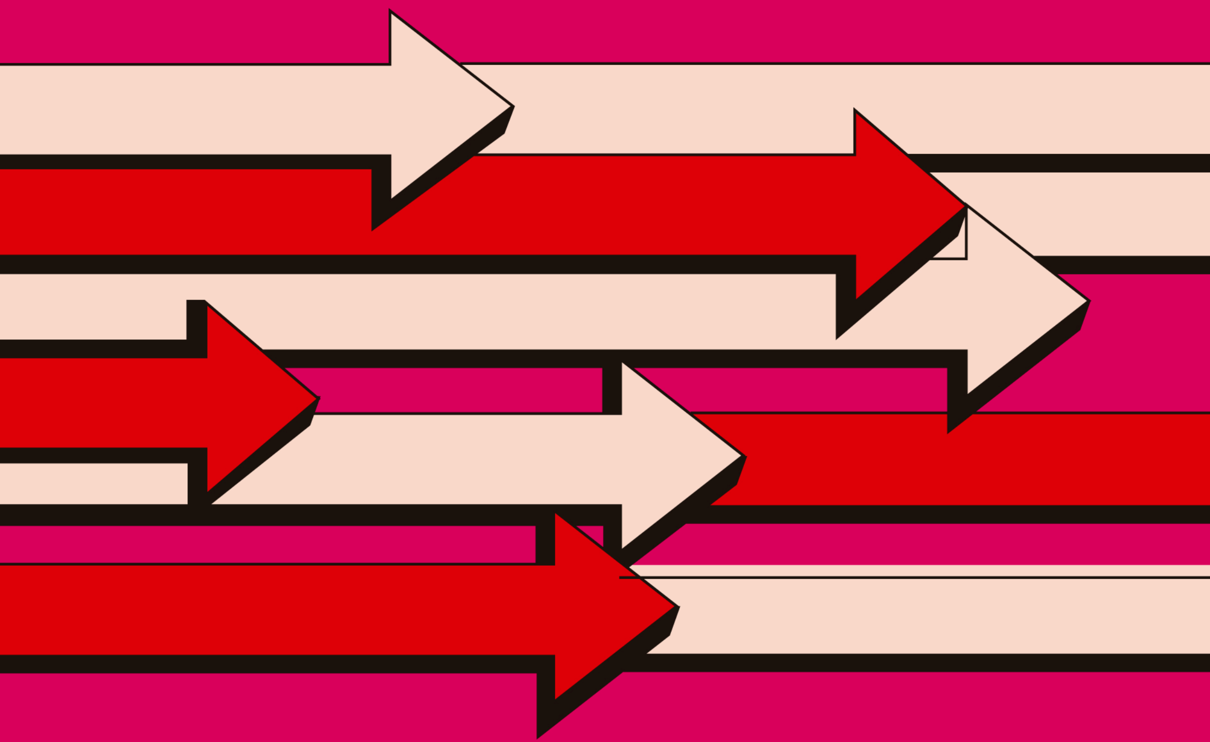
# problemas de matemáticas

para
facultades de ciencias
escuelas técnicas
escuelas de ingeniería

K. A. STROUD



serie reverté de problemas

EDITORIAL REVERTÉ

# problemas de matemáticas

para
facultades de ciencias
escuelas técnicas
escuelas de ingeniería

**K. A. Stroud**
LANCHESTER POLYTECHNIC COVENTRY

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

*Título de la obra original:*
**Engineering Mathematics**
**Programmes and Problems**

*Edición original en lengua inglesa publicada por:*
**The Macmillan Press Ltd., London**



Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1978
ISBN 978-84-291-5144-2

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2022
ISBN 978-84-291-9137-0

**Propiedad de:**
**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**
**Loreto, 13-15, Local B**
**08029 Barcelona**
reverte@reverte.com
www.reverte.com

*Versión española por el*
**Dr. Bartolomé Frontera Marqués**
Doctor Ingeniero de Montes,
Doctor en Ciencias Matemáticas,
Profesor Adjunto de Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidad
en la Universidad de Zaragoza

# Prólogo

*Con este libro se pretende proporcionar el material para un curso completo de un año a los estudiantes de las distintas ramas de la ciencia, de la técnica y de la ingeniería. En particular ha sido redactado con vistas a los cursos de*

1. *Ingeniería Técnica Industrial*
2. *Ingeniería Superior en sus distintas ramas*

*Si bien se incluyen demostraciones formales dondequiera que ello se estima necesario para fomentar la comprensión, el enfoque principal va dirigido a proporcionar al estudiante una sólida formación que incluya, tanto la destreza en el planteamiento y resolución de problemas, como una visión cabal de los principios que sirven de base a la teoría. La estructura programada hace que el libro resulte en gran manera adecuado para uso general en clase y para estudiarlo individualmente, sirviendo además de guía para el trabajo de corrección y de revisión subsiguiente.*

*El libro es el resultado de ocho años de trabajo encaminado al desarrollo de técnicas de enseñanza programada en el Departamento de Matemáticas de la Escuela Universitaria de Tecnología de Lanchester, Coventry. Durante los últimos cuatro años, todos los cursos del primer año de Matemáticas para las distintas ramas de Ingeniería han sido dados en forma programada, en combinación con períodos de tutoría y seminarios. Los resultados obtenidos han sido altamente satisfactorios y se sigue trabajando con vistas a un mayor perfeccionamiento de estas técnicas de aprendizaje.*

*Cada uno de los programas ha sido minuciosamente examinado y mejorado antes de llegar a su redacción final y el nivel de eficacia alcanzado ha estado siempre por encima del 80/80, es decir más de un 80 % de los estudiantes han obtenido, en tests cuidadosamente preparados, notas superiores al 80 % de las máximas establecidas. En un programa de investigación con un grupo de control formado por estudiantes que recibían la enseñanza tradicional, se comprobó que las notas medias de los estudiantes de la enseñanza programada eran significativamente superiores a las del grupo de control y que la diversificación de notas era a su vez menor en aquéllos que en éstos. Esta pauta general se ha reflejado también en los resultados de los exámenes finales.*

*Las ventajas de poder seguir cada uno su marcha de trabajo, la intensidad del interés puesto en juego por el estudiante, y el asesoramiento inmediato que recibe éste en sus respuestas, son cosas bien sabidas por todos los que conocen la enseñanza programada. Presenta además esta enseñanza la ventaja, en el primer año de un estudiante en un centro universitario, de ofrecer una transición más suave entre el encuadre de disciplina y organización propios de la enseñanza media y el ambiente más libre y con mayor responsabilidad en cuanto a su propio progreso con que se enfrenta el estudiante al penetrar en el ámbito de la enseñanza superior.*

*Vaya mi reconocimiento y gratitud para todos los que de algún modo han contribuido a la confección de este libro, incluyendo los que han tomado parte activa en los procesos de perfeccionamiento de los programas. Quiero en particular dejar constancia de mi gratitud por el aliento constante que me han venido prestando Mr. J. E. Sellars, M. Sc., A. F. R. Ae. S., F. I. M. A., actualmente jefe de mi Departamento en esta Escuela Universitaria, y Mr. R. Wooldridge, M. C., B. Sc., F. I. M. A., antes jefe del Departamento y ahora director de la Escuela Universitaria de Tecnología de Derby. Debo también acusar reconocimiento de las múltiples fuentes, demasiado numerosas para ser citadas una por una, de donde se han venido juntando a lo largo del tiempo los ejemplos seleccionados que figuran en los programas.*

K. A. Stroud

# Indice analítico

# Consejos para uso de este libro

Este libro consta de veinticuatro lecciones, cada una de las cuales ha sido preparada con vistas a que el aprendizaje resulte lo más efectivo e interesante. Es casi como si se tuviera un tutor personal, ya que el estudiante procede a la marcha que le conviene y las dificultades que se le puedan presentar se le aclaran antes de que pueda adquirir conceptos o técnicas erróneos.

Cada programa se halla dividido en secciones llamadas cuadros, cada uno de los cuales ocupa por lo general media página. Al iniciar un programa, empiece con el cuadro 1. Lea cuidadosamente cada cuadro y ejecute todas las instrucciones y ejercicios que se le propongan. En casi todos los cuadros se le pide algún tipo de respuesta para asegurar que ha comprendido la información contenida, e inmediatamente puede comparar su respuesta con la correcta que viene en el cuadro siguiente. Para que pueda sacar el máximo provecho le recomendamos encarecidamente que cubra el cuadro siguiente hasta haber dado su respuesta. Cuando se encuentre con una serie de puntos, lo que se le pide es que supla la palabra, frase o número que falte. En cada paso irá recibiendo la información pertinente. No tiene por qué apresurarse: lea cuidadosamente los cuadros y siga fielmente las instrucciones. Así es como aprenderá.

Al final de cada cuadro encontrará un corto ejercicio de prueba. Éste versa directamente sobre lo que ha aprendido en la lección: las preguntas son directas y sin trampa alguna. Para que pueda practicar, se incluye otro conjunto de problemas: resuelva de ellos los más que pueda. No olvide que en matemáticas, lo mismo que en cualquier otra situación de la vida, la perfección viene con la práctica.

Aun cuando crea haber visto los temas con anterioridad, no deje de trabajar en ellos sin omitir ningún programa: esto le servirá como repaso útil y para llenar las lagunas que pudiera tener en sus conocimientos.

# Información útil de repaso

## I. Identidades algebraicas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b). \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

## II. Identidades trigonométricas

1) $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1;\quad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta;\quad \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

2)
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A+B) &= \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B\\
\operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B\\
\cos(A+B) &= \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B\\
\cos(A-B) &= \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B
\end{aligned}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

3) Sea $A = B = \theta$. $\quad\therefore$
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 2\theta &= 2\operatorname{sen}\theta \cos\theta\\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\\
&= 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta\\
&= 2\cos^2\theta - 1
\end{aligned}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

4) Sea $\theta = \frac{\varnothing}{2}$ $\quad\therefore\quad \operatorname{sen}\varnothing = 2\operatorname{sen}\frac{\varnothing}{2}\cos\frac{\varnothing}{2}$

$$\cos\varnothing = \cos^2\frac{\varnothing}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\varnothing}{2}$$
$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\varnothing}{2}$$
$$= 2\cos^2\frac{\varnothing}{2} - 1$$
$$\tan\varnothing = \frac{2\tan\frac{\varnothing}{2}}{1-\tan^2\frac{\varnothing}{2}}$$

5) $\operatorname{sen}C + \operatorname{sen}D = 2\operatorname{sen}\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$\operatorname{sen}C - \operatorname{sen}D = 2\cos\frac{C+D}{2}\operatorname{sen}\frac{C-D}{2}$

$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$\cos D - \cos C = 2\operatorname{sen}\frac{C+D}{2}\operatorname{sen}\frac{C-D}{2}$

6) $2\operatorname{sen}A\cos B = \operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)$
$2\cos A\operatorname{sen}B = \operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)$
$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
$2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

7) Ángulos negativos: $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

8) Ángulos que tienen las mismas razones trigonométricas:
(i) Mismo seno: $\theta$ y $(180^\circ - \theta)$
(ii) Mismo coseno: $\theta$ y $(360^\circ - \theta)$, o sea $(-\theta)$
(iii) Misma tangente: $\theta$ y $(180^\circ + \theta)$

9) $a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta = A\operatorname{sen}(\theta + \alpha)$
$a\operatorname{sen}\theta - b\cos\theta = A\operatorname{sen}(\theta - \alpha)$
$a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta = A\cos(\theta - \alpha)$
$a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta = A\cos(\theta + \alpha)$

$$\text{donde:}\begin{cases} A = \sqrt{(a^2+b^2)} \\ \alpha = {}^*\tan^{-1}\frac{b}{a} \qquad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)\end{cases}$$

* La expresión $\tan^{-1}$ tiene aquí el valor de la función circular arco tangente (arc tg). Análogamente, y en lo sucesivo, se mantendrá esta nomenclatura para todas las funciones circulares (N. del E.).

## III. Curvas típicas

1) *Recta:*

Pendiente, $m = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ángulo entre dos rectas, $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$

Para rectas paralelas, $m_2 = m_1$

Para rectas perpendiculares, $m_1 m_2 = -1$

Ecuación de una recta (pendiente $= m$)

(i) Con la ordenada en el origen $c$ sobre el eje real $y$: $y = mx + c$

(ii) Que pasa por $(x_1, y_1)$: $y - y_1 = m(x - x_1)$

(iii) Que une $(x_1, y_1)$ con $(x_2, y_2)$: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

2) *Circunferencia:*

Con centro en el origen y radio $r$: $x^2 + y^2 = r^2$

Con centro $(h, k)$ y radio $r$: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Ecuación general: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Con centro $(-g, -f)$; radio $= \sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$

Ecuaciones paramétricas: $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

3) *Parábola:*

Con vértice en el origen y foco $(a, 0)$: $y^2 = 4ax$

Ecuaciones paramétricas: $x = at^2$, $y = 2at$

4) *Elipse:*

Con centro en el origen y focos $(\pm\sqrt{[a^2 - b^2]}, 0)$: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

donde $a$ = semieje mayor, $b$ = semieje menor

Ecuaciones paramétricas: $x = a\cos\theta$, $y = b\,\mathrm{sen}\,\theta$

5) *Hipérbola:*

Con centro en el origen y focos $(\pm\sqrt{[a^2 + b^2]}, 0)$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Ecuaciones paramétricas: $x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$

Hipérbola equivalente:

Con centro en el origen y vértice $\pm\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$: $xy = \dfrac{a^2}{2} = c^2$ donde $c = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

o sea $xy = c^2$

Ecuaciones paramétricas: $x = ct$, $y = c/t$

Programa 1

# Números complejos

## PARTE 1

**1**

## Introducción: el símbolo j

La solución de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ puede obtenerse por supuesto mediante la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Por ejemplo, si $2x^2 + 9x + 7 = 0$, tenemos entonces

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{(81-56)}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-9 \pm 5}{4}$$

$$\therefore\ x = -\frac{4}{4} \text{ o } -\frac{14}{4}$$

$$\therefore\ \underline{x = -1 \text{ o } -3{\cdot}5}$$

Esto es bastante inmediato, pero si resolvemos de la misma manera la ecuación $5x^2 - 6x + 5 = 0$, obtenemos

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(36-100)}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{(-64)}}{10}$$

y el paso siguiente consistirá ahora en determinar la raíz cuadrada de (—64). ¿Es (i) 8, (ii) —8, (iii) ninguna de las dos cosas?

**2**

| Ninguna de las dos cosas |
|---|

No es por supuesto ninguna de las dos cosas, ya que +8 y —8 son ambos raíces cuadradas de 64 y no de (—64). En realidad, $\sqrt{(-64)}$ no puede ser representado mediante un número ordinario, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea una cantidad negativa.

Sin embargo, $-64 = -1 \times 64$ y por lo tanto podemos poner

$$\sqrt{(-64)} = \sqrt{(-1 \times 64)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{64} = 8\sqrt{(-1)}$$

$$\text{o sea } \sqrt{(-64)} = 8\sqrt{(-1)}$$

Por supuesto, nos vemos todavía enfrentados con $\sqrt{(-1)}$, lo cual no puede ser valorado como número real, por la misma razón de antes, pero, sí introducimos la letra j para representar a $\sqrt{(-1)}$, entonces $\sqrt{(-64)} = \sqrt{(-1)}{\cdot}8 = \mathrm{j}8$.

Así, aunque no podamos calcular $\sqrt{(-1)}$, podemos representarlo por j y esto nos permite trabajar con mayor nitidez.

Análogamente,

$$\sqrt{(-64)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{64} = \mathrm{j}8$$
$$\sqrt{(-36)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{36} = \mathrm{j}6$$
$$\sqrt{(-\ 7)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{\ 7} = \mathrm{j}2{,}646$$

Así pues, $\sqrt{(-25)}$ puede ponerse en la forma ......................

**3**

$$\boxed{j5}$$

Tenemos ahora una manera de rematar la ecuación de segundo grado que hemos iniciado en el cuadro 1.

$$5x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \therefore \; x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 100)}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{(-64)}}{10}$$

$$\therefore \; x = \frac{6 \pm j8}{10} \quad \therefore \; x = 0{,}6 \pm j0{,}8$$

$$\therefore \; \underline{x = 0{,}6 + j0{,}8} \;\; \text{o} \;\; \underline{x = 0{,}6 - j0{,}8}$$

Más adelante nos ocuparemos de los resultados de este tipo.

*Por ahora, pase al cuadro 4.*

**4**

**Potencias de j**

Puesto que j representa a $\sqrt{(-1)}$, consideremos algunas potencias de j.

$$\begin{array}{ll} j = \sqrt{(-1)} & j = \sqrt{(-1)} \\ j^2 = -1 & j^2 = -1 \\ j^3 = (j^2)j = -1 \times j = -j & j^3 = -j \\ j^4 = (j^2)^2 = (-1)^2 = 1 & j^4 = \;\; 1 \end{array}$$

Obsérvese de un modo particular el resultado último: $j^4 = 1$. Cada vez que se presenta un factor $j^4$, puede ser sustituido por el factor 1, de modo que la potencia de j se reduce a uno de los cuatro resultados anteriores.

$$\begin{array}{ll} \text{p. ej.} & j^9 = (j^4)^2 j = (1)^2 j = 1 \times j = j \\ & j^{20} = (j^4)^5 = (1)^5 = 1 \\ & j^{30} = (j^4)^7 j^2 = (1)^7(-1) = 1(-1) = -1 \\ \text{y} & j^{15} = (j^4)^3 j^3 = 1(-j) = -j \end{array}$$

así, de la misma manera, $j^5 =$ ........................

**5**

$$\boxed{\;j\;}$$

puesto que $j^5 = (j^4)j = 1 \times j = j$

Todos se hacen de la misma manera.

$$j^6 = (j^4)j^2 = 1(j^2) = 1(-1) = -1$$
$$j^7 = (j^4)j^3 = 1(-j) = -j$$
$$j^8 = (j^4)^2 = (1)^2 = 1$$

**Así** (i) $j^{42}$ = ........................

(ii) $j^{12}$ = ........................

(iii) $j^{11}$ = ........................

**y** (iv) Si $x^2 - 6x + 34 = 0$, $x$ = ........................

**6**

$$\boxed{\text{(i) } -1, \quad \text{(ii) } 1, \quad \text{(iii) } -j, \quad \text{(iv) } x = 3 \pm j5}$$

El desarrollo de (iv) es como sigue:

$$x^2 - 6x + 34 = 0 \quad \therefore\ x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 136)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-100)}}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{6 \pm j10}{2} = 3 \pm j5$$

$$\text{o sea } \underline{x = 3 + j5} \text{ o } \underline{x = 3 - j5}$$

Recuerde que para simplificar las potencias de j, sacamos la potencia más alta que podamos de $j^4$, y el resultado queda entonces en uno de los cuatro resultados: j, −1, −j, 1.

*Pase ahora al cuadro 7.*

7

**Números complejos**
El resultado $x = 3 + j5$ que hemos obtenido, está formado por dos términos separados, 3 y j5. Estos términos ya no se pueden combinar más, puesto que el segundo no es un número real (por tener el factor j).

En una expresión tal como $x = 3 + j5$,

3 recibe el nombre de *parte real* de $x$
5 recibe el nombre de *parte imaginaria* de $x$

y los dos juntos constituyen lo que se denomina un *número complejo.*

Así pues, un número complejo = (parte real) + j (parte imaginaria)

En el número complejo $2 + j7$ la parte real = .....................

y la parte imaginaria = .....................

8

Parte real = 2; parte imaginaria = 7 (NO j7)

Los números complejos tienen muchas aplicaciones en ingeniería. Para poderlos utilizar nos hace falta saber cómo se llevan a cabo con ellos las operaciones aritméticas ordinarias.

1. *Suma y resta de números complejos.* Esto es fácil como puede verse con los ejemplos siguientes.

*Ejemplo 1* $(4 + j5) + (3 - j2)$. Si bien las partes real e imaginaria no pueden combinarse entre sí, podemos quitar los paréntesis y sumar los términos de la misma especie.

$$(4 + j5) + (3 - j2) = 4 + j5 + 3 - j2 = (4 + 3) + j(5 - 2)$$
$$= \underline{7 + j3}$$

*Ejemplo 2*

$$(4 + j7) - (2 - j5) = 4 + j7 - 2 + j5 = (4 - 2) + j(7 + 5)$$
$$= \underline{2 + j12}$$

Así pues, en general, $(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$

Haga ahora el que sigue:

$(5 + j7) + (3 - j4) - (6 - j3) =$ .....................

**9**

$$\boxed{2 + j6}$$

ya que $(5 + j7) + (3 - j4) - (6 - j3)$

$$= 5 + j7 + 3 - j4 - 6 + j3$$

$$= (5 + 3 - 6) + j(7 - 4 + 3)$$

$$= \underline{2 + j6}$$

Haga usted ahora de la misma manera las sumas que siguen:

(i) $(6 + j5) - (4 - j3) + (2 - j7)$ = ......................

y (ii) $(3 + j5) - (5 - j4) - (-2 - j3)$ = ......................

**10**

$$\boxed{\text{(i) } 4 + j \quad \text{(ii) } j12}$$

Damos ahora aquí el desarrollo:

(i) $(6 + j5) - (4 - j3) + (2 - j7)$

$$= 6 + j5 - 4 + j3 + 2 - j7$$

$$= (6 - 4 + 2) + j(5 + 3 - 7)$$

$$= \underline{4 + j}$$

(ii) $(3 + j5) - (5 - j4) - (-2 - j3)$

$$= 3 + j5 - 5 + j4 + 2 + j3$$ (¡Tenga cuidado con los signos!)

$$= (3 - 5 + 2) + j(5 + 4 + 3)$$

$$= 0 + j12 = \underline{j12}$$

Esto resulta muy fácil, siempre que recuerde que las partes real e imaginaria tienen que ser tratadas absolutamente por separado —lo mismo que las $x$ y las $y$ de una expresión algebraica.

*Pase al cuadro 11.*

2. *Multiplicación de números complejos* 11

*Ejemplo:* $(3 + j4)(2 + j5)$

Éstos se multiplican exactamente de la misma manera en que se determinaría el producto $(3x + 4y)(2x + 5y)$.

Forme los términos producto de (i) los dos términos de la izquierda
(ii) los dos términos interiores
(iii) los dos términos exteriores
(iv) los dos términos de la derecha

$$= 6 + j8 + j15 + j^2 20$$

$$= 6 + j23 - 20 \quad (\text{ya que } j^2 = -1)$$

$$\underline{= -14 + j23}$$

1 4

$$(3 + j4)(2 + j5)$$

2

3

De manera análoga, $(4 - j5)(3 + j2)$ ....................

12

$$\boxed{22 - j7}$$

ya que:

$$(4 - j5)(3 + j2) = 12 - j15 + j8 - j^2 10$$

$$= 12 - j7 + 10 \quad (j^2 = -1)$$

$$= 22 - j7$$

Si la expresión contiene más de dos factores, multiplicamos estos factores paso a paso:

$$(3 + j4)(2 - j5)(1 - j2)$$

$$= (6 + j8 - j15 - j^2 20)(1 - j2)$$

$$= (6 - j7 + 20)(1 - j2)$$

$$= (26 - j7)(1 - j2)$$

$$= \text{..............................}$$

*Termínelo.*

## 13

$$\boxed{12 - j59}$$

ya que: $(26 - j7)(1 - j2)$

$$= 26 - j7 - j52 + j^2 14$$

$$= 26 - j59 - 14 = \underline{12 - j59}$$

Obsérvese que cuando tratamos con números complejos, el resultado del cálculo es también, por lo general, un número complejo.

Haga ahora por su cuenta esta multiplicación.

$$(5 + j8)(5 - j8) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## 14

$$\boxed{89}$$

Aquí está el desarrollo:

$$(5 + j8)(5 - j8) = 25 + j40 - j40 - j^2 64$$

$$= 25 + 64$$

$$= \underline{89}$$

A pesar de lo que hemos dicho anteriormente, tenemos aquí un resultado que no contiene ningún término en j. El resultado es, por lo tanto, totalmente real.

Este es más bien un caso excepcional. Observe los dos números complejos que acabamos de multiplicar. ¿Encuentra alguna particularidad en ellos? De ser así, ¿cuál es esta particularidad?

*Una vez dada la contestación, pase al cuadro siguiente.*

**15**

Son idénticos, salvo por el signo de en medio en los paréntesis, o sea $(5 + j8)$ y $(5 - j8)$

Un par de números complejos tales como éstos reciben el nombre de complejos *conjugados* y *el producto de dos números complejos conjugados es siempre totalmente real.*

Considérelo de esta manera —

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{diferencia de dos cuadrados}$$

De análoga manera
$$\begin{aligned}(5 + j8)(5 - j8) &= 5^2 - (j8)^2 = 5^2 - j^2 8^2 \\ &= 5^2 + 8^2 \quad (j^2 = -1) \\ &= 25 + 64 = \underline{89}\end{aligned}$$

Sin llegar a hacer todo el desarrollo diga si el producto de $(7 - j6)$ y $(4 + j3)$ es

(i) un número real
(ii) un número imaginario
(iii) un número complejo

**16**

Un número complejo

ya que $(7 - j6)\,(4 + j3)$ es un producto de dos números complejos que *no* son números complejos conjugados.

**Recuerde:** Dos números complejos conjugados son iguales salvo por el signo que hay entre los paréntesis.

| | | |
|---|---|---|
| | $(4 + j5)$ y $(4 - j5)$ | *son* números complejos conjugados |
| | $(a + jb)$ y $(a - jb)$ | *son* números complejos conjugados |
| pero | $(6 + j2)$ y $(2 + j6)$ | *no son* números complejos conjugados |
| | $(5 - j3)$ y $(-5 + j3)$ | *no son* números complejos conjugados |

Así pues, ¿por qué tenemos que multiplicar $(3 - j2)$ para que el resultado sea totalmente real?

**17**

$$\boxed{3 + j2}$$

puesto que el conjugado de $(3 - j2)$ es idéntico a él salvo por el signo de en medio, o sea $(3 + j2)$, y sabemos que el producto de dos números complejos conjugados es siempre real.

Damos aquí otros ejemplos:

*Ejemplo 1* $\quad (3 - j2)(3 + j2) = 3^2 - (j2)^2 = 9 - j^2 4$

$$= 9 + 4 = \underline{13}$$

*Ejemplo 2* $\quad (2 + j7)(2 - j7) = 2^2 - (j7)^2 = 4 - j^2 49$

$$= 4 + 49 = \underline{53}$$

... y así sucesivamente.

Los números complejos de la forma $(a + jb)$ y $(a - jb)$ reciben el nombre de números complejos ........................

**18**

$$\boxed{\text{conjugados}}$$

Ahora no debe tener dificultad alguna con los ejercicios que siguen

(a) Escriba los siguientes productos

(i) $(4 - j3)(4 + j3)$

(ii) $(4 + j7)(4 - j7)$

(iii) $(a + jb)(a - jb)$

(iv) $(x - jy)(x + jy)$

(b) Multiplique $(3 - j5)$ por un factor adecuado para que el resultado sea totalmente real.

*Cuando termine, pase al cuadro 19.*

19

Damos aquí con detalle los resultados.

(a) (i) $(4-j3)\,(4+j3) = 4^2 - j^2 3^2 = 16 + 9 = \boxed{25}$

(ii) $(4+j7)\,(4-j7) = 4^2 - j^2 7^2 = 16 + 49 = \boxed{65}$

(iii) $(a+jb)\,(a-jb) = a^2 - j^2 b^2 = \boxed{a^2 + b^2}$

(iv) $(x-jy)\,(x+jy) = x^2 - j^2 y^2 = \boxed{x^2 + y^2}$

(b) Para que el producto sea real, tenemos que multiplicar (3 — j5) por su conjugado, o sea por (3 + j5), dando como resultado

$$(3-j5)\,(3+j5) = 3^2 - j^2 5^2 = 9 + 25 = \boxed{34}$$

*Pase ahora al cuadro siguiente para hacer un corto ejercicio de repaso.*

20

**Ejercicio de repaso**

1. Simplifique (i) $j^{12}$ (ii) $j^{10}$ (iii) $j^{23}$
2. Simplifique:

   (i) $(5-j9)-(2-j6)+(3-j4)$

   (ii) $(6-j3)\,(2+j5)\,(6-j2)$

   (iii) $(4-j3)^2$

   (iv) $(5-j4)\,(5+j4)$
3. Multiplique (4 — j3) por un factor adecuado para que el producto sea totalmente real. ¿Cuál es el resultado?

*Una vez que termine el ejercicio, pase al cuadro 21.*

**21** Aquí vienen los resultados. Compárelos con los suyos.

1. (i) $j^{12} = (j^4)^3 = 1^3 = \boxed{1}$

   (ii) $j^{10} = (j^4)^2 j^2 = 1^2(-1) = \boxed{-1}$

   (iii) $j^{23} = (j^4)^5 j^3 = j^3 = \boxed{-j}$

2. (i) $(5 - j9) - (2 - j6) + (3 - j4)$

   $= 5 - j9 - 2 + j6 + 3 - j4$

   $= (5 - 2 + 3) + j(6 - 9 - 4) = \boxed{6 - j7}$

   (ii) $(6 - j3)(2 + j5)(6 - j2)$

   $= (12 - j6 + j30 - j^2 15)(6 - j2)$

   $= (27 + j24)(6 - j2)$

   $= 162 + j144 - j54 + 48 = \boxed{210 + j90}$

   (iii) $(4 - j3)^2 = 16 - j24 - 9$

   $= \boxed{7 - j24}$

   (iv) $(5 - j4)(5 + j4)$

   $= 25 - j^2 16 = 25 + 16 = \boxed{41}$

3. El factor buscado es el conjugado del número complejo dado.

$$(4 - j3)(4 + j3) = 16 + 9 = \boxed{25}$$

¿Le ha salido todo bien? De acuerdo. *Pase ahora al cuadro siguiente para continuar el programa.*