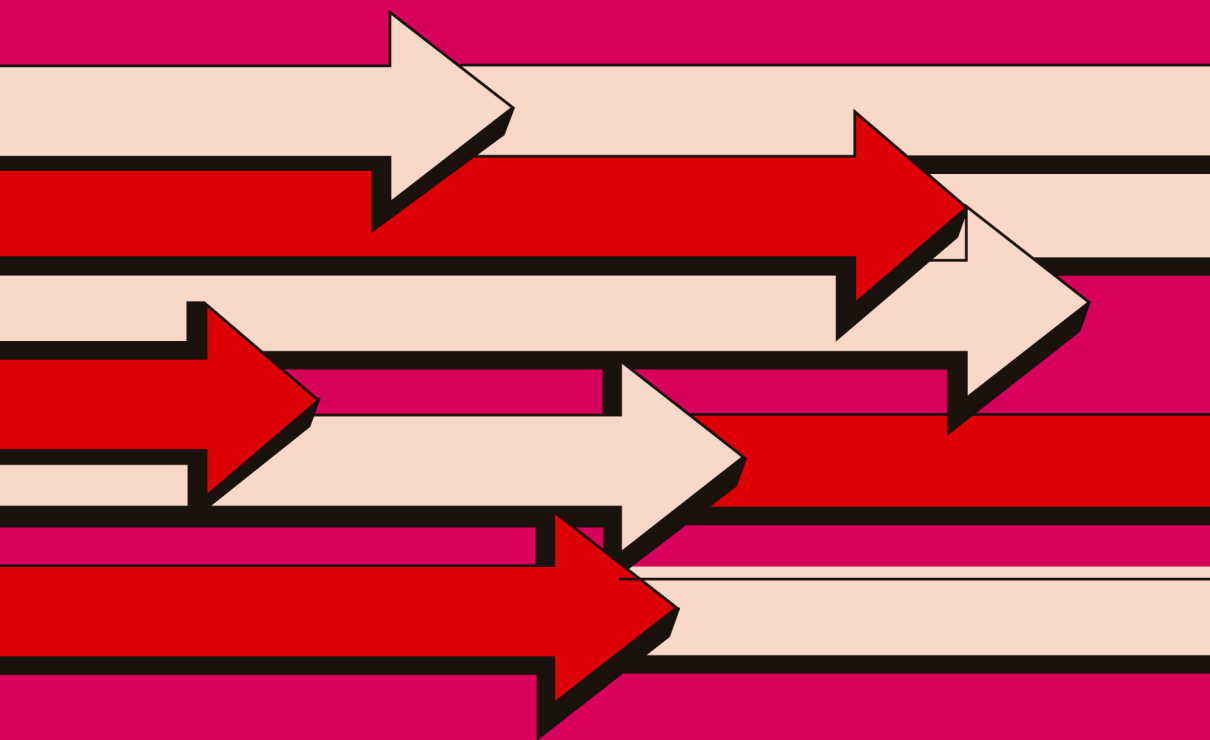


# problemas de matemáticas

para  
facultades de ciencias  
escuelas técnicas  
escuelas de ingeniería

K. A. STROUD



serie reverté de problemas

EDITORIAL REVERTÉ



# problemas de matemáticas

para  
facultades de ciencias  
escuelas técnicas  
escuelas de ingeniería

**K. A. Stroud**

LANCHESTER POLYTECHNIC COVENTRY



EDITORIAL  
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

*Título de la obra original:*

**Engineering Mathematics  
Programmes and Problems**

*Edición original en lengua inglesa publicada por:*

**The Macmillan Press Ltd., London**

**Copyright © by K. A. Strond**

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 1978

ISBN 978-84-291-5144-2

Edición e-book (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 2022

ISBN 978-84-291-9137-0

**Propiedad de:**

**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**

**Loreto, 13-15, Local B**

**08029 Barcelona**

reverte@reverte.com

www.reverte.com

*Versión española por el*

**Dr. Bartolomé Frontera Marqués**

Doctor Ingeniero de Montes,

Doctor en Ciencias Matemáticas,

Profesor Adjunto de Estadística Matemática y Cálculo de Probabilidad

en la Universidad de Zaragoza

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.



# Prólogo

*Con este libro se pretende proporcionar el material para un curso completo de un año a los estudiantes de las distintas ramas de la ciencia, de la técnica y de la ingeniería. En particular ha sido redactado con vistas a los cursos de*

- 1. Ingeniería Técnica Industrial*
- 2. Ingeniería Superior en sus distintas ramas*

*Si bien se incluyen demostraciones formales dondequiera que ello se estima necesario para fomentar la comprensión, el enfoque principal va dirigido a proporcionar al estudiante una sólida formación que incluya, tanto la destreza en el planteamiento y resolución de problemas, como una visión cabal de los principios que sirven de base a la teoría. La estructura programada hace que el libro resulte en gran manera adecuado para uso general en clase y para estudiarlo individualmente, sirviendo además de guía para el trabajo de corrección y de revisión subsiguiente.*

*El libro es el resultado de ocho años de trabajo encaminado al desarrollo de técnicas de enseñanza programada en el Departamento de Matemáticas de la Escuela Universitaria de Tecnología de Lanchester, Coventry. Durante los últimos cuatro años, todos los cursos del primer año de Matemáticas para las distintas ramas de Ingeniería han sido dados en forma programada, en combinación con períodos de tutoría y seminarios. Los resultados obtenidos han sido altamente satisfactorios y se sigue trabajando con vistas a un mayor perfeccionamiento de estas técnicas de aprendizaje.*

*Cada uno de los programas ha sido minuciosamente examinado y mejorado antes de llegar a su redacción final y el nivel de eficacia alcanzado ha estado siempre por encima del 80/80, es decir más de un 80 % de los estudiantes han obtenido, en tests cuidadosamente preparados, notas superiores al 80 % de las máximas establecidas. En un programa de investigación con un grupo de control formado por estudiantes que recibían la enseñanza tradicional, se comprobó que las notas medias de los estudiantes de la enseñanza programada eran significativamente superiores a las del grupo de control y que la diversificación de notas era a su vez menor en aquéllos que en éstos. Esta pauta general se ha reflejado también en los resultados de los exámenes finales.*

*Las ventajas de poder seguir cada uno su marcha de trabajo, la intensidad del interés puesto en juego por el estudiante, y el asesoramiento inmediato que recibe éste en sus respuestas, son cosas bien sabidas por todos los que conocen la enseñanza programada. Presenta además esta enseñanza la ventaja, en el primer año de un estudiante en un centro universitario, de ofrecer una transición más suave entre el encuadre de disciplina y organización propios de la enseñanza media y el ambiente más libre y con mayor responsabilidad en cuanto a su propio progreso con que se enfrenta el estudiante al penetrar en el ámbito de la enseñanza superior.*

*Vaya mi reconocimiento y gratitud para todos los que de algún modo han contribuido a la confección de este libro, incluyendo los que han tomado parte activa en los procesos de perfeccionamiento de los programas. Quiero en particular dejar constancia de mi gratitud por el aliento constante que me han venido prestando Mr. J. E. Sellars, M. Sc., A. F. R. Ae. S., F. I. M. A., actualmente jefe de mi Departamento en esta Escuela Universitaria, y Mr. R. Wooldridge, M. C., B. Sc., F. I. M. A., antes jefe del Departamento y ahora director de la Escuela Universitaria de Tecnología de Derby. Debo también acusar reconocimiento de las múltiples fuentes, demasiado numerosas para ser citadas una por una, de donde se han venido juntando a lo largo del tiempo los ejemplos seleccionados que figuran en los programas.*

K. A. Stroud

# Índice analítico

## PREFACIO

## INDICACIONES PARA EL USO DEL LIBRO

<b>Programa I: Números complejos, Parte I</b>	1
<i>Introducción: El símbolo <math>j</math>; potencias de <math>j</math>; números complejos</i>	
<i>Multiplicación de los números complejos</i>	
<i>Ecuaciones de números complejos</i>	
<i>Representación gráfica de los números complejos</i>	
<i>Suma gráfica de los números complejos</i>	
<i>Forma polar de un número complejo</i>	
<i>Forma exponencial de un número complejo</i>	
<i>Ejercicio de prueba I</i>	
<i>Otros problemas I</i>	
<b>Programa II: Números complejos, Parte II</b>	37
<i>Introducción</i>	
<i>Problemas de lugares geométricos</i>	
<i>Ejercicio de prueba II</i>	
<i>Otros problemas II</i>	
<b>Programa III: Funciones hiperbólicas</b>	71
<i>Introducción</i>	
<i>Gráficas de funciones hiperbólicas</i>	
<i>Cálculo de funciones hiperbólicas</i>	
<i>Funciones hiperbólicas inversas</i>	
<i>Forma logarítmica de las funciones hiperbólicas inversas</i>	
<i>Identidades hiperbólicas</i>	
<i>Identidades trigonométricas e identidades hiperbólicas</i>	
<i>Relación entre funciones trigonométricas y funciones hiperbólicas</i>	
<i>Ejercicio de prueba III</i>	
<i>Otros problemas III</i>	

<b>Programa IV: Determinantes</b>	99
<i>Determinantes</i>	
<i>Determinantes de tercer orden</i>	
<i>Cálculo de un determinante de tercer orden</i>	
<i>Ecuaciones simultáneas con tres incógnitas</i>	
<i>Compatibilidad de un sistema de ecuaciones</i>	
<i>Propiedades de los determinantes</i>	
<i>Ejercicio de prueba IV</i>	
<i>Otros problemas IV</i>	
<b>Programa V: Vectores</b>	139
<i>Introducción: cantidades escalares y vectoriales</i>	
<i>Representación de un vector</i>	
<i>Igualdad de vectores</i>	
<i>Tipos de vectores</i>	
<i>Suma de vectores</i>	
<i>Componentes de un vector dado</i>	
<i>Componentes de un vector en términos de un vector unitario</i>	
<i>Vectores en el espacio</i>	
<i>Cosenos directores</i>	
<i>Producto escalar de dos vectores</i>	
<i>Producto vectorial de dos vectores</i>	
<i>Ángulo entre dos vectores</i>	
<i>Parámetros directores</i>	
<i>Resumen</i>	
<i>Ejercicio de prueba V</i>	
<i>Otros problemas V</i>	
<b>Programa VI: Derivadas</b>	169
<i>Derivadas de funciones elementales</i>	
<i>Funciones de una función</i>	
<i>Derivación logarítmica</i>	
<i>Funciones implícitas</i>	
<i>Ecuaciones paramétricas</i>	
<i>Ejercicios de prueba VI</i>	
<i>Otros problemas VI</i>	
<b>Programa VII: Aplicaciones de las derivadas, Parte I</b>	193
<i>Ecuación de una recta</i>	
<i>Centro de curvatura</i>	
<i>Ejercicios de prueba VII</i>	
<i>Otros problemas VII</i>	
<b>Programa VIII: Aplicaciones de las derivadas, Parte II</b>	219
<i>Funciones trigonométricas inversas</i>	
<i>Derivadas de las funciones trigonométricas inversas</i>	

*Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas*  
*Valores máximos y mínimos (puntos estacionarios)*  
*Ejercicio de prueba VIII*  
*Otros problemas VIII*

**Programa IX: Derivadas parciales, Parte I** 247

*Derivada parcial*  
*Pequeños incrementos*  
*Ejercicio de prueba IX*  
*Otros problemas IX*

**Programa X: Derivadas parciales, Parte II** 273

*Derivadas parciales*  
*Problemas sobre tasas de cambio*  
*Cambio de variables*  
*Ejercicio de prueba X*  
*Otros problemas X*

**Programa XI: Series, Parte I** 293

*Series*  
*Media aritmética y geométrica*  
*Series de potencias de los números naturales*  
*Series infinitas*  
*Límites*  
*Series convergentes y divergentes*  
*Pruebas de convergencia; convergencia absoluta*  
*Ejercicio de prueba XI*  
*Otros problemas XI*

**Programa XII: Series, Parte II** 323

*Series de potencias, series de Maclaurin*  
*Series tipo*  
*Serie binomial*  
*Valores aproximados*  
*Límites*  
*Ejercicio de prueba XII*  
*Otros problemas XII*

**Programa XIII: Integración, Parte I** 353

*Introducción*  
*Integrales inmediatas*  
*Funciones de una función lineal*  
*Integrales de la forma*  
*Integración de productos; integración por partes*  
*Integración por fracciones parciales*  
*Integración de funciones trigonométricas*

<i>Ejercicio de prueba XIII</i>	
<i>Otros problemas XIII</i>	
<b>Programa XIV: Integración, Parte II</b>	<b>385</b>
<i>Ejercicios de prueba XIV</i>	
<i>Otros problemas XIV</i>	
<b>Programa XV: Fórmulas de reducción</b>	<b>415</b>
<i>Ejercicios de prueba XV</i>	
<i>Otros problemas XV</i>	
<b>Programa XVI: Aplicaciones de las integrales, Parte I</b>	<b>431</b>
<i>Ecuaciones paramétricas</i>	
<i>Valores medios</i>	
<i>Medias cuadráticas</i>	
<i>Resumen</i>	
<i>Ejercicios de prueba XVI</i>	
<i>Otros problemas XVI</i>	
<b>Programa XVII: Aplicaciones de las integrales, Parte II</b>	<b>453</b>
<i>Introducción</i>	
<i>Volúmenes de sólidos en revolución</i>	
<i>Centroide de una figura plana</i>	
<i>Centro de gravedad de un sólido en revolución</i>	
<i>Longitudes de curvas</i>	
<i>Longitudes de curvas; ecuaciones paramétricas</i>	
<i>Superficies de revolución</i>	
<i>Superficies de revolución; ecuaciones paramétricas</i>	
<i>Regla de Pappus</i>	
<i>Resumen de repaso</i>	
<i>Ejercicios de prueba XVII</i>	
<i>Otros problemas XVII</i>	
<b>Programa XVIII: Aplicaciones de las integrales, Parte III</b>	<b>477</b>
<i>Momentos de inercia</i>	
<i>Radio de giro</i>	
<i>Teorema de los ejes paralelos</i>	
<i>Teorema de los ejes perpendiculares</i>	
<i>Resultados útiles obtenidos</i>	
<i>Momentos segundos de área</i>	
<i>Figuras compuestas</i>	
<i>Centro de presión</i>	
<i>Profundidad del centro de presión</i>	
<i>Ejercicio de prueba XVIII</i>	
<i>Otros problemas XVIII</i>	

<i>Índice analítico</i>	XI
<b>Programa XIX: Integración aproximada</b>	513
<i>Introducción</i>	
<i>Integración aproximada</i>	
<i>Método 1 mediante series</i>	
<i>Método 2 mediante la regla de Simpson</i>	
<i>Demostración de la regla de Simpson</i>	
<i>Ejercicios de prueba XIX</i>	
<i>Otros problemas XIX</i>	
<b>Programa XX: Sistema de coordenadas polares</b>	535
<i>Introducción a las coordenadas polares</i>	
<i>Curvas polares</i>	
<i>Curvas polares tipo</i>	
<i>Ejercicios de prueba XX</i>	
<i>Otros problemas XX</i>	
<b>Programa XXI: Integrales múltiples</b>	561
<i>Doble sumación</i>	
<i>Integrales dobles; integrales triples</i>	
<i>Aplicaciones</i>	
<i>Otra notación</i>	
<i>Determinación de volúmenes mediante integrales múltiples</i>	
<i>Ejercicios de prueba XXI</i>	
<i>Otros problemas XXI</i>	
<b>Programa XXII: Ecuaciones diferenciales de primer orden</b>	589
<i>Introducción</i>	
<i>Formación de las ecuaciones diferenciales</i>	
<i>Solución de las ecuaciones diferenciales</i>	
<i>Método 1 mediante integración directa</i>	
<i>Método 2 por separación de variables</i>	
<i>Método 3 ecuaciones homogéneas mediante la sustitución <math>y = vx</math></i>	
<i>Método 4 ecuaciones lineales; uso del factor integrante</i>	
<i>Ejercicios de prueba XXII</i>	
<i>Otros problemas XXII</i>	
<b>Programa XXIII: Ecuaciones diferenciales de segundo orden</b>	633
<i>Ejercicios de prueba XXIII</i>	
<i>Otros problemas XXIII</i>	
<b>Programa XXIV: Métodos con el operador D</b>	675
<i>El operador D</i>	
<i>Operador inverso <math>1/D</math></i>	
<i>Solución de ecuaciones diferenciales mediante métodos con el operador D</i>	
<i>Casos particulares</i>	

XII

*Índice analítico*

*Ejercicios de prueba XXIV*  
*Otros problemas XXIV*

**Soluciones**

703

**ÍNDICE ALFABÉTICO**

735



# Consejos para uso de este libro

Este libro consta de veinticuatro lecciones, cada una de las cuales ha sido preparada con vistas a que el aprendizaje resulte lo más efectivo e interesante. Es casi como si se tuviera un tutor personal, ya que el estudiante procede a la marcha que le conviene y las dificultades que se le puedan presentar se le aclaran antes de que pueda adquirir conceptos o técnicas erróneos.

Cada programa se halla dividido en secciones llamadas cuadros, cada uno de los cuales ocupa por lo general media página. Al iniciar un programa, empiece con el cuadro 1. Lea cuidadosamente cada cuadro y ejecute todas las instrucciones y ejercicios que se le propongan. En casi todos los cuadros se le pide algún tipo de respuesta para asegurar que ha comprendido la información contenida, e inmediatamente puede comparar su respuesta con la correcta que viene en el cuadro siguiente. Para que pueda sacar el máximo provecho le recomendamos encarecidamente que cubra el cuadro siguiente hasta haber dado su respuesta. Cuando se encuentre con una serie de puntos, lo que se le pide es que supla la palabra, frase o número que falte. En cada paso irá recibiendo la información pertinente. No tiene por qué apresurarse: lea cuidadosamente los cuadros y siga fielmente las instrucciones. Así es como aprenderá.

Al final de cada cuadro encontrará un corto ejercicio de prueba. Éste versa directamente sobre lo que ha aprendido en la lección: las preguntas son directas y sin trampa alguna. Para que pueda practicar, se incluye otro conjunto de problemas: resuelva de ellos los más que pueda. No olvide que en matemáticas, lo mismo que en cualquier otra situación de la vida, la perfección viene con la práctica.

Aun cuando crea haber visto los temas con anterioridad, no deje de trabajar en ellos sin omitir ningún programa: esto le servirá como repaso útil y para llenar las lagunas que pudiera tener en sus conocimientos.



# Información útil de repaso

## I. Identidades algebraicas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b). \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

## II. Identidades trigonométricas

1)  $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$ ;  $\text{sec}^2\theta = 1 + \text{tan}^2\theta$ ;  $\text{cosec}^2\theta = 1 + \text{cot}^2\theta$

2)  $\text{sen}(A+B) = \text{sen} A \text{cos} B + \text{cos} A \text{sen} B$   
 $\text{sen}(A-B) = \text{sen} A \text{cos} B - \text{cos} A \text{sen} B$   
 $\text{cos}(A+B) = \text{cos} A \text{cos} B - \text{sen} A \text{sen} B$   
 $\text{cos}(A-B) = \text{cos} A \text{cos} B + \text{sen} A \text{sen} B$

$$\text{tan}(A+B) = \frac{\text{tan} A + \text{tan} B}{1 - \text{tan} A \text{tan} B}$$

$$\text{tan}(A-B) = \frac{\text{tan} A - \text{tan} B}{1 + \text{tan} A \text{tan} B}$$

3) Sea  $A = B = \theta$ .  $\therefore \text{sen} 2\theta = 2 \text{sen} \theta \text{cos} \theta$   
 $\text{cos} 2\theta = \text{cos}^2\theta - \text{sen}^2\theta$   
 $= 1 - 2 \text{sen}^2\theta$   
 $= 2 \text{cos}^2\theta - 1$

$$\text{tan} 2\theta = \frac{2 \text{tan} \theta}{1 - \text{tan}^2\theta}$$

$$4) \text{ Sea } \theta = \frac{\emptyset}{2} \quad \therefore \text{sen } \emptyset = 2 \text{sen} \frac{\emptyset}{2} \cos \frac{\emptyset}{2}$$

$$\cos \emptyset = \cos^2 \frac{\emptyset}{2} - \text{sen}^2 \frac{\emptyset}{2}$$

$$= 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\emptyset}{2}$$

$$= 2 \cos^2 \frac{\emptyset}{2} - 1$$

$$\tan \emptyset = \frac{2 \tan \frac{\emptyset}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\emptyset}{2}}$$

$$5) \text{ sen } C + \text{sen } D = 2 \text{sen} \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\text{sen } C - \text{sen } D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \text{sen} \frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$\cos D - \cos C = 2 \text{sen} \frac{C+D}{2} \text{sen} \frac{C-D}{2}$$

$$6) \begin{aligned} 2 \text{sen } A \cos B &= \text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B) \\ 2 \cos A \text{sen } B &= \text{sen}(A+B) - \text{sen}(A-B) \\ 2 \cos A \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B) \\ 2 \text{sen } A \text{sen } B &= \cos(A-B) - \cos(A+B) \end{aligned}$$

$$7) \text{ Ángulos negativos: } \begin{aligned} \text{sen}(-\theta) &= -\text{sen} \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \end{aligned}$$

8) Ángulos que tienen las mismas razones trigonométricas:

- (i) Mismo seno:  $\theta$  y  $(180^\circ - \theta)$
- (ii) Mismo coseno:  $\theta$  y  $(360^\circ - \theta)$ , o sea  $(-\theta)$
- (iii) Misma tangente:  $\theta$  y  $(180^\circ + \theta)$

$$9) \begin{aligned} a \text{sen } \theta + b \cos \theta &= A \text{sen}(\theta + \alpha) \\ a \text{sen } \theta - b \cos \theta &= A \text{sen}(\theta - \alpha) \\ a \cos \theta + b \text{sen } \theta &= A \cos(\theta - \alpha) \\ a \cos \theta - b \text{sen } \theta &= A \cos(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{donde: } \begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \end{cases}$$

\* La expresión  $\tan^{-1}$  tiene aquí el valor de la función circular arco tangente (arc tg). Análogamente, y en lo sucesivo, se mantendrá esta nomenclatura para todas las funciones circulares (N. del E.).

**III. Curvas típicas**

1) *Recta:*

$$\text{Pendiente, } m = \frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Ángulo entre dos rectas, } \tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Para rectas paralelas,  $m_2 = m_1$

Para rectas perpendiculares,  $m_1 m_2 = -1$

Ecuación de una recta (pendiente =  $m$ )

(i) Con la ordenada en el origen  $c$  sobre el eje real  $y$ :  $y = mx + c$

(ii) Que pasa por  $(x_1, y_1)$ :  $y - y_1 = m(x - x_1)$

(iii) Que une  $(x_1, y_1)$  con  $(x_2, y_2)$ :  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

2) *Circunferencia:*

Con centro en el origen y radio  $r$ :  $x^2 + y^2 = r^2$

Con centro  $(h, k)$  y radio  $r$ :  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Ecuación general:  $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

Con centro  $(-g, -f)$ ; radio  $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

Ecuaciones paramétricas:  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

3) *Parábola:*

Con vértice en el origen y foco  $(a, 0)$ :  $y^2 = 4ax$

Ecuaciones paramétricas:  $x = at^2, y = 2at$

4) *Elipse:*

Con centro en el origen y focos  $(\pm \sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

donde  $a =$  semieje mayor,  $b =$  semieje menor

Ecuaciones paramétricas:  $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$

5) *Hipérbola:*

Con centro en el origen y focos  $(\pm \sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ecuaciones paramétricas:  $x = a \sec \theta, y = b \tan \theta$

Hipérbola equivalente:

Con centro en el origen y vértice  $\pm \left( \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}} \right)$ :  $xy = \frac{a^2}{2} = c^2$  donde  $c = \frac{a}{\sqrt{2}}$

o sea  $xy = c^2$

Ecuaciones paramétricas:  $x = ct, y = c/t$



Programa 1

Números complejos

PARTE 1

## 1 Introducción: el símbolo $j$

La solución de una ecuación de segundo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  puede obtenerse por supuesto mediante la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Por ejemplo, si  $2x^2 + 9x + 7 = 0$ , tenemos entonces

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{(81 - 56)}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-9 \pm 5}{4}$$

$$\therefore x = -\frac{4}{4} \text{ o } -\frac{14}{4}$$

$$\therefore x = -1 \text{ o } -3.5$$

Esto es bastante inmediato, pero si resolvemos de la misma manera la ecuación  $5x^2 - 6x + 5 = 0$ , obtenemos

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 100)}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{(-64)}}{10}$$

y el paso siguiente consistirá ahora en determinar la raíz cuadrada de  $(-64)$ .  
¿Es (i) 8, (ii)  $-8$ , (iii) ninguna de las dos cosas?

## 2

Ninguna de las dos cosas

No es por supuesto ninguna de las dos cosas, ya que  $+8$  y  $-8$  son ambas raíces cuadradas de  $64$  y no de  $(-64)$ . En realidad,  $\sqrt{(-64)}$  no puede ser representado mediante un número ordinario, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea una cantidad negativa.

Sin embargo,  $-64 = -1 \times 64$  y por lo tanto podemos poner

$$\sqrt{(-64)} = \sqrt{(-1 \times 64)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{64} = 8\sqrt{(-1)}$$

$$\text{o sea } \sqrt{(-64)} = 8\sqrt{(-1)}$$

Por supuesto, nos vemos todavía enfrentados con  $\sqrt{(-1)}$ , lo cual no puede ser valorado como número real, por la misma razón de antes, pero, si introducimos la letra  $j$  para representar a  $\sqrt{(-1)}$ , entonces  $\sqrt{(-64)} = \sqrt{(-1)} \cdot 8 = j8$ .

Así, aunque no podamos calcular  $\sqrt{(-1)}$ , podemos representarlo por  $j$  y esto nos permite trabajar con mayor nitidez.

$$\sqrt{(-64)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{64} = j8$$

Análogamente,  $\sqrt{(-36)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{36} = j6$

$$\sqrt{(-7)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{7} = j\sqrt{7}$$

Así pues,  $\sqrt{(-25)}$  puede ponerse en la forma .....



**3**

$$\boxed{j^5}$$

Tenemos ahora una manera de rematar la ecuación de segundo grado que hemos iniciado en el cuadro 1.

$$5x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 100)}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{(-64)}}{10}$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm j8}{10} \quad \therefore x = 0,6 \pm j0,8$$

$$\therefore x = 0,6 + j0,8 \quad \text{o} \quad x = 0,6 - j0,8$$

Más adelante nos ocuparemos de los resultados de este tipo.

Por ahora, pase al cuadro 4.

**4**

**Potencias de j**

Puesto que j representa a  $\sqrt{(-1)}$ , consideremos algunas potencias de j.

$$\begin{array}{ll} j = \sqrt{(-1)} & j = \sqrt{(-1)} \\ j^2 = -1 & j^2 = -1 \\ j^3 = (j^2)j = -1 \times j = -j & j^3 = -j \\ j^4 = (j^2)^2 = (-1)^2 = 1 & j^4 = 1 \end{array}$$

Obsérvese de un modo particular el resultado último:  $j^4 = 1$ . Cada vez que se presenta un factor  $j^4$ , puede ser sustituido por el factor 1, de modo que la potencia de j se reduce a uno de los cuatro resultados anteriores.

$$\begin{array}{l} \text{p. ej. } j^9 = (j^4)^2 j = (1)^2 j = 1 \times j = j \\ j^{20} = (j^4)^5 = (1)^5 = 1 \\ j^{30} = (j^4)^7 j^2 = (1)^7 (-1) = 1(-1) = -1 \\ \text{y } j^{15} = (j^4)^3 j^3 = 1(-j) = -j \end{array}$$

así, de la misma manera,  $j^5 = \dots\dots\dots$

## 5

j
---

puesto que  $j^5 = (j^4)j = 1 \times j = j$

Todos se hacen de la misma manera.

$$j^6 = (j^4)j^2 = 1(j^2) = 1(-1) = -1$$

$$j^7 = (j^4)j^3 = 1(-j) = -j$$

$$j^8 = (j^4)^2 = (1)^2 = 1$$

Así (i)  $j^{42} = \dots\dots\dots$

(ii)  $j^{12} = \dots\dots\dots$

(iii)  $j^{11} = \dots\dots\dots$

y (iv) Si  $x^2 - 6x + 34 = 0$ ,  $x = \dots\dots\dots$

## 6

(i) -1, (ii) 1, (iii) -j, (iv) $x = 3 \pm j5$
---

El desarrollo de (iv) es como sigue:

$$x^2 - 6x + 34 = 0 \quad \therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{(36 - 136)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-100)}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{6 \pm j10}{2} = 3 \pm j5$$

o sea  $x = 3 + j5$  o  $x = 3 - j5$

Recuerde que para simplificar las potencias de j, sacamos la potencia más alta que podamos de  $j^4$ , y el resultado queda entonces en uno de los cuatro resultados: j, -1, -j, 1.

*Pase ahora al cuadro 7.*

7

**Números complejos**

El resultado  $x = 3 + j5$  que hemos obtenido, está formado por dos términos separados, 3 y  $j5$ . Estos términos ya no se pueden combinar más, puesto que el segundo no es un número real (por tener el factor  $j$ ).

En una expresión tal como  $x = 3 + j5$ ,

3 recibe el nombre de *parte real* de  $x$

5 recibe el nombre de *parte imaginaria* de  $x$

y los dos juntos constituyen lo que se denomina un *número complejo*.

Así pues, un número complejo = (parte real) +  $j$  (parte imaginaria)

En el número complejo  $2 + j7$  la parte real = .....

y la parte imaginaria = .....

8

Parte real = 2; parte imaginaria = 7 (NO  $j7$ )

Los números complejos tienen muchas aplicaciones en ingeniería. Para poderlos utilizar nos hace falta saber cómo se llevan a cabo con ellos las operaciones aritméticas ordinarias.

1. *Suma y resta de números complejos*. Esto es fácil como puede verse con los ejemplos siguientes.

*Ejemplo 1*  $(4 + j5) + (3 - j2)$ . Si bien las partes real e imaginaria no pueden combinarse entre sí, podemos quitar los paréntesis y sumar los términos de la misma especie.

$$(4 + j5) + (3 - j2) = 4 + j5 + 3 - j2 = (4 + 3) + j(5 - 2) = \underline{7 + j3}$$

*Ejemplo 2*

$$(4 + j7) - (2 - j5) = 4 + j7 - 2 + j5 = (4 - 2) + j(7 + 5) = \underline{2 + j12}$$

Así pues, en general,  $(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$

Haga ahora el que sigue:

$$(5 + j7) + (3 - j4) - (6 - j3) = \dots\dots\dots$$

## 9

$$2 + j6$$

$$\begin{aligned} \text{ya que } (5 + j7) + (3 - j4) - (6 - j3) \\ &= 5 + j7 + 3 - j4 - 6 + j3 \\ &= (5 + 3 - 6) + j(7 - 4 + 3) \\ &= \underline{2 + j6} \end{aligned}$$

Haga usted ahora de la misma manera las sumas que siguen:

$$\begin{aligned} \text{(i) } (6 + j5) - (4 - j3) + (2 - j7) &= \dots\dots\dots \\ \text{y (ii) } (3 + j5) - (5 - j4) - (-2 - j3) &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

## 10

$$\text{(i) } 4 + j \quad \text{(ii) } j12$$

Damos ahora aquí el desarrollo:

$$\begin{aligned} \text{(i) } (6 + j5) - (4 - j3) + (2 - j7) \\ &= 6 + j5 - 4 + j3 + 2 - j7 \\ &= (6 - 4 + 2) + j(5 + 3 - 7) \\ &= \underline{4 + j} \\ \text{(ii) } (3 + j5) - (5 - j4) - (-2 - j3) \\ &= 3 + j5 - 5 + j4 + 2 + j3 \quad (\text{¡Tenga cuidado} \\ &= (3 - 5 + 2) + j(5 + 4 + 3) \quad \text{con los signos!)} \\ &= 0 + j12 = \underline{j12} \end{aligned}$$

Esto resulta muy fácil, siempre que recuerde que las partes real e imaginaria tienen que ser tratadas absolutamente por separado —lo mismo que las  $x$  y las  $y$  de una expresión algebraica.

*Pase al cuadro 11.*



## 13

$12 - j59$
------------

ya que:

$$\begin{aligned} (26 - j7)(1 - j2) &= 26 - j7 - j52 + j^2 14 \\ &= 26 - j7 - j52 - 14 \\ &= 26 - j59 - 14 = \underline{12 - j59} \end{aligned}$$

Obsérvese que cuando tratamos con números complejos, el resultado del cálculo es también, por lo general, un número complejo.

Haga ahora por su cuenta esta multiplicación.

$$(5 + j8)(5 - j8) = \dots\dots\dots$$

## 14

89
----

Aquí está el desarrollo:

$$\begin{aligned} (5 + j8)(5 - j8) &= 25 + j40 - j40 - j^2 64 \\ &= 25 + 64 \\ &= \underline{89} \end{aligned}$$

A pesar de lo que hemos dicho anteriormente, tenemos aquí un resultado que no contiene ningún término en  $j$ . El resultado es, por lo tanto, totalmente real.

Este es más bien un caso excepcional. Observe los dos números complejos que acabamos de multiplicar. ¿Encuentra alguna particularidad en ellos? De ser así, ¿cuál es esta particularidad?

*Una vez dada la contestación, pase al cuadro siguiente.*

## 15

---

Son idénticos, salvo por el signo de en medio en los paréntesis,  
o sea  $(5 + j8)$  y  $(5 - j8)$

---

Un par de números complejos tales como éstos reciben el nombre de complejos *conjugados* y *el producto de dos números complejos conjugados es siempre totalmente real*.

Considérelolo de esta manera —

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ diferencia de dos cuadrados}$$

De análoga manera  $(5 + j8)(5 - j8) = 5^2 - (j8)^2 = 5^2 - j^2 8^2$   
 $= 5^2 + 8^2 \quad (j^2 = -1)$   
 $= 25 + 64 = \underline{89}$

Sin llegar a hacer todo el desarrollo diga si el producto de  $(7 - j6)$  y  $(4 + j3)$  es

- (i) un número real
- (ii) un número imaginario
- (iii) un número complejo

## 16

| Un número complejo |

ya que  $(7 - j6)(4 + j3)$  es un producto de dos números complejos que *no* son números complejos conjugados.

**Recuerde:** Dos números complejos conjugados son iguales salvo por el signo que hay entre los paréntesis.

$(4 + j5)$  y  $(4 - j5)$  *son* números complejos conjugados  
 $(a + jb)$  y  $(a - jb)$  *son* números complejos conjugados  
 pero  $(6 + j2)$  y  $(2 + j6)$  *no son* números complejos conjugados  
 $(5 - j3)$  y  $(-5 + j3)$  *no son* números complejos conjugados

Así pues, ¿por qué tenemos que multiplicar  $(3 - j2)$  para que el resultado sea totalmente real?

---





## 19

Damos aquí con detalle los resultados.

$$(a) \quad (i) \quad (4 - j3)(4 + j3) = 4^2 - j^2 3^2 = 16 + 9 = \boxed{25}$$

$$(ii) \quad (4 + j7)(4 - j7) = 4^2 - j^2 7^2 = 16 + 49 = \boxed{65}$$

$$(iii) \quad (a + jb)(a - jb) = a^2 - j^2 b^2 = \boxed{a^2 + b^2}$$

$$(iv) \quad (x - jy)(x + jy) = x^2 - j^2 y^2 = \boxed{x^2 + y^2}$$

(b) Para que el producto sea real, tenemos que multiplicar  $(3 - j5)$  por su conjugado, o sea por  $(3 + j5)$ , dando como resultado

$$(3 - j5)(3 + j5) = 3^2 - j^2 5^2 = 9 + 25 = \boxed{34}$$

Pase ahora al cuadro siguiente para hacer un corto ejercicio de repaso.

## 20

## Ejercicio de repaso

1. Simplifique      (i)  $j^{12}$       (ii)  $j^{10}$       (iii)  $j^{23}$

2. Simplifique:

$$(i) \quad (5 - j9) - (2 - j6) + (3 - j4)$$

$$(ii) \quad (6 - j3)(2 + j5)(6 - j2)$$

$$(iii) \quad (4 - j3)^2$$

$$(iv) \quad (5 - j4)(5 + j4)$$

3. Multiplique  $(4 - j3)$  por un factor adecuado para que el producto sea totalmente real. ¿Cuál es el resultado?

Una vez que termine el ejercicio, pase al cuadro 21.

**21**

Aquí vienen los resultados. Compárelos con los suyos.

1. (i)  $j^{12} = (j^4)^3 = 1^3 = \boxed{1}$

(ii)  $j^{10} = (j^4)^2 j^2 = 1^2(-1) = \boxed{-1}$

(iii)  $j^{23} = (j^4)^5 j^3 = j^3 = \boxed{-j}$

2. (i)  $(5 - j9) - (2 - j6) + (3 - j4)$

$$= 5 - j9 - 2 + j6 + 3 - j4$$

$$= (5 - 2 + 3) + j(6 - 9 - 4) = \boxed{6 - j7}$$

(ii)  $(6 - j3)(2 + j5)(6 - j2)$

$$= (12 - j6 + j30 - j^2 15)(6 - j2)$$

$$= (27 + j24)(6 - j2)$$

$$= 162 + j144 - j54 + 48 = \boxed{210 + j90}$$

(iii)  $(4 - j3)^2 = 16 - j24 - 9$

$$= \boxed{7 - j24}$$

(iv)  $(5 - j4)(5 + j4)$

$$= 25 - j^2 16 = 25 + 16 = \boxed{41}$$

3. El factor buscado es el conjugado del número complejo dado.

$$(4 - j3)(4 + j3) = 16 + 9 = \boxed{25}$$

¿Le ha salido todo bien? De acuerdo. Pase ahora al cuadro siguiente para continuar el programa.