	51
2.11.	Construção de uma representação matricial na forma diagonal	54
2.12.	Exercícios	56
2.13.	Espaços lineares de matrizes	58
2.14.	Isomorfismo entre transformações lineares de matrizes	59
2.15.	Multipliação de matrizes	61
2.16.	Exercícios	64
2.17.	Sistemas de equações lineares	66
2.18.	Técnicas de cálculo	68
2.19.	Inversas de matrizes quadradas	73
2.20.	Exercícios	76
2.21.	Exercícios variados sobre matrizes	77

### 3. DETERMINANTES

3.1.	Introdução	79
3.2.	Justificação da escolha dos axiomas para a função determinante	80
3.3.	Um conjunto de axiomas para a função determinante	82
3.4.	Cálculo de determinantes	84
3.5.	O teorema de unicidade	88
3.6.	Exercícios	89
3.7.	Produto de determinantes	91
3.8.	Determinante da matriz inversa de uma matriz não singular	92
3.9.	Determinantes e independência de vectores	93
3.10.	Determinante de uma matriz diagonal por blocos	93
3.11.	Exercícios	95
3.12.	Fórmulas para o desenvolvimento de determinantes. Menores e complementos algébricos	96
3.13.	Existência da função determinante	100
3.14.	O determinante da matriz transposta	102
3.15.	A matriz complementos algébricos	103
3.16.	Regra de Cramer	105
3.17.	Exercícios	106

### 4. VALORES PRÓPRIOS E VECTORES PRÓPRIOS

4.1.	Transformações lineares representadas por matrizes diagonais	109
4.2.	Valores próprios e vectores próprios de uma transformação linear	110
4.3.	Independência linear de vectores próprios correspondentes a valores próprios distintos	113
4.4.	Exercícios	113
4.5.	O caso de dimensão finita. Polinómios característicos	116

- 4.6. Cálculo de valores próprios e vectores próprios no caso de dimensão finita 117
- 4.7. Traço de uma matriz 120
- 4.8. Exercícios 121
- 4.9. Matrizes representando a mesma transformação linear.  
Matrizes semelhantes 123
- 4.10. Exercícios 127

## 5. VALORES PRÓPRIOS DE OPERADORES EM ESPAÇOS EUCLIDIANOS

- 5.1. Valores próprios e productos internos 129
- 5.2. Transformações hermíticas e hemi-hermíticas 130
- 5.3. Valores próprios e vectores próprios de operadores hermíticos e hemi-hermíticos 132
- 5.4. Ortogonalidade de vectores próprios correspondentes a valores próprios distintos 133
- 5.5. Exercícios 134
- 5.6. Existência de um conjunto ortonormal de vectores próprios para operadores hermíticos e hemi-hermíticos em espaços de dimensão finita 135
- 5.7. Representação matricial de operadores hermíticos e hemi-hermíticos 137
- 5.8. Matrizes hermíticas e hemi-hermíticas. A associada de uma matriz 138
- 5.9. Diagonalização de uma matriz hermítica ou hemi-hermítica 138
- 5.10. Matrizes unitárias. Matrizes ortogonais 139
- 5.11. Exercícios 140
- 5.12. Formas quadráticas 143
- 5.13. Redução de uma forma quadrática real à forma diagonal 145
- 5.14. Aplicações à geometria analítica 147
- 5.15. Exercícios 151
- \*5.16. Valores próprios de uma transformação simétrica obtidos como valores de sua forma quadrática 152
- \*5.17. Propriedades extremais dos valores próprios de uma transformação simétrica 154
- \*5.18. O caso de dimensão finita 155
- 5.19. Transformações unitárias 155
- 5.20. Exercícios 158

## 6. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

- 6.1. Introdução histórica 161
- 6.2. Revisão dos resultados já estabelecidos relativos às equações diferenciais lineares de primeira e de segunda ordem 162
- 6.3. Exercícios 164
- 6.4. Equações diferenciais lineares de ordem  $n$  165
- 6.5. O teorema de existência e unicidade 166
- 6.6. A dimensão do espaço solução de uma equação linear homogénea 167

6.7.	A álgebra de operadores de coeficientes constantes	168
6.8.	Determinação de uma base de soluções para equações lineares com coeficientes constantes por factorização de operadores	170
6.9.	Exercícios	175
6.10.	Relação entre as equações homogéneas e não homogéneas	177
6.11.	Determinação de uma solução particular da equação não homogénea. O método de variação das constantes	178
6.12.	Não singularidade da matriz wronskiana de $n$ soluções independentes de uma equação linear homogénea	182
6.13.	Métodos especiais para determinação de soluções particulares de equações não homogéneas. Redução a um sistema de equações lineares de primeira ordem	184
6.14.	O método do anulador para determinação de uma solução particular da equação não homogénea	185
6.15.	Exercícios	188
6.16.	Exercícios variados sobre equações diferenciais lineares	189
6.17.	Equações lineares de segunda ordem com coeficientes analíticos	191
6.18.	A equação de Legendre	194
6.19.	Os polinómios de Legendre	197
6.20.	Fórmula de Rodrigues para os polinómios de Legendre	199
6.21.	Exercícios	200
6.22.	O método de Frobenius	204
6.23.	A equação de Bessel	206
6.24.	Exercícios	212

## 7. SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

7.1.	Introdução	215
7.2.	Conceitos do cálculo para funções matriciais	218
7.3.	Séries de matrizes. Normas de matrizes	218
7.4.	Exercícios	220
7.5.	A matriz exponencial	221
7.6.	A equação diferencial verificada por $e^{tA}$	222
7.7.	Teorema da unicidade para a equação diferencial matricial $F'(t) = AF(t)$	223
7.8.	Regra do producto de exponenciais de matrizes	224
7.9.	Teoremas de existência e unicidade para sistemas lineares homogéneos	225
7.10.	O problema do cálculo de $e^{tA}$	226
7.11.	O teorema de Cayley-Hamilton	228
7.12.	Exercícios	230
7.13.	Método de Putzer para o cálculo de $e^{tA}$	231
7.14.	Outros métodos para calcular $e^{tA}$ em casos particulares	235
7.15.	Exercícios	238
7.16.	Sistemas lineares não homogéneos com coeficientes constantes	239
7.17.	Exercícios	241
7.18.	O sistema linear geral $Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t)$	244
7.19.	Resolução de sistemas lineares homogéneos por intermédio de séries de potências	248
7.20.	Exercícios	249

- 7.21. Demostração do teorema de existência pelo método das aproximações sucessivas 258
- 7.22. O método das aproximações sucessivas aplicado a sistemas não lineares de primeira ordem 255
- 7.23. Demostração de um teorema de existência e unicidade para sistemas não lineares de primeira ordem 257
- 7.24. Exercícios 259
- \*7.25. Aproximações sucessivas e pontos fixos de operadores 261
- \*7.26. Espaços lineares normados 262
- \*7.27. Operadores de contracção 263
- 7.28. Teorema do ponto fixo para operadores de contracção 264
- \*7.29. Aplicações do teorema do ponto fixo 266

## PARTE 2. ANÁLISE NÃO LINEAR

### 8. CÁLCULO DIFERENCIAL EM CAMPOS ESCALARES E VECTORIAIS

- 8.1. Funções de  $R^n$  em  $R^m$ . Campos vectoriais e escalares 273
- 8.2. Bolas abertas e conjuntos abertos 274
- 8.3. Exercícios 276
- 8.4. Limites e continuidade 278
- 8.5. Exercícios 282
- 8.6. A derivada de um campo escalar relativamente a um vector 283
- 8.7. Derivadas direccionalis e derivadas parciais 286
- 8.8. Derivadas parciais de ordem superior 287
- 8.9. Exercícios 287
- 8.10. Derivadas direccionalis e continuidade 288
- 8.11. A diferencial 290
- 8.12. Gradiente de um campo escalar 291
- 8.13. Uma condição suficiente de diferenciabilidade 293
- 8.14. Exercícios 295
- 8.15. Generalização do regra de derivação de funções compostas para derivadas de campos escalares 296
- 8.16. Aplicações geométricas. Conjuntos de nível. Planos tangentes 298
- 8.17. Exercícios 301
- 8.18. Derivadas de campos vectoriais 303
- 8.19. A diferenciabilidade implica a continuidade 304
- 8.20. Generalização da regra de derivação da função composta para derivadas de campos vectoriais 305
- 8.21. Forma matricial da regra de derivação para a composição 306
- 8.22. Exercícios 309
- \*8.23. Condições suficientes para a igualdade das derivadas parciais mistas 311
- 8.24. Exercícios variados 315

### 9. APlicações do CÁLCULO DIFERENCIAL

- 9.1. Equações de derivadas parciais 319

9.2.	Uma equação de derivadas parciais de primeira ordem com coeficientes constantes	320
9.3.	Exercícios	322
9.4.	A equação unidimensional das ondas	324
9.5.	Exercícios	329
9.6.	Derivadas de funções implícitas	331
9.7.	Exemplos resolvidos	335
9.8.	Exercícios	340
9.9.	Máximos, mínimos e pontos sela	341
9.10.	Fórmula de Taylor de segunda ordem para campos escalares	346
9.11.	A natureza do ponto de estacionaridade determinada pelos valores próprios da matriz Hessiana	348
9.12.	Critério das derivadas de segunda ordem para extremos de funções de duas variáveis	351
9.13.	Exercícios	351
9.14.	Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange	353
9.15.	Exercícios	357
9.16.	Teorema do valor extremo para campos escalares continuos	358
9.17.	O teorema da continuidade uniforme para campos escalares contínuos	361

## 10. INTEGRAIS DE LINHA

10.1.	Introdução	363
10.2.	Integrais de linha e linhas de integração	363
10.3.	Outras notações para os integrais de linha	364
10.4.	Propriedades fundamentais dos integrais de linha	366
10.5.	Exercícios	368
10.6.	O conceito de trabalho como um integral de linha	369
10.7.	Integrais de linha relativos ao comprimento de arco	370
10.8.	Outras aplicações dos integrais de linha	371
10.9.	Exercícios	372
10.10.	Conjuntos conexos abertos. Independência da linha	374
10.11.	O segundo teorema fundamental do cálculo para as integrais de linha	374
10.12.	Aplicações à mecânica	376
10.13.	Exercícios	378
10.14.	O primeiro teorema fundamental do cálculo para integrais de linha	379
10.15.	Condições necessárias e suficientes para que um campo de vectores seja um gradiente	381
10.16.	Condições necessárias para que um campo vectorial seja um gradiente	382
10.17.	Métodos especiais de construção de funções potenciais	384
10.18.	Exercícios	387
10.19.	Aplicações às equações diferenciais exactas de primeira ordem	389
10.20.	Exercícios	392
10.21.	Funções potenciais em conjuntos convexos	393

## 11. INTEGRAIS MÚLTIPLOS

11.1.	Introdução	397
-------	------------	-----

11.2.	Partições de retângulos. Funções em escada	398
11.3.	O integral duplo de uma função em escada	399
11.4.	A definição de integral duplo de uma função definida e limitada num retângulo	401
11.5.	Integrais duplos superior e inferior	402
11.6.	Cálculo de um integral duplo por integração unidimensional repetida	403
11.7.	Interpretação geométrica do integral duplo como um volume	404
11.8.	Exemplos resolvidos	405
11.9.	Exercícios	407
11.10.	Integrabilidade de funções continuas	408
11.11.	Integrabilidade de funções limitadas com descontinuidades	409
11.12.	Integrais duplos estendidos a regiões mais gerais	410
11.13.	Aplicações a áreas e volumes	414
11.14.	Exemplos resolvidos	415
11.15.	Exercícios	417
11.16.	Outras aplicações dos integrais duplos	419
11.17.	Dois teoremas de Pappus	422
11.18.	Exercícios	424
11.19.	Teorema de Green no plano	425
11.20.	Algumas aplicações do teorema de Green	429
11.21.	Uma condição necessária e suficiente para que um campo vectorial bidimensional seja um gradiente	430
11.22.	Exercícios	433
*11.23.	Teorema de Green para regiões multiplamente conexas	435
*11.24.	O número de giros	437
*11.25.	Exercícios	439
11.26.	Mudança de variáveis num integral duplo	441
11.27.	Casos particulares da fórmula de mudança de variáveis	445
11.28.	Exercícios	449
11.29.	Demonstração da fórmula de mudança de variáveis num caso particular	450
11.30.	Demonstração da fórmula de mudança de variáveis no caso geral	453
11.31.	Extensões a um número superior de dimensões	455
11.32.	Mudança de variáveis num integral $n$ -múltiplo	457
11.33.	Exemplos resolvidos	459
11.34.	Exercícios	463

## 12. INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

12.1.	Representação paramétrica de uma superfície	467
12.2.	O producto vectorial fundamental	471
12.3.	O producto vectorial fundamental definido uma normal à superfície	474
12.4.	Exercícios	475
12.5.	Área de uma superfície na representação paramétrica	475
12.6.	Exercícios	481
12.7.	Integrais de superfície	481
12.8.	Mudança de representação paramétrica	484
12.9.	Outras notações para os integrais de superfície	486

12.10.	Exercícios	489
12.11.	O teorema de Stokes	490
12.12.	O rotacional e a divergência de um campo vectorial	493
12.13.	Exercícios	495
12.14.	Outras propriedades do rotacional e da divergência	496
12.15.	Exercícios	500
*12.16.	Reconstrução de um campo vectorial a partir do seu rotacional	502
*12.17.	Exercícios	506
12.18.	Extensões do teorema de Stokes	507
12.19.	O teorema da divergência (teorema de Gauss)	511
12.20.	Aplicações do teorema da divergência	515
12.21.	Exercícios	517

### PARTE 3. TEMAS ESPECIAIS

#### 13. FUNÇÕES DE CONJUNTO E PROBABILIDADE ELEMENTAR

13.1.	Introdução histórica	525
13.2.	Funções de conjunto completamente aditivas	526
13.3.	Medidas finitamente aditivas	528
13.4.	Exercícios	529
13.5.	A definição de probabilidade para conjuntos fundamentais finitos	530
13.6.	Terminologia peculiar da teoria das probabilidades	533
13.7.	Exercícios	534
13.8.	Exemplos resolvidos	535
13.9.	Exercícios	537
13.10.	Alguns princípios básicos de análise combinatória	539
13.11.	Exercícios	544
13.12.	Probabilidade condicionada	545
13.13.	Independência aleatória	547
13.14.	Exercícios	549
13.15.	Experiências compostas	551
13.16.	Esquema de Bernoulli	555
13.17.	O número mais favorável de ocorrências do acontecimento favorável em $n$ experiências dum esquema de Bernoulli	557
13.18.	Exercícios	560
13.19.	Conjuntos numeráveis e não numeráveis	562
13.20.	Exercícios	566
13.21.	Definição de probabilidade para conjuntos fundamentais infinitos numeráveis	567
13.22.	Exercícios	569
13.23.	Exercícios variados sobre probabilidades	569

#### 14. CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

14.1.	A definição de probabilidade para conjuntos fundamentais não numeráveis	573
14.2.	Numerabilidade de conjuntos de pontos com probabilidade positiva	574

- 14.3. Variáveis aleatórias 575  
 14.4. Exercícios 577  
 14.5. Funções de repartição 578  
 14.6. Discontinuidades das funções de repartição 582  
 14.7. Distribuições discretas. Funções de massa probabilística 585  
 14.8. Exercícios 588  
 14.9. Distribuições continuas. Funções densidade 591  
 14.10. Distribuição uniforme num intervalo 592  
 14.11. Distribuição de Cauchy 597  
 14.12. Exercícios 598  
 14.13. Distribuições exponenciais 599  
 14.14. Distribuições normais 602  
 14.15. Indicações referentes a distribuições mais gerais 606  
 14.16. Exercícios 607  
 14.17. Distribuições de funções de variáveis aleatórias 608  
 14.18. Exercícios 609  
 14.19. Distribuição de variáveis aleatórias bidimensionais 610  
 14.20. Distribuições discretas bidimensionais 613  
 14.21. Distribuições bidimensionais continuas. Funções densidade 614  
 14.22. Exercícios 616  
 14.23. Distribuição de funções de duas variáveis aleatórias 618  
 14.24. Exercícios 622  
 14.25. Esperança matemática e variância 625  
 14.26. Esperança matemática de uma função de uma variável aleatória 629  
 14.27. Exercícios 630  
 14.28. Desigualdade de Tchebycheff 632  
 14.29. Leis dos grandes números 634  
 14.30. Teorema limite central do cálculo das probabilidades 637  
 14.31. Exercícios 639
- Bibliografia 641

## 15. INTRODUÇÃO À ANÁLISE NUMÉRICA

- 15.1. Introdução histórica 643  
 15.2. Aproximação polinomial 644  
 15.3. Aproximação polinomial e espaços lineares normados 646  
 15.4. Problemas fundamentais da aproximação polinomial 648  
 15.5. Exercícios 650  
 15.6. Polinómios interpoladores 652  
 15.7. Pontos de interpolação igualmente separados 655  
 15.8. Análise do erro na interpolação polinomial 656  
 15.9. Exercícios 659  
 15.10. Fórmula de interpolação de Newton 662  
 15.11. Pontos de interpolação igualmente espaçados.  
     O operador das diferenças sucessivas 664  
 15.12. Polinómios factoriais 666  
 15.13. Exercícios 667  
 15.14. Um problema de número relativo à norma maximal 669

15.15.	Polinómios de Tchebycheff	670
15.16.	Uma propriedade de mínimo dos polinómios de Tchebycheff	672
15.17.	Aplicação á formula de erro na interpolação	674
15.18.	Exercícios	675
15.19.	Integração aproximada. A regra trapezoidal	677
15.20.	Regra de Simpson	680
15.21.	Exercícios	685
15.22.	A fórmula de somação de Euler	688
15.23.	Exercícios	694
Bibliografia		697
Soluções dos exercícios		699
Índice alfabético		745

*Cálculo*



# PARTE 1

## ANÁLISE LINEAR



# 1

## ESPAÇOS LINEARES

### 1.1. Introdução

No desenvolvimento da Matemática encontramos muitos exemplos de objectos matemáticos que podem ser adicionados uns aos outros e multiplicados por números reais. O primeiro exemplo de tais objectos são os próprios números reais. Outros exemplos são as funções reais, os números complexos, as séries infinitas, os vectores num espaço  $n$  dimensional e as funções vectoriais. Neste capítulo vamos analisar um conceito matemático geral, chamado *espaço linear*, que inclui todos estes exemplos e muitos outros como casos particulares.

Em resumo, um espaço linear é um conjunto de elementos de natureza qualquer no qual se efectuam certas operações (chamadas *adição* e *multiplicação por números*). Ao definir-se um espaço linear, *não é necessário especificar* a natureza dos elementos nem dizer como se realizam entre eles as operações acabadas de referir. Em vez disso, exige-se que as operações gozem de certas propriedades que se tomam como axiomas do espaço linear. Vamos precisamente, em seguida, fazer uma descrição pormenorizada desses axiomas.

### 1.2. Definição de espaço linear

Seja  $V$  um conjunto não vazio de objectos, chamados *elementos*. O conjunto  $V$  chama-se um espaço linear se satisfaz aos dez axiomas que a seguir se enunciam, divididos em três grupos.

*Axiomas de fecho.*

**AXIOMA 1. FECHO A RESPEITO DA ADIÇÃO.** *A todo o par de elementos  $x$  e  $y$  de  $V$  corresponde um único elemento de  $V$ , chamado soma de  $x$  e  $y$  e representado por  $x + y$ .*

**AXIOMA 2. FECHO A RESPEITO DA MULTIPLICAÇÃO POR NÚMEROS REAIS.** *A todo o  $x$  de  $V$  e todo o número real  $a$  corresponde um elemento de  $V$ , chamado o produto de  $a$  por  $x$  e representado por  $ax$ .*

*Axiomas para a adição.*

**AXIOMA 3. PROPRIEDADE COMUTATIVA.** *Para todo o  $x$  e  $y$  de  $V$ , tem-se  $x + y = y + x$ .*

**AXIOMA 4. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA.** *Para todo o  $x$ ,  $y$  e  $z$  de  $V$ , tem-se  $x + (y + z) = (x + y) + z$ .*

**AXIOMA 5. EXISTÊNCIA DE ELEMENTO ZERO.** *Existe um elemento em  $V$ , representado pelo símbolo  $O$ , tal que*

$$x + O = x \quad \text{para todo o } x \text{ de } V.$$

**AXIOMA 6. EXISTÊNCIA DE SIMÉTRICOS.** *Para todo o  $x$  de  $V$ , o elemento  $(-1)x$  tem a propriedade*

$$x + (-1)x = O.$$

*Axiomas para a multiplicação por números reais.*

**AXIOMA 7. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA.** *Para todo o  $x$  de  $V$ , e todo o par de números reais  $a$  e  $b$ , tem-se*

$$a(bx) = (ab)x.$$

**AXIOMA 8. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA PARA A ADIÇÃO EM  $V$ .** *Para todo o par  $x$  e  $y$  de  $V$  e todo o real  $a$ , tem-se*

$$a(x + y) = ax + ay.$$

**AXIOMA 9. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA PARA A ADIÇÃO DE NÚMEROS.** *Para todo o  $x$  em  $V$  e todo o par de reais  $a$  e  $b$  tem-se*

$$(a + b)x = ax + bx.$$

**AXIOMA 10. EXISTÊNCIA DE ELEMENTO IDENTIDADE.** *Para todo  $x$  em  $V$ , tem-se  $1x = x$ .*

Os espaços lineares, como foram definidos atrás, são muitas vezes chamados espaços lineares *reais*, para fazer ressaltar o facto de que se multiplicam elementos de  $V$  por números reais. Se nos Axiomas 2, 7, 8 e 9 substituirmos *número real* por *número*

*complexo*, a estrutura resultante chama-se um *espaço linear complexo*. Por vezes um espaço linear chama-se também *espaço vectorial linear*, ou mais simplesmente *espaço vectorial*; os números usados como multiplicadores chiamam-se *escalares*. Um espaço linear real admite os números reais como escalares, um espaço linear complexo admite os números complexos como escalares. Embora se considerem aqui fundamentalmente exemplos de espaços vectoriais lineares reais, todos os teoremas são verdadeiros igualmente para os espaços vectoriais complexos. Quando fazemos uso da expressão espaço linear, sem qualquer designação suplementar, deve subentender-se que o espaço pode ser real ou complexo.

### 1.3. Exemplos de espaços lineares

Se especificamos qual o conjunto  $V$  e dizemos como somar os seus elementos e como multiplicá-los por números, obtemos um exemplo concreto de um espaço linear. O leitor pode facilmente verificar que cada um dos seguintes exemplos satisfaz a todos os axiomas para um espaço linear real.

**EXEMPLO 1.** Seja  $V = \mathbf{R}$  o conjunto dos números reais, e sejam  $x + y$  e  $ax$  a adição e multiplicação usuais de números reais.

**EXEMPLO 2.** Seja  $V = \mathbf{C}$  o conjunto dos números complexos, e seja  $x + y$  a adição ordinária de números complexos e  $ax$  a multiplicação de números complexos  $x$  pelo número real  $a$ . Embora os elementos de  $V$  sejam números complexos, este é um espaço linear real porque os escalares são reais.

**EXEMPLO 3.** Seja  $V = V_n$  o espaço vectorial dos sistemas de  $n$  números reais, com a adição e a multiplicação por escalares definida da maneira usual em função das componentes.

**EXEMPLO 4.** Seja  $V$  o conjunto de todos os vectores em  $V_n$  ortogonais a um dado vector não nulo  $N$ . Se  $n = 2$ , este espaço linear é uma recta que passa por  $O$ , admitindo  $N$  como vector normal. Se  $n = 3$ , é um plano que passa por  $O$  com  $N$  como vector normal.

Os exemplos que se seguem dizem-se *espaços funcionais*. Os elementos de  $V$  são funções reais, com a adição de duas funções  $f$  e  $g$  definidas na forma usual:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

para todo o real  $x$  pertencente à intersecção dos domínios de  $f$  e  $g$ . A multiplicação de uma função  $f$  por um escalar real  $a$  define-se do modo seguinte:  $af$  é a função cujo valor para cada  $x$  no domínio de  $f$  é  $af(x)$ . O elemento zero é a função cujos valores são sempre zero. O leitor verificará com facilidade que cada um dos conjuntos seguintes é um espaço funcional.

**EXEMPLO 5.** O conjunto de todas as funções definidas num dado intervalo.

**EXEMPLO 6.** O conjunto de todos os polinómios.

**EXEMPLO 7.** O conjunto de todos os polinómios de grau  $\leq n$ , com  $n$  fixo. (Sempre que se considera este conjunto subentende-se que o polinómio zero está também incluído). O conjunto de todos os polinómios de grau *igual a*  $n$  não é um espaço linear porque os axiomas de fecho não são satisfeitos. Por exemplo, a soma de dois polinómios de grau  $n$  não terá necessariamente grau  $n$ .

**EXEMPLO 8.** O conjunto de todas as funções contínuas num dado intervalo. Se o intervalo é  $[a, b]$  representamos este espaço linear por  $C(a, b)$ .

**EXEMPLO 9.** O conjunto de todas as funções deriváveis num dado ponto.

**EXEMPLO 10.** O conjunto de todas as funções integráveis num dado intervalo.

**EXEMPLO 11.** O conjunto de todas as funções  $f$  definidas no ponto 1, com  $f(1) = 0$ . O número 0 é fundamental neste exemplo. Se substituirmos 0 por um número  $c$  não nulo, violamos os axiomas de fecho.

**EXEMPLO 12.** O conjunto de todas as soluções de uma equação diferencial linear homogénea  $y'' + ay' + by = 0$ , com  $a$  e  $b$  constantes. Aqui mais uma vez o 0 é essencial. O conjunto de soluções de uma equação diferencial não homogénea não satisfaz aos axiomas de fecho.

Estes exemplos e muitos outros mostram bem quanto o conceito de espaço linear está estendido à Álgebra, Geometria e Análise. Quando se deduz um teorema a partir dos axiomas de um espaço linear, obtemos, de uma vez, um resultado válido para cada exemplo concreto. Unificando diferentes exemplos desta maneira ganhamos um conhecimento mais aprofundado de cada um. Algumas vezes o conhecimento de um exemplo particular ajuda-nos a antecipar ou interpretar resultados válidos para outros exemplos e põe em evidência relações que de outro modo poderiam passar despercebidas.

#### 1.4. Consequências elementares dos axiomas

Os teoremas que se seguem deduzem-se facilmente dos axiomas para um espaço linear.

**TEOREMA 1.1. UNICIDADE DO ELEMENTO ZERO.** *Em qualquer espaço linear existe um e um só elemento zero.*

*Demonstração.* O axioma 5 diz-nos que existe pelo menos um elemento zero. Suponhamos que existiam dois, por exemplo  $O_1$  e  $O_2$ . Tomando  $x = O_1$  e  $O = O_2$  no Axioma

5, obtemos  $O_1 + O_2 = O_1$ . Analogamente, tomando  $x = O_2$  e  $O = O_1$ , encontramos  $O_2 + O_1 = O_2$ . Mas  $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$ , devido à propriedade comutativa, pelo que  $O_1 = O_2$ .

**TEOREMA 1.2. UNICIDADE DOS ELEMENTOS SIMÉTRICOS.** *Em qualquer espaço linear todo o elemento admite unicamente um simétrico, isto é, para todo o  $x$  existe um e um só  $y$  tal que  $x + y = O$ .*

*Demonstração.* O Axioma 6 diz-nos que cada  $x$  admite pelo menos um simétrico, a saber  $(-1)x$ . Admitamos agora que  $x$  tinha dois simétricos,  $y_1$  e  $y_2$ . Então  $x + y_1 = O$  e  $x + y_2 = O$ . Somando  $y_2$  a ambos os membros da primeira igualdade e utilizando os Axiomas 5, 4 e 3, encontramos

$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2,$$

e

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1.$$

Portanto  $y_1 = y_2$ , pelo que  $x$  tem precisamente um simétrico, o elemento  $(-1)x$ .

*Notação.* O simétrico de  $x$  representa-se por  $-x$ . A diferença  $y - x$  é definida pela soma  $y + (-x)$ .

O teorema seguinte refere um certo número de propriedades que regem os cálculos algébricos elementares num espaço linear.

**TEOREMA 1.3.** *Num dado espaço linear, sejam  $x$  e  $y$  elementos arbitrários e  $a$  e  $b$  escalares arbitrários. Então verificam-se as seguintes propriedades:*

- (a)  $0x = O$ .
- (b)  $aO = O$ .
- (c)  $(-a)x = -(ax) = a(-x)$ .
- (d) Se  $ax = O$ , então ou  $a = 0$  ou  $x = O$ .
- (e) Se  $ax = ay$  e  $a \neq 0$ , então  $x = y$ .
- (f) Se  $ax = bx$  e  $x \neq O$ , então  $a = b$ .
- (g)  $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$ .
- (h)  $x + x = 2x$ ,  $x + x + x = 3x$ , e em geral  $\sum_{i=1}^n x = nx$ .

Vamos demonstrar (a), (b) e (c), deixando as demonstrações das restantes ao cuidado do leitor.

*Demonstração de (a).* Seja  $z = 0x$ . Desejamos provar que  $z = O$ . Somando  $z$  a si próprio e aplicando o Axioma 9, verificamos que

$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$

Adiconamos agora  $-z$  a ambos os membros e obtemos  $z = O$ .

*Demonstração de (b).* Seja  $z = aO$ , adicionemos  $z$  a si próprio e utilizemos o Axioma 8.

*Demonstração de (c).*  $z = (-a)x$ . Adicionando  $z$  a  $ax$  e utilizando o Axioma 9, verificamos que

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O,$$

pelo que  $z$  é o simétrico de  $ax$ ,  $z = -(ax)$ . Analogamente, se adicionamos  $a(-x)$  a  $ax$  e utilizamos o Axioma 8 e a propriedade (b), encontramos que  $a(-x) = -(ax)$ .

## 1.5. Exercícios

Nos Exercícios 1 a 28, determinar se cada um dos conjuntos dados é um espaço linear real, com a adição e a multiplicação por escalares reais definidas da forma usual. Para os Exercícios em que assim não seja, dizer quais são os axiomas que não se verificam. As funções nos Exercícios 1 a 17 são reais. Nos Exercícios 3, 4 e 5 cada função tem um domínio contendo 0 e 1. Nos Exercícios 7 a 12, o domínio é o conjunto de todos os números reais.

1. Todas as funções racionais.
2. Todas as funções racionais  $f/g$ , com o grau de  $f \leq$  que o grau de  $g$  (incluindo  $f = 0$ ).
3. Todas as funções  $f$  com  $f(0) = f(1)$ .
4. Todas as funções  $f$  com  $2f(0) = f'(1)$ .
5. Todas as funções  $f$  com  $f(1) = 1 + f(0)$ .
6. Todas as funções em escada definidas em escada  $[0, 1]$ .
7. Todas as funções com  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow +\infty$ .
8. Todas as funções pares.
9. Todas as funções ímpares.
10. Todas as funções limitadas.
11. Todas as funções crescentes.
12. Todas as funções periódicas de período  $2\pi$ .
13. Todas as funções  $f$  integráveis em  $[0, 1]$ , com  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .
14. Todas as funções  $f$  integráveis em  $[0, 1]$ , com  $\int_0^1 f(x)dx \geq 0$ .
15. Todas as funções verificando  $f(x) = f(1 - x)$  para todo o  $x$ .
16. Todos os polinómios de Taylor de grau  $\leq n$  para um  $n$  dado (incluindo o polinómio zero).
17. Todas as soluções da equação diferencial linear homogénea de segunda ordem  $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ , com  $P$  e  $Q$  funções dadas e contínuas para todo o  $x$ .
18. Todas as sucessões reais limitadas.
19. Todas as sucessões reais convergentes.
20. Todas as séries reais convergentes.
21. Todas as séries reais absolutamente convergentes.
22. Todos os vectores  $(x, y, z)$  de  $V_3$  com  $z = 0$ .
23. Todos os vectores  $(x, y, z)$  de  $V_3$  com  $x = 0$  ou  $y = 0$ .
24. Todos os vectores  $(x, y, z)$  de  $V_3$  com  $y = 5x$ .
25. Todos os vectores  $(x, y, z)$  de  $V_3$  com  $3x + 4y = 1$ ,  $z = 0$ .
26. Todos os vectores  $(x, y, z)$  de  $V_3$  que são múltiplos escalares de  $(1, 2, 3)$ .
27. Todos os vectores  $(x, y, z)$  de  $V_3$  cujas componentes satisfazem a um sistema de três equações lineares de forma:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \quad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \quad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0.$$