

COLECCIÓN DE MATEMÁTICA APLICADA E INFORMÁTICA  
BAJO LA DIRECCIÓN DE F. MICHAVILA.

# PROGRAMACIÓN Y CÁLCULO NUMÉRICO

F. MICHAVILA y L. GAVETE

EDITORIAL REVERTÉ



# Programación y cálculo numérico

**FRANCISCO MICHAVILA**

Catedrático de Cálculo Numérico e Informática  
Universidad Politécnica de Madrid

**L. GAVETE**

Profesor titular de Cálculo Numérico e Informática  
Universidad Politécnica de Madrid



**EDITORIAL  
REVERTÉ**

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

**Copyright © F. MICHAVILA, L. GAVETE**

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 3; : 7

ISBN 978-84-291-2677-8

Edición e-book (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 4244

ISBN 978-84-291-9450-0

*Propiedad de:*

**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

Tel: (34) 93 419 33 36

E-mail: [reverte@reverte.com](mailto:reverte@reverte.com)

Internet: <http://www.reverte.com>

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida, sin la autorización escrita de los titulares del copyright. bajo las sanciones establecidas por las leyes.

# 961

---

## Prólogo

Es un hecho que el llamado análisis vectorial fué introducido en España por don José de Echegaray en sus lecciones en la Escuela de Caminos; no hay duda que, aún hoy, al hablar de matemáticas para técnicos nos vienen a la memoria las lecciones de don Pedro Puig Adam en la Escuela de Industriales de Madrid, recogidas en excelentes textos para la enseñanza; muchos ingenieros se han formado, en las repúblicas iberoamericananas, con los completísimos volúmenes de don Julio Rey Pastor, don Pedro Pi Calleja y don César Alvarez Trejo. Lentamente, parecía formarse una tradición en lengua española de libros para la enseñanza de las matemáticas a los técnicos superiores. Después y hasta hace poco, se produjo un vacío con textos y apuntes de oficio dedicados, muchas veces, a suplir las imposibles lecciones de un profesorado de urgencia desbordado, además, -- por los sonrojantes números de alumnos/clase y maestros/Universidad con que la no planificada masificación de los centros docentes dotó a nuestro país.

Recientemente, jóvenes catedráticos y profesores de nuestras Escuelas, frecuentemente con algún grado de formación fuera de España, han empezado a publicar libros para sus enseñanzas. Algunas veces tales libros han seguido esquemas nominales, con excesivo hincapié en el análisis de estructuras -- abstractas y efectos esterilizantes tanto para el interés de los alumnos, como para aquello que, en definitiva, ha de ser la matemática para el técnico: un instrumento que permita representar y analizar los modelos a través de los cuales interpretar y/o resolver los problemas con los que su actividad le enfrenta. Instrumento que por su necesidad y utilidad deviene formativo a condición de que se presente, en lo justo, sin devaluarlo.

Es una ilusión a pagar cara, creer que con unas matemáticas alejadas de los intereses técnicos sea posible formar ingenieros. Las matemáticas son una herramienta excesivamente útil e importante como para que se pueda desperdiciar un tiempo de aprendizaje siempre demasiado corto. Además, las matemáticas no son únicamente lo que aparece escrito en los tratados y en los artículos; las matemáticas son, esencialmente, actividad matemática basada en hacer y en aplicar matemáticas en un largo proceso histórico donde ambos aspectos se retroalimentan mutua y continuamente. La parte publicada de la actividad matemática, con ser esencial no refleja todo ese proceso lleno de geniales intuiciones, de sagaces observaciones de la realidad, de muchas horas de pensar, de un continuo corregirse y de una continua búsqueda de nuevos útiles matemáticos para representar, para entender, el mundo. No en balde se lee en el Papiro Rhind que la matemática "sirve para escudriñar el universo y descubrir todo misterio y todo secreto".

¿Qué es más formativo, un curso abstracto que no entiende ni sigue más allá de un reducido número de alumnos de la clase o un curso más operativo y aplicable que esté al alcance de una razonable mayoría? ¿Es mejor un curso abstracto que al no poder ser realmente exigido en examen obligue a suspender demasiado (señal de mal profesor o de mal programa) o aprobar con generalidad (señal de lo mismo más corrupción)?.

Con escasa frecuencia aparecen textos que escapan a tan duros juicios. El presente libro es un ejemplo, a nuestro entender, de equilibrio entre una no desmedida dosis de teoría y de claras aplicaciones expuestas con precisas indicaciones operativas; se inserta además en un estilo adecuado a las necesidades matemáticas de las nuevas técnicas que no pueden producirse sin el auxilio del trabajo con ordenador.

Tal vez sea aún posible enlazar con aquella excelente tradición interrumpida. Tal vez las Escuelas Técnicas Superiores puedan, finalmente, prestar al país el servicio a que se deben y que ha de arrancar de una real modernización de -- sus enseñanzas y estructuras, con alejamiento de la burocratización y con aproximación a la creatividad. ¡Ojalá el libro - que presentamos sea un sólido elemento para ese noble fin!

E. Trillas

Madrid, Octubre 1984





---

## Introducción

Se sigue con este volumen la colección de monografías publicadas por nuestro departamento, que pretenden cubrir desde fundamentos del Análisis Numérico y la Informática, hasta trabajos de investigación en los próximos años.

Este es un libro dirigido a estudiantes y postgraduados de la Universidad. Hemos pretendido en él unir el cálculo numérico a los conocimientos informáticos, de modo que se cree una simbiosis completa y sin fisuras, que permita abordar los problemas matemáticos tal y como estos se presentan en la realidad.

Creemos que puede ser también útil para el profesional que busca adquirir unos conocimientos básicos de los algoritmos del cálculo numérico.

En este libro se ha realizado por primera vez la adaptación del Método Warnier, aunque en versión libre, a problemas de cálculo científico y más particularmente al cálculo numérico. La experiencia viene precedida del rodaje realizado con nuestros alumnos, lo que avala las cualidades pedagógicas del método, y creemos que puede ser interesante su difusión en otros campos.

Queremos agradecer la colaboración de los profesores Conde, Elorza y De Vicente por sus comentarios y sugerencias al borrador, muchas de las mejoras del proyecto inicial se deben a ellos. También queremos destacar muy especialmente la labor del profesor Alvarez Cabal, por su ayuda en la realización de los programas de ordenador y en general destacar que sin su colaboración esta monografía no habría sido posible. Algunas de las mejoras de los algoritmos programados se deben a él.

El lenguaje BASIC es el que hemos utilizado para tratar de que este libro pueda ser entendido por más público interesado, incluso aquel que sólo busque el aprender a programar algoritmos.

Antes de comenzar la lectura, unas indicaciones al modo de manejar este libro. El símbolo ■ indica el final de un concepto, propiedad, teoremas, etc. constituyendo el texto comprendido entre dos símbolos una unidad elemental de conocimiento. Las propiedades, teoremas, proposiciones y expresiones se designan para su referencia, mediante tres números de los cuales los dos primeros indican el apartado en que se encuentran y el tercero el orden en que aparecen en el apartado. Además, al final de cada capítulo se incluye un esquema del mismo.

En los programas de ordenador se ha tenido en cuenta la estructura jerárquica a la que pertenece cada secuencia o secuencias lógicas. Los más internos están situados más a la derecha, de modo que se pueda visualizar en el propio programa la descomposición lógica realizada en cada caso. Creemos que esto ayudará al lector a entender mejor los programas.

Nuestro reconocimiento a Marisol, y a la colaboración de Tate, que han realizado una magnífica labor para mecanografiar y componer este libro, así como a Julio por su perfecta delineación de las figuras y organigramas.

Los autores.

---

## Contenido

CAPITULO 1. Algorítmica y programación lógica.....	1
1.1. Introducción.....	1
1.2. Estructura repetitiva.....	4
<i>Ejemplo 1.1</i> .....	5
<i>Ejemplo 1.2</i> .....	6
<i>Ejemplo 1.3</i> .....	7
1.3. Estructura alternativa.....	9
<i>Ejemplo 1.4</i> .....	10
<i>Ejemplo 1.5</i> .....	11
1.4. Estructuras complejas.....	13
<i>Ejemplo 1.6</i> .....	13
<i>Ejemplo 1.7</i> .....	15
<i>Ejemplo 1.8</i> .....	17
1.5. Ejercicios propuestos.....	19
<i>Esquema del capítulo</i> .....	21
CAPITULO 2. Métodos de cálculo numérico y sus algoritmos.	23
2.1. Introducción.....	23
2.2. Un algoritmo de cálculo numérico.....	27
2.3. Resumen.....	29
<i>Ejemplo 2.1</i> .....	29
2.4. Criterios en la elección de algoritmos.....	31
2.5. Ejercicios propuestos.....	37
<i>Esquema del capítulo</i> .....	38

---

CAPITULO 3. Interpolación.....	39
3.1. Planteamiento.....	39
3.2. Interpolación polinomial o de Lagrange.....	41
<i>Ejemplo 3.1</i> .....	43
<i>Ejemplo 3.2</i> .....	48
3.3. Interpolación de Hermite.....	52
3.4. Diferencias divididas. Fórmulas de Newton.....	53
3.5. Diferencias finitas.....	55
3.6. El algoritmo de Aitken.....	58
3.7. Aproximación polinomial a trozos.....	59
3.8. Ejercicios propuestos.....	61
<i>Esquema del capítulo</i> .....	64
CAPITULO 4. Integración y derivación numéricas.....	65
4.1. Planteamiento del problema.....	65
4.2. Fórmulas de derivación numérica de tipo interpo- latorio.....	67
4.3. Fórmulas de integración numérica de tipo interpo- latorio.....	69
4.4. Fórmulas de integración numérica de Gauss.....	72
4.5. Fórmulas de integración numérica compuestas.....	75
<i>Ejemplo 4.1</i> .....	76
<i>Ejemplo 4.2</i> .....	80
4.6. Ejercicios propuestos.....	85
<i>Esquema del capítulo</i> .....	86
CAPITULO 5. Resolución de una ecuación.....	87
5.1. Método de las aproximaciones sucesivas.....	87
<i>Ejemplo 5.1</i> .....	89
5.2. Método de linealización de Newton-Raphson.....	94
<i>Ejemplo 5.2</i> .....	96

5.3. Método de "regula-falsi" y de la secante.....	99
5.4. Método de bipartición.....	101
5.5. Caso de raíces complejas. Método de Bairstow.....	102
5.6. Ejercicios propuestos.....	105
<i>Esquema del capítulo</i> .....	106
<b>CAPITULO 6. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales</b>	<b>107</b>
6.1. Métodos directos.....	107
6.2. Métodos de Gauss.....	109
<i>Ejemplo 6.1</i> .....	113
<i>Ejemplo 6.2</i> .....	125
6.3. Método de Cholesky.....	135
<i>Ejemplo 6.3</i> .....	136
6.4. Métodos iterativos.....	148
6.5. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel.....	152
<i>Ejemplo 6.4</i> .....	154
<i>Ejemplo 6.5</i> .....	163
6.6. Ejercicios propuestos.....	172
<i>Esquema del capítulo</i> .....	174
<b>CAPITULO 7. Cálculo de valores y vectores propios de una matriz</b> .....	<b>175</b>
7.1. Generalidades.....	175
7.2. Métodos de determinación del polinomio característico.....	177
<i>Ejemplo 7.1</i> .....	177
7.3. Métodos de transmutación.....	185
7.4. Métodos iterativos.....	189
<i>Ejemplo 7.2</i> .....	190
7.5. Ejercicios propuestos.....	199
<i>Esquema del capítulo</i> .....	200

CAPITULO 8. Resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias.....	201
8.1. Planteamiento y clasificación de los métodos numéricos de resolución.....	201
8.2. Métodos de pasos libres para problemas de valor inicial.....	206
Ejemplo 8.1.....	206
Ejemplo 8.2.....	211
Ejemplo 8.3.....	218
8.3. Métodos de pasos ligados para problemas de valor inicial .....	221
8.4. Problemas de valor inicial para ecuaciones diferenciales de orden superior a uno o sistemas.....	225
8.5. Problema de contorno para una ecuación de segundo orden lineal.....	227
8.6. Problema de contorno para una ecuación de segundo orden no lineal.....	230
8.7. Ejercicios propuestos.....	232
Esquema del capítulo.....	234
 CAPITULO 9. Métodos numéricos para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.....	 237
9.1. Generalidades.....	237
9.2. Método de diferencias finitas para ecuaciones elípticas.....	241
Ejemplo 9.1.....	243
9.3. Método de colocación para ecuaciones elípticas...	252
9.4. Método de diferencias finitas para ecuaciones parabólicas.....	253
Ejemplo 9.2.....	255
9.5. Método de diferencias finitas para ecuaciones hiperbólicas.....	265
Ejemplo 9.3.....	267
9.6. Método de los elementos finitos para ecuaciones elípticas.....	274

---

9.7. Método de elementos finitos combinado con diferencias finitas para ecuaciones parabólicas e hiperbólicas.....	280
9.8. Ejercicios propuestos.....	283
<i>Esquema del capítulo</i> .....	285
CAPITULO 10. Optimización.....	287
10.1. Generalidades.....	288
<i>Ejemplo 10.1</i> .....	289
10.2. Métodos de búsqueda directa.....	296
10.3. Métodos diferenciales.....	298
<i>Ejemplo 10.2</i> .....	298
10.4. Ejercicios propuestos.....	310
<i>Esquema del capítulo</i> .....	313
Referencias bibliográficas.....	315
Indice de materias.....	319





---

## Algorítmica y programación lógica

*"En programación, el di  
ablo se esconde en los -  
detalles"*

N. WIRTH

### 1.1. Introducción

Se describe en este capítulo una técnica de programación basada en el conocido método de Warnier, que se pretende sirva al lector como vehículo que le ayude a sortear las dificultades de programación que puede plantearle un problema científico.

Se ha indicado el vehículo o herramienta de trabajo - pero no el camino a seguir. Este camino podría ser en principio cualquiera, (problemas de gestión, problemas clásicos de programación, problemas económicos, de ingeniería, etc...) pero se ha elegido como camino precisamente el cálculo o análisis numérico de modo que al seguirlo, se puedan ir desarrollando los métodos de análisis numérico para resolver ecuaciones diferenciales, sistemas de ecuaciones, ecuaciones en derivadas parciales, etc.... y todo ello completado con ejemplos puestos en un lenguaje fácil y asequible como es el BASIC.

Con todo ello pensamos que se pueden cumplir los dos objetivos de este libro:

- 1). Enseñar al lector a programar.
- 2). Dar a conocer al lector los algoritmos básicos del análisis numérico.

En ello creemos que reside la originalidad de la obra y que trasladamos al lector con el deseo que pronto se independice y aprenda a conducir el "vehículo" de modo que pueda aventurarse por sí mismo por otros caminos distintos al aquí seguido.

La técnica de programación que se va a seguir constituye una técnica de organización del pensamiento, que podemos relacionar con la teoría de conjuntos.

Este capítulo constituye un pequeño manual de las ideas básicas completada con unos ejemplos sencillos de aplicación. ■

Todo conjunto de datos (datos de entrada, programas o resultados) se debe organizar mediante subdivisión desde el conjunto mayor o más externo al conjunto menor o más interno.

Esto es como ir apartando las ramas de un bosque para ir avanzando hacia el centro del bosque, de modo que una vez apartadas las ramas sólo nos interesa lo que existe en el interior. Es decir, se divide el problema a programar en pasos o etapas yendo desde el más externo al más interno, pero efectuando razonamientos individuales en cada paso, sin necesidad de recordar lo realizado en los pasos anteriores.

Esto nos permite dirigir nuestro pensamiento al paso o etapa en el que nos encontramos con independencia de los pasos anteriores y de los posteriores. De este modo se divide el problema a resolver en pequeñas etapas casi independientes unas de otras, todo lo cual origina una gran simplificación de los problemas a resolver.

El método requiere una etapa de adaptación de nuestro pensamiento a los esquemas o descomposiciones lógicas -- que aquí se explican, por lo que rogamos al lector que no se desanime si en los primeros pasos no obtiene el rendimiento buscado, ya que únicamente la perseverancia en el empeño es lo que le llevará a dominar el denominado "arte de programar"



*Las estructuras más elementales que se nos pueden presentar son de tres tipos:*

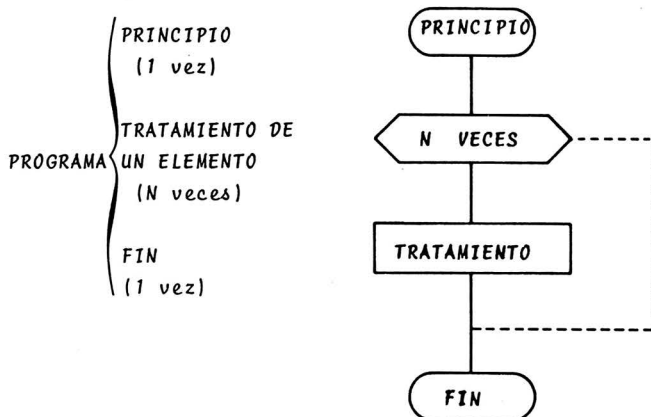
- a) Secuenciales*
- b) Repetitivas*
- c) Alternativas*

*La estructura secuencial es la más sencilla que se puede presentar y consiste en seguir una secuencia fija de operaciones en las que cada una de ellas se realiza una sola vez.*



## 1.2. Estructura repetitiva

- \* El programa se organiza en conjuntos y subconjuntos ordenados en un orden jerárquico.
- \* La programación se realiza en etapas comenzando por el conjunto de orden jerárquico mayor y siguiendo siempre dicho orden jerárquico.
- \* El programa es un conjunto ordenado de "secuencias lógicas". Cada "secuencia lógica" es una instrucción o un conjunto de instrucciones que se ejecutan un número de veces determinado en algún lugar del programa.
- \* Un subconjunto del programa de estructura repetitiva -- lleva obligatoriamente una secuencia lógica "principio" y una secuencia lógica "fin", ejecutadas una vez en el conjunto y un subconjunto repetitivo, ejecutado N veces en el conjunto.
- \* Descomposición lógica y organigrama de una estructura repetitiva simple para el tratamiento de un conjunto E de datos que contiene N elementos:

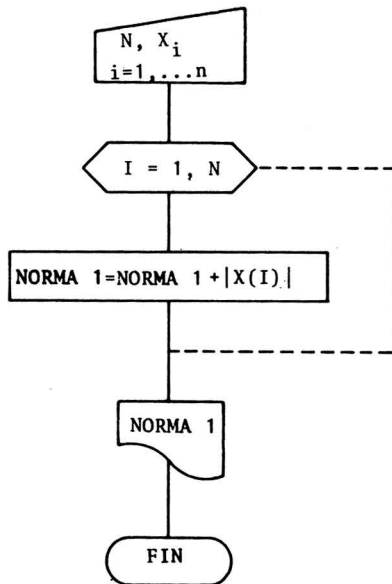


## EJEMPLO 1.1.

Programar el cálculo de la norma  $\|x\|_1 : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_+$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i|$$

PROGRAMA { PRINCIPIO: Leer  $N, x_i (i = 1, \dots, N)$   
(1 vez)  
HACER SUMA { PRINCIPIO:  $\phi$   
(N veces) { NORMA 1 = NORMA 1 + |X(I)|  
(I=1, ..., N) { FIN:  $\phi$   
FIN: Escribir NORMA 1  
(1 vez)



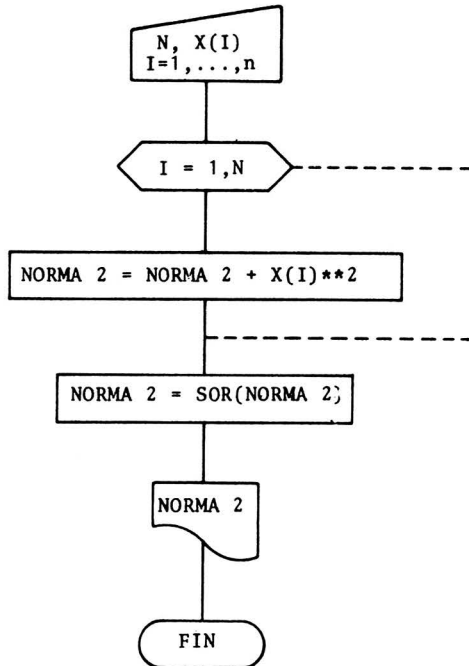
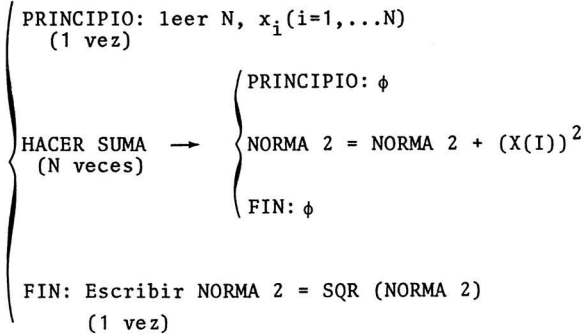
Nota: Se ha supuesto que el valor de - - NORMA 1 se inicia - automáticamente a cero.

En los casos que siguen se supone que las variables se inician de la misma forma.

## EJEMPLO 1.2.

Programar el cálculo de la norma  $\|X\|_2 : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_+$

$$\|X\|_2 = \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{1/2}$$



## EJEMPLO 1.3.

Dado un número entero positivo "M", calcular su factorial.

```

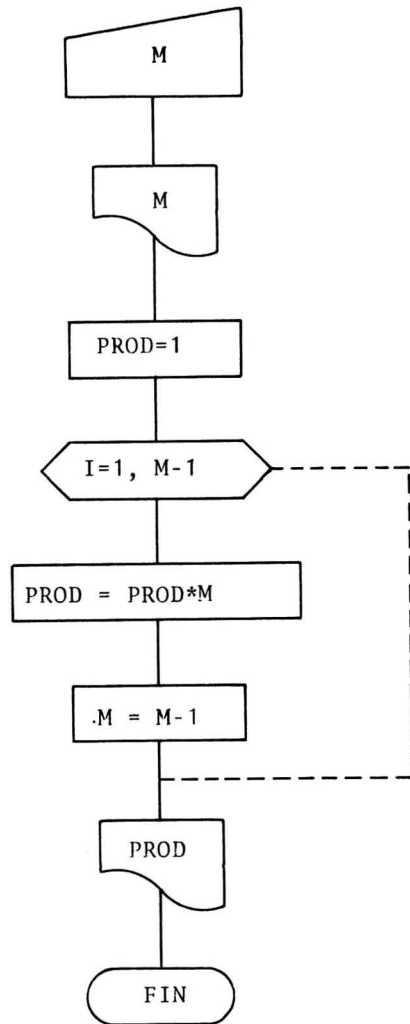
{
  PRINCIPIO: Leer M, imprimir M
            (1 vez)

  PROD = 1.
  (1 vez)

  MULTIPLICAR {
                PRINCIPIO: φ
                PROD = PROD * M
                (1 vez)
                M = M-1
                (1 vez)
                FIN: φ
  }

  FIN: Imprimir PROD
      (1 vez)
}

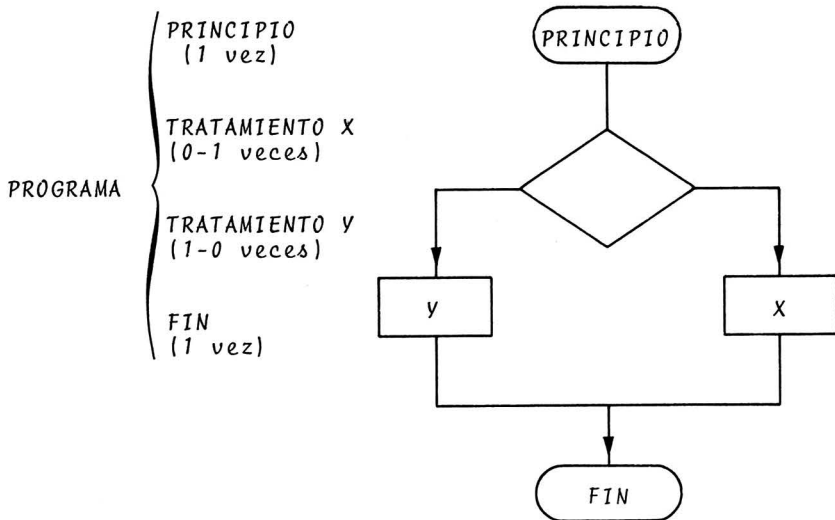
```





**1.3. Estructura alternativa**

- \* Un conjunto con estructura alternativa comprende uno o varios subconjuntos que son excluyentes unos de otros. Por eso diremos que si existen dos subconjuntos cada uno se realizará (0,1) veces siendo uno exclusivo respecto del otro y viceversa.
- \* Un programa simple con estructura alternativa tiene por lo menos cuatro "secuencias lógicas"



EJEMPLO 1.4.

Dados dos números, ordenarlos

PROGRAMA {

PRINCIPIO: Leer  $X_1, X_2$   
(1 vez)

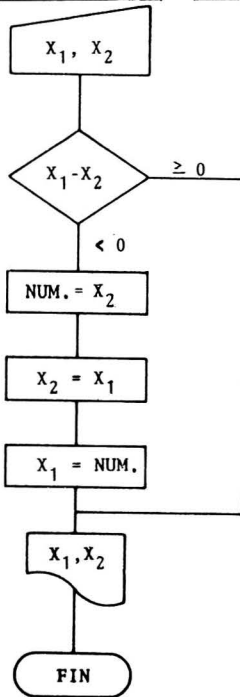
$X_1 - X_2 \geq 0$   
(0,1 vez)

$X_1 - X_2 < 0$  → { NUM =  $X_2$   
 $X_2 = X_1$   
 $X_1 = \text{NUM.}$

FIN: Imprimir  $X_1, X_2$   
(1 vez)

ESTRUCTURA ALTERNATIVA

ESTRUCTURA SECUENCIAL



## EJEMPLO 1.5.

Determinar la naturaleza de las raíces de una ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

PRINCIPIO: Leer A,B,C  
(1 vez)

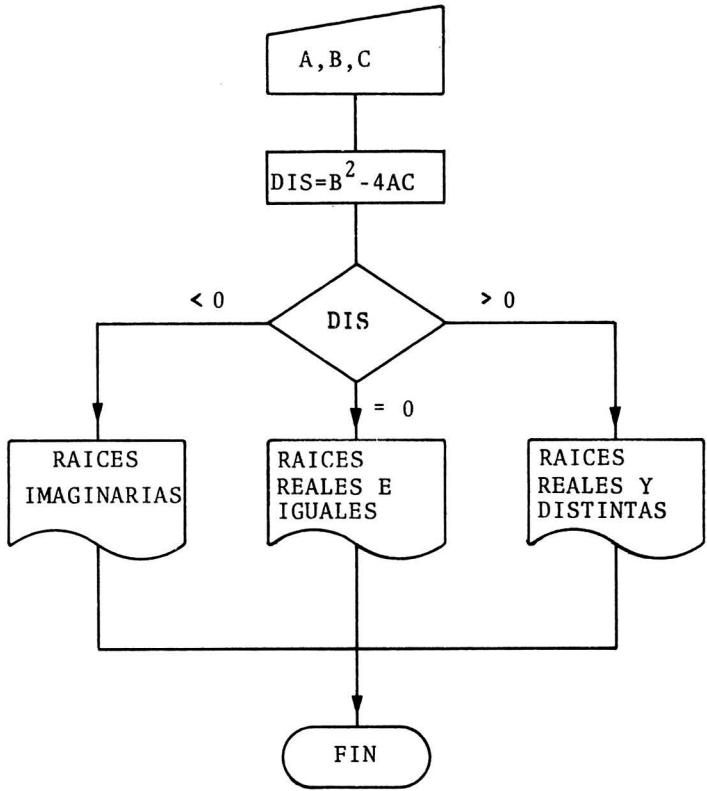
DISC =  $B^2 - 4AC$   
(1 vez)

DISC < 0 → IMPRIMIR: raíces imaginarias  
(0,0,1 vez)

DIS = 0 → IMPRIMIR: raíces reales e iguales  
(0,1,0 vez)

DIS > 0 → IMPRIMIR: raíces reales y distintas.  
(1,0,0 vez)

FIN:  $\phi$

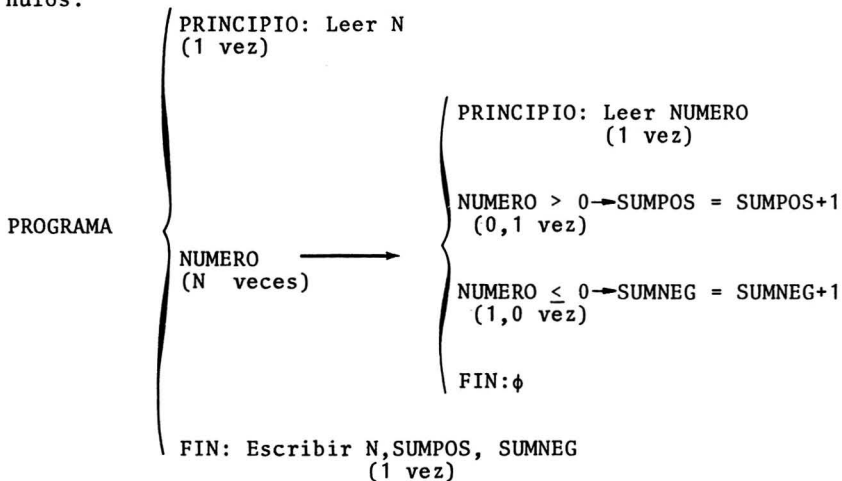


1.4. Estructuras complejas

- \* Un programa de estructura compleja es un conjunto en el que se encuentran varias estructuras elementales, alternativas o repetitivas.
- \* Cuando el programa no comprende más que estructuras repetitivas se le llama programa repetitivo complejo, -- cuando no comprende más que estructuras alternativas se le llama programa alternativo complejo y cuando comprende de alternativas y repetitivas se le llama programa complejo mixto.

EJEMPLO 1.6.

Dado un conjunto de N números, se pide construir un organigrama que nos dé el número de positivos, y negativos o nulos.



ESTRUCTURA REPETITIVA

ESTRUCTURA ALTERNATIVA

