

# DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

---

Bruno D'Amore

$\delta$

Didácticas  
**MAGISTERIO**

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

# DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

---

Bruno D'Amore

δ

Didácticas  
MAGISTERIO

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

# **Didáctica de la Matemática**

**Bruno D'Amore**

**Prólogo de Colette Laborde con una carta de Guy Brousseau**

**Presentación de Luis Rico Romero**

**Traducción de Ángel Balderas Puga**

**Revisión de Martha Isabel Fandiño Pinilla**

**Primer Premio en el 2000**

Concurso Nacional de Pedagogía de Italia  
"Lo stilo d'oro"

**Primer premio en el 2000**

Concurso Nacional de Pedagogía de Italia  
"Lo stilo d'oro"

## Colección **D i d á c t i c a s**

---

### **Didáctica de la Matemática**

#### **Autor:**

© Bruno D'Amore

Universidad de Bologna –Italia–

Prólogo de Colette Laborde con una carta de Guy Brousseau

Presentación de Luis Rico Romero

Traducción de Ángel Balderas Puga

Revisión de Martha Isabel Fandiño Pinilla

Libro ISBN: 978-958-20-0860-1

Primera edición en Italiano: 1999. Elementi di Didattica della Matematica

(Ed. Pitagora, Bologna –Italia–)

Primera edición en Español: 2006. Didáctica de la Matemática

(Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá –Colombia–)

La traducción de esta obra ha sido financiada por el SEPS

–Segretariato Europeo per le Pubblicazioni Scientifiche–

Via Val d'Aposa 7 - 40123 Bologna - Italia

seps@alma.unibo.it - www.seps.it

---

© COOPERATIVA EDITORIAL MAGISTERIO

Bogotá, D.C. Colombia

www.magisterio.com.co

#### **Dirección General**

Alfredo Ayarza Bastidas

#### **Dirección Editorial**

José Vicente Joven N.

#### **Composición**

Arte Joven

Bogotá, D.C. Colombia

Para Martha  
inteligente intérprete de los pensamientos más complejos  
cómplice inagotable de las epistemologías más bizarras  
dueña inesperada de mis sueños

Una vida sin investigaciones  
no es digna de ser vivida por el hombre

Platón,  
Apología de Sócrates, 38a 5-6

# Contenido

## Didáctica de la Matemática

### Prólogo

### Carta

### Presentación

### Prefacio

¿Enseñar a enseñar?

Las problemáticas del aprendizaje y las investigaciones

Este libro

Las citas

El lector ideal

Agradecimientos

Nota a la edición en español

## Capítulo 1

### Introducción a la didáctica de la matemática

1.1. El sustantivo *didáctica*

1.2. Los *contenidos* de la didáctica

1.3. La didáctica de la matemática como *arte*

1.4. Dos modos diferentes de entender la didáctica de la matemática: didáctica A y didáctica B

1.5. Didáctica A, como divulgación de las ideas

1.6. Otros ejemplos de didáctica A

1.7. Límites de la didáctica A

1.8. El “caso” de la versión escolar (ingenua) de la teoría elemental de conjuntos y las primeras investigaciones sobre la didáctica de la aritmética

## Capítulo 2

### Didáctica de la matemática como epistemología del aprendizaje matemático

2.1. Límites de la presente reseña

2.2. Aún más sobre la terminología. ¿Por qué buscar una teoría?

- [2.3. Hacia una teoría de la didáctica de la matemática](#)
- [2.4. Otras interpretaciones de la didáctica de la matemática](#)
- [2.5. Ulteriores posiciones actuales en la investigación en didáctica de la matemática](#)
- [2.6. Educación matemática y didáctica de la matemática: recientes desarrollos interpretativos](#)

### **Capítulo 3**

#### **El contrato didáctico**

- [3.1. Nacimiento de los estudios sobre el contrato didáctico](#)
- [3.2. Ejemplos](#)
- [3.3. Más ejemplos y reflexiones acerca del contrato didáctico](#)
- [3.4. Un ulterior ejemplo](#)
- [3.5. Diferentes acercamientos a la idea de contrato didáctico](#)
- [3.6. El contrato experimental](#)

### **Capítulo 4**

#### **Conflictos. Misconcepciones Modelos intuitivos. Modelos parásitos**

- [4.1. Algunos ejemplos para introducir las problemáticas](#)
- [4.2. Ejemplos con multiplicación y división](#)
- [4.3. Ejemplos con suma y resta](#)
- [4.4. Conflictos “internos” y conflictos “sociocognitivos”](#)

### **Capítulo 5**

#### **Imágenes, modelos y esquemas**

- [5.1. Imágenes y modelos: terminología](#)
- [5.2. Una propuesta de terminología](#)
- [5.3. Una investigación para buscar un acercamiento a los modelos mentales de los estudiantes. Modelos “externos”](#)
- [5.4. Modelos adecuados y modelos formados](#)
- [5.5. Modelos normativos y modelos descriptivos](#)
- [5.6. Aún sobre modelos mentales: una interpretación cognitivista](#)
- [5.7. Imágenes, representaciones mentales y modelos: aún otra interpretación](#)
- [5.8. Frame y script](#)
- [5.9. Modelos en el sentido de esquemas](#)

5.10. Mención de la teoría de los conceptos figurales

## **Capítulo 6**

### **Conceptos. Obstáculos**

6.1. Terminología

6.2. Los conceptos en la enseñanza

6.3. El papel del lenguaje en el aprendizaje y en la formulación de los conceptos

6.4. Las definiciones de concepto y de esquema dadas por Vergnaud

6.5. Introducción a los obstáculos

6.6. Obstáculos y errores

## **Capítulo 7**

### **El triángulo: maestro, estudiante, saber. Transposición didáctica.**

#### **Teoría de las situaciones didácticas**

7.1. El triángulo: maestro, estudiante, saber

7.2. Transposición didáctica

7.3. La teoría de las situaciones didácticas

## **Capítulo 8**

### **Matemática, didáctica de la matemática y lenguajes**

8.1. Matemática y lenguaje: una premisa

8.2. Lenguaje y lenguajes

8.3. El lenguaje de la matemática en el aula

8.4. Lengua común y lenguaje de la matemática en oposición entre ellos

8.5. Otros "lenguajes" para la matemática. Pasaje entre registros diferentes

## **Capítulo 9**

### **Ejercicios, problemas, situaciones problemáticas**

9.1. Terminología

9.2. Matemáticos, psicólogos, maestros y ... niños intervienen sobre "problemas"

9.3. La actividad de resolución de problemas

Apéndice

Problemas de rutina y situaciones “insólitas”. El “caso” del volumen de la pirámide

## **Capítulo 10**

### **Estilo cognitivo y perfiles pedagógicos**

10.1. Cognición y conocimiento

10.2. Perfiles pedagógicos, estilos cognitivos

10.3. Reorganización cognitiva

## **Capítulo 11**

### **Intuición y demostración**

11.1. Intuición: ¿qué es?

11.2. Comencemos a hablar de demostración. ¿Demostración de qué?

11.3. Una muy breve panorámica sobre algunas investigaciones sobre el demostrar

11.4. Argumentar y demostrar

11.5. Argumentar, explicar, demostrar, etc., en didáctica de la matemática

## **Capítulo 12**

### **Campos conceptuales, campos de experiencia, campos semánticos**

12.1. Campos conceptuales

12.2. Campos de experiencia

12.3. Campos semánticos

## **Capítulo 13**

### **Relaciones entre didáctica general y didáctica de la matemática. Una posible conciliación de puntos de vista 382**

13.1. Introducción

13.2. Problemas de existencia o de legitimidad

13.3. Problemas de epistemología

13.4. Problemas de formación

## **Apostillas**

Apostilla 1

Apostilla 2

**Bibliografía**

**El autor**

# Prólogo

Precisamente ahora que este siglo termina, me pareció en verdad muy oportuna la idea de publicar una obra acerca de la didáctica de la matemática. Me parece absolutamente pertinente hacer el punto de la situación sobre una disciplina que ha conocido una evolución profunda, incluso revoluciones, en estos últimos cincuenta años, como dice justamente el autor de esta obra. Ciertamente, la empresa se dificulta si no se limita a querer detenerse en una sola perspectiva teórica y se busca en cambio abrazar y articular los diferentes cuadros teóricos que se han desarrollado en los diferentes países para construir una presentación coherente. Se convierte incluso en un desafío si se desea dirigirla a un público que no se reduzca a la sola comunidad internacional de los expertos sino a la más vasta comunidad de los formadores de maestros e incluso de los maestros mismos.

Bruno D'Amore aceptó el reto, a pesar de estar plenamente consciente de las dificultades y de los riesgos que comportaba. Y tuvo razón dado que ha tenido pleno éxito. Como en sus precedentes obras, él ha podido sacar provecho de sus extraordinarios talentos de expositor y de su gran cultura, tanto para mantener un tono atento, como para atraer la curiosidad del lector y ofrecer siempre de cualquier modo un contenido rico y profundo.

Él propone, en efecto, una síntesis completa, documentada y un estado del arte avanzado en el dominio que constituye la didáctica de la matemática. Es un viaje en el tiempo y en el espacio, aquel que realiza la obra, por medio de referencias históricas y actuales, auténticamente internacionales, no sólo en didáctica de la matemática sino también más allá, en psicología, en las ciencias cognitivas, en sociología...

Una de las cualidades de la obra está en el hecho que permite incluso al lector no experto entrar rápidamente en las diferentes problemáticas del dominio, de escoger los diferentes cuadros teóricos que han sido desarrollados, de tener conocimiento de un consiguiente conjunto de resultados que la didáctica de la matemática ha aportado, sobre un

vasto campo. La didáctica no es más lo que era al inicio del siglo pasado, un conjunto de métodos de enseñanza de la matemática, sino que busca comprender mejor y modelizar los procesos de aprendizaje y enseñanza en sus aspectos específicos de las nociones matemáticas en juego; busca identificar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje; toma en cuenta la dimensión epistemológica de los conceptos matemáticos y de la transformación de los contenidos del saber con fines de enseñanza; integra las características sociales ligadas a toda enseñanza, las reglas implícitas que administran las interacciones entre maestros y aprendices. Es a este vasto dominio que se liga esta obra que, además, dedica capítulos específicos a aspectos cruciales en la enseñanza de la matemática como el de la demostración, el de las representaciones y el de los registros expresivos.

El autor de esta obra nos invita a un viaje magnífico, el de la investigación de la comprensión de los complejos fenómenos en juego en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática. Ciertos autores eligen un tren de alta velocidad, ofreciendo así al lector la posibilidad de cerrar la obra, una vez terminada su lectura, suspirando de placer por haber podido tan rápidamente penetrar el conocimiento en el campo, de haber podido saborear las cuestiones importantes y los aspectos cruciales, y finalmente de saber lo que “se necesita” saber. Otros autores prefieren los pequeños trenes rurales que no desprecian las desviaciones, para que el viajero pueda observar a placer todos los matices del paisaje y gozarlos. Esta obra presenta la ventaja de permitir un viaje a dos velocidades: una lectura global del vasto dominio que cubre, una lectura precisa y profunda gracias a los comentarios sobre las referencias, en particular en las numerosas notas a pié de página. También los ejemplos de investigación pueden ser recorridos a dos velocidades, dado que el autor buscó siempre proporcionar las hipótesis y los resultados globales y discutir después los aspectos precisos en modo más detallado.

No es por lo tanto un simple viaje en la didáctica de la matemática que nos ofrece Bruno D'Amore a través de su obra, sino una multiplicidad de idas y regresos, todos diferentes y en grado de suscitar descubrimientos continuamente renovados. Precisamente por

esto, nos ofrece una obra viva, útil y durable para muchos años. Una obra para el siglo XXI.

Colette Laborde

# Carta

Querido Bruno D'Amore

*Hace ya algún tiempo que recibí su bellísima obra “Elementos de Didáctica de la Matemática” y le ruego que acepte mis disculpas por haber tardado tanto en agradecerle.*

*Me prometí examinarlo con bastante detalle dado que el libro merece verdaderamente el interés y la atención de todos los estudiosos de didáctica. Pero no tuve la posibilidad, por motivos de tiempo, de hacerlo inmediatamente.*

*Usted ha hecho un trabajo notable que cubre un gran abanico de disciplinas y de investigaciones.*

*Verdaderamente lo felicito por haber sabido hacer una síntesis tan amplia, tan bien documentada y tan bien dirigida a las motivaciones de los investigadores y de los maestros. Es un instrumento de trabajo notable en particular para la formación de los maestros. Nosotros quisiéramos disponer de un libro así aquí. Espero que usted prepare algunas traducciones, al menos en francés.*

*En este momento no estoy en grado de discutir por escrito, con detalle, la presentación que usted hace de mis trabajos. Lo que leí me parece fiel. Pero sobre todo he observado bien que usted trata estas cuestiones de una manera seria, con inteligencia y con respeto. Lo importante es que usted hace progresar la reflexión. Sin duda hallaremos argumentos para discutir entre nosotros, dado que usted no sólo expresa las ideas de los trabajos existentes, sino que también expresa sus propias ideas. Lo que me parece muy bien dado que las considero interesantes. Espero que dentro de poco tengamos la oportunidad de intercambiar puntos de vista, a viva voz.*

*La tarea de dar una primera obra de síntesis sobre la didáctica de la matemática era una tarea importante pero difícil y delicada, y más que el público interesado a su empresa supera el grupo de investigadores y de los maestros especializados. Usted la cumplió de manera brillante.*

*Otro mérito de su obra es que constituye una base indispensable para avanzar hacia el estudio de la didáctica de las diferentes nociones matemáticas: el número, el álgebra, la geometría, la estadística, etc. Y la especificidad de esta parte de la didáctica necesita de la creación de la mayor parte de los conceptos que usted reúne aquí tan armoniosamente. Espero por lo tanto que estos “Elementos” –el título lleva consigo mismo una bonita ambición– sean completados rápidamente en este sentido.*

*Una vez más, lo felicito –pero que digo, le agradezco– por hacer conocer y vivir la didáctica de la matemática, y le deseo un gran éxito a sus elementos.*

*Con amistad,*

*Talence (Francia), 08 de octubre de 1999*

**Guy Brousseau**

**Lo autorizo a hacer pública esta carta.**

# **Presentación**

Este libro trata de didáctica de la matemática. Es decir, es un estudio en el que se habla y reflexiona sobre la educación y sobre las matemáticas. El objeto de esta reflexión lo constituye la didáctica de la matemática, sobre la reflexión teórica y la investigación en este campo, por ello también se habla sobre indagación sistemática y sobre método.

En las sociedades contemporáneas las matemáticas son parte esencial de la formación básica que han de compartir todos sus miembros. Por esto la educación matemática se considera un campo de trabajo que ocupa a un grupo considerable de profesionales, ya que se trata de una actividad social clave para la formación de los ciudadanos en una sociedad democrática avanzada.

El sistema convencional de enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje son parte relevante de la educación. La educación matemática abarca desde las primeras nociones sobre la cantidad, la forma y la deducción que enseñamos a nuestros niños hasta su culminación en una formación profesional o en estudios superiores.

La educación matemática implica una actividad intelectual intensa de carácter explicativo, que se sostiene sobre el aprecio por la belleza formal, las nociones de prueba y argumentación, y que se expresa mediante una gran variedad de acciones, términos, símbolos, técnicas, actitudes y recursos. Las matemáticas son una construcción humana que se utiliza con fines técnicos para la modelización de nuestro entorno y se aplica en la resolución de problemas prácticos. La educación matemática abarca el dominio de conceptos y procedimientos para comunicar conocimientos y organizar grandes parcelas de la actividad intelectual, científica, económica, cultural y social. Las matemáticas son el lenguaje de la ciencia y dan forma objetiva a multitud de problemas, permitiendo una crítica racional previa a la toma de decisiones.

Desde la perspectiva del especialista, consideramos la educación

matemática como un conjunto de ideas, conocimientos, procesos, actitudes y, en general, de actividades implicadas en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tienen lugar con carácter intencional (Rico, Sierra, Castro, 2000). La educación matemática la llevan a cabo determinados profesionales en unas instituciones y mediante unas tareas; en todos los casos se proponen dar respuesta a problemas y necesidades derivados de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los profesionales que trabajan en educación matemática abarcan un amplio abanico de tareas para llevar adelante, en toda su complejidad, la transmisión del conocimiento matemático a los ciudadanos en nuestra sociedad actual. Entre esas tareas tenemos: impartir clases de matemáticas, promover el aprendizaje de los escolares, evaluar el conocimiento de los alumnos, diseñar y evaluar materiales curriculares, escribir libros de texto y otros documentos escolares, formar profesores, gestionar o coordinar los aspectos administrativos de la educación matemática, orientar al profesorado de matemáticas, editar revistas y difundir experiencias educativas, dirigir departamentos o equipos de profesores, colaborar con grupos de investigación e innovación, investigar, y muchas otras que pueden considerarse.

Estas actividades se llevan a cabo en diversas instituciones del sistema educativo; centros de educación infantil y primaria, centros de secundaria, centros universitarios, centros de formación de profesores, departamentos universitarios, centros de investigación, dependencias administrativas, editoriales y otros.

En términos generales los especialistas distinguen tres sentidos distintos en educación matemática, cada uno de los cuales establece un campo diferente de actuación (Rico, Sierra, 2000).

En primer lugar, educación matemática como conjunto de conocimientos, artes, destrezas, lenguajes, convenciones, actitudes y valores, centrados en las matemáticas y que se transmiten por medio del sistema escolar. La educación matemática en este ámbito se refiere al conocimiento matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje; la finalidad de la educación matemática se centra aquí en

enriquecer y estructurar de manera adecuada los diversos significados de los conceptos matemáticos, superando la aparente exclusividad de su significación formal y deductiva. También se refiere a la organización y planificación necesarias para que estos conocimientos sean transmitidos, aprendidos, utilizados y compartidos socialmente por la totalidad de los ciudadanos.

En segundo lugar, educación matemática como actividad social que tiene lugar en unas instituciones determinadas y que es llevada a cabo por unos profesionales cualificados. En este caso se entiende la educación matemática como la totalidad de acciones y condiciones que hacen posible la enseñanza de las matemáticas. Abarca pues el conjunto de conocimientos, procesos y condiciones que posibilitan las interacciones entre profesores y alumnos en el medio escolar sobre un tópico matemático, es decir, que hacen viable la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La educación matemática se refiere aquí a la actividad intencional mediante la que se lleva a cabo la construcción, comprensión, transmisión y valoración del conocimiento matemático. En este ámbito, la educación matemática se refiere al análisis y estudio de las condiciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Parte importante de este ámbito se refiere al conocimiento y desarrollo profesional de los profesores de matemáticas.

En tercer lugar, educación matemática como disciplina científica; es en este caso cuando nos referimos a la Didáctica de la Matemática. Se entiende aquí disciplina en su sentido académico, como totalidad de marcos teóricos y metodológicos, estructuras conceptuales, análisis históricos y epistemológicos que permiten interpretar, predecir y actuar sobre un campo de fenómenos, en este caso los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas así como de los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos. La Didáctica de la Matemática tiene como objeto delimitar y estudiar los problemas que surgen durante los procesos de organización, comunicación, transmisión, construcción y valoración del conocimiento matemático.

La disciplina Didáctica de la Matemática tiene como objetos de estudio propios los dos campos antes mencionados, junto con su propia fundamentación teórica.

En términos generales, por investigación se entiende aquella actividad humana que se propone elaborar de manera sistemática conocimiento fundado sobre algún asunto. A lo largo de la historia del pensamiento se han decantado diversos métodos para la construcción sistemática de conocimiento de manera justificada. El método científico ha mostrado, desde comienzos de la edad moderna, su potencia y fecundidad para dar respuesta fundamentada a aquellas cuestiones que hombres y mujeres se plantean sobre su entorno físico, natural y social. Por método científico se entiende aquel modo ordenado de hacer basado en la observación y análisis sistemático de hechos y relaciones, en la formulación de hipótesis y teorías que interpreten, predigan o permitan actuar sobre tales hechos, y en el contraste y validación de esas hipótesis y teorías.

De manera precisa, se entiende por investigación la actividad de indagación basada en el método científico, sostenida por un marco epistemológico y orientada a la transformación del medio humano.

En este libro, Bruno D'Amore hace distintas aproximaciones a fundamentación teórica y a la investigación en Didáctica de la Matemática, con un planteamiento ordenado y metódico. En unos casos se ocupa de temas estrictamente curriculares, centrados en el contenido matemático, como ocurre con el debate sobre conceptos y objetos matemáticos, el análisis de los registros de presentaciones o con el análisis de las dificultades cognitivas. En otros casos su foco está puesto sobre las tareas del docente y el diseño y gestión de los materiales curriculares, como en la reflexión sobre el triángulo didáctico o sobre la escolarización del saber. También se introduce en la reflexión teórica y epistemológica con los trabajos sobre raíces, vínculos e interés y el dedicado a los obstáculos epistemológicos en la comprensión de un teorema de Cantor.

Este estudio es una revisión de diversos problemas de investigación que surgen de los distintos ámbitos de reflexión en la Didáctica de la Matemática.

El profesor D'Amore viene realizando desde hace años un esfuerzo

meritorio por conectar con el mundo hispano parlante de profesores de matemáticas, expertos en educación matemática e investigadores en didáctica de la matemática. En este manual hace una selección de algunas de sus reflexiones y preocupaciones de estos últimos años; en su transcurso se esfuerza por transmitirnos de manera amena y detallada sus indagaciones y conclusiones. Pone a nuestro alcance parte del trabajo realizado por los investigadores italianos en Didáctica de la Matemática, conectado con las aportaciones de otros grupos europeos; todo ello permite ampliar la perspectiva de los trabajos que se vienen realizando en este área en el espacio europeo. Estamos seguros de que estos estudios tendrán el alcance y difusión que merecen y serán de utilidad para profesores e investigadores.

Rico L., Sierra M., Castro E. (2000). La Didáctica de la Matemática. En: Rico L., Madrid D. (eds.). *Fundamentos Didácticos de las Áreas Curriculares*. Madrid: Editorial Síntesis.

Rico L., Sierra M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación. En: Carrillo J., Contreras L.C. (eds.). *Matemática española en los albores del siglo XXI*. Huelva: Hergué Editores.

Luis Rico Romero  
Universidad de Granada

# Prefacio

–Estoy totalmente de acuerdo contigo, –dijo la Duquesa– y la moraleja de esto es: “Tienes que ser aquello que quisieras parecer” o, más simplemente: “No pienses jamás de no ser diferente de lo que podrías parecer a los demás, que lo que eras o hubieras podido ser no era diferente de lo que hubieras sido si tú les hubieras parecido diferente”.

–Me parece que comprendería mejor este precepto –dijo gentilmente Alicia– si la pudiera tener escrita; pero sin duda, seguiré igualmente su consejo.

Lewis Carroll,  
Las aventuras de Alicia en el País de las maravillas.

## ¿Enseñar a enseñar?

Muchos creen que la tarea de los expertos de didáctica de la matemática sea la de “enseñar a enseñar” y que los destinatarios de este “enseñar” deban ser o aspirantes a maestros (en *formación inicial*, como se suele decir) o maestros en activo (cuando se hallan en la fase llamada *formación en servicio*).

Más allá de cuanto se halle radicada esta creencia, por ejemplo entre los colegas matemáticos, las cosas *no* son así; pero si dicha creencia se halla hoy tan difundida, alguna raíz, alguna justificación, algún origen debe tener... Creo que este origen puede rastrearse en las actividades que han caracterizado con mucha evidencia la didáctica de la matemática en los años de la primera grande revolución, la que va de 1950 a 1980<sup>1</sup>, y a la cual aún muchos hacen referencia, no teniendo ulteriores y más actuales informaciones.

En esos años, presuntos “expertos” dictaban cátedra y, proponiendo técnicas e ideas, sugiriendo argumentos y modalidades, inventando trucos y juegos, efectivamente parecían querer “enseñar a enseñar”... Estos “expertos” eran o matemáticos (a veces también psicólogos o pedagogos) que habían decidido dedicar su tiempo (o parte de su tiempo) a la relación directa con los maestros; o eran maestros con mucha experiencia que, fuertes de su militancia en el campo,

consideraban poder proponer ideas a los colegas o a los que aspiraban a tales<sup>2</sup>.

Pero, alrededor de finales de los años 70, se tuvo una segunda, y mucho más radical revolución:

- se clarificaron mejor las relaciones entre enseñanza y aprendizaje;
- se comprendió más a fondo que el aprender no depende sólo de la disciplina y de la metodología de enseñanza, sino también de fenómenos ligados a problemas de comunicación, sociológicos, antropológicos...;
- se entendió que la idea didáctica que había dominado hasta el momento, es decir: “si se enseña bien a los estudiantes estos aprenderán”, no sólo era ingenua, sino falsa: *una pura ilusión* (Moreno Armella, 1999);
- ...

Se comenzó también a reflexionar de manera seria y constructiva sobre los objetivos de la enseñanza de la matemática. Hans Freudenthal [1905-1990] escribía, ya en 1969: “La matemática es más que una técnica. Aprender la matemática significa conquistar la disposición a un comportamiento matemático” (Freudenthal, 1969), dirigiendo ya la atención sobre el aprendizaje, más que sobre la enseñanza.

## **Las problemáticas del aprendizaje y las investigaciones**

En este sentido, un hecho es desde mi punto de vista emblemático; desde el inicio de los años 50 y hasta los años 80, obviamente todos los congresos nacionales e internacionales se referían a la enseñanza, dado que se dirigían a maestros. Pero a partir del inicio de los años 80 se comenzaron a intitular los congresos con una doble denominación: enseñanza-aprendizaje. Ahora, muchos títulos de congresos han incluso perdido el primer sustantivo...

Pero si la tarea de los estudiosos de didáctica de la matemática *no* es la de *enseñar* a enseñar la matemática, entonces ¿cuál es?

Este es el punto: ¿cómo podría yo tener la pretensión de enseñar a maestros de primaria, o a profesores de preparatoria, cómo enseñar la matemática, yo que jamás he enseñado ni en primaria ni en preparatoria?

En cambio, lo que puedo hacer, es más bien diferente. Puedo estudiar las problemáticas del aprendizaje con base en la experiencia de los colegas de las escuelas preuniversitarias y, junto con ellos, *entenderlas*. Entenderlas quiere decir crear dispositivos de investigación científicamente significativos que expliquen los fenómenos de lo ocurrido o de la falta de aprendizaje, en ámbito de investigación. Entenderlas quiere decir entrar en el salón en calidad de investigador y conducir pruebas, discutiendo después los resultados de tales pruebas con maestros militantes.

Un estudioso de didáctica no puede más que limitarse a esto.

Pero el conocimiento de estos fenómenos, el análisis de los resultados de las experiencias y de las investigaciones hechas, difundidas cada vez más entre los maestros por medio de libros, revistas, congresos, cursos... no puede ser más que útil, promoviendo una mayor conciencia de la acción didáctica cotidiana, o sea la enseñanza, pero con una meta bien precisa y delineada: mejorar (en todos los sentidos posibles) el aprendizaje.

No es verdad que el experto de didáctica deba ser necesaria y exclusivamente aquel que desde hace mucho milita en el mundo de la enseñanza; es más, en un cierto sentido, pensar así es peligroso y de cualquier manera, a la prueba de los hechos, es muy difícil que eso suceda. La “didáctica de la matemática” es hoy en todos los sentidos una verdadera y propia disciplina y por lo tanto se le puede y se le debe aprender: no se trata para nada de buen sentido, o sólo de hacer experiencia como maestros, como padres o como observadores de hijos de amigos o familiares.

Me permito un ejemplo. Una vez se usaba decir que el histórico o el filósofo de la ciencia debía ser un viejo científico que, al final de su gloriosa experiencia de investigador, dedicaba los últimos años de actividad a la reflexión histórica o filosófica de su investigación y, más

en general, a la epistemología de su disciplina. Esta posición, aunque halla sido correcta en el pasado, pero lo dudo, ciertamente no lo es ahora. Si un científico ha dedicado todo su tiempo más fértil a la investigación científica, no ha tenido tiempo para estudiar seriamente la historia o la epistemología de su disciplina, a lo más lo habrá hecho sólo en sus ratos libres o como aficionado; y si comenzará a hacerlo de viejo, no podrá más que producir resultados provenientes de la experiencia, cierto, pero con mucha probabilidad sin una verdadera y propia profundidad original. Hoy el histórico o el filósofo de la ciencia se forma desde joven, dedicando toda su vida, todo su empeño y vitalidad juvenil al estudio explícito y específico de la historia o de la filosofía de la ciencia (naturalmente, en la "formación" incluyo la disciplinaria: hallo ridículo pensar en un histórico de la matemática que no sea matemático como formación de base...). Lo que no quita, ¡póngase atención!, que existan ejemplos excelsos de ilustres científicos pasados a la reflexión histórica y filosófica con resultados excelentes; lo que digo es que no se puede generalizar y que, de cualquier manera, el pasaje delineado, por la larga militancia en la ciencia a la producción histórica o filosófica, no es ni obligatorio ni estrictamente necesario.

Pues bien, yo pienso que lo mismo valga para la didáctica; la analogía es desde mi punto de vista obvia.

Existen jóvenes en todo el mundo que sólo han tenido experiencia universitaria, que han adquirido una fortísima preparación técnica en "didáctica de la matemática", así como sucede en las otras disciplinas matemáticas, gracias al estudio y a la *experiencia de investigación* (en el aula y con los maestros titulares), incluso sin tener experiencia directa o cotidiana, con un grupo escolar *propio*. Aquí no hablo de *experiencia* vendible bajo forma de anécdotas o de ejemplos, aquí hablo de verdadera y propia formación científica específica.

Creo que esta puntualización explica cómo las cosas han cambiado mucho en los últimos 20 años y que por lo tanto la respuesta a la pregunta que aún queda en el aire ("si la tarea de los estudiosos de didáctica de la matemática *no* es la de enseñar a enseñar la matemática, entonces ¿cuál es?") requiera una respuesta mucho más profunda que no una simple ocurrencia.

*En un cierto sentido, todo este libro tiene como objetivo responder a esta pregunta.*

## **Este libro**

Ahora, precisamente la novedad constituida por la existencia de una disciplina autónoma, confiada a matemáticos y no a expertos de la educación, es uno de los motivos que me han empujado a escribir este libro.

Otra novedad son los cursos universitarios oficiales que se dirigen a estudiantes aspirantes a maestros (cursos de licenciatura para maestros del nivel preescolar y de primaria; cursos de especialización para maestros de secundaria).

Otro impulso lo tuve del hecho que los maestros que encuentro con frecuencia continuamente me preguntan donde poder hallar explicados los términos que ahora se asoman por todas partes y que ellos oyen usar en nuestro ambiente (contrato didáctico, imágenes, modelos, conflictos, obstáculos,...) pero que no conocen.

Claro está, escribir y hacer público un libro como este es un gran riesgo; más allá de que existan ahora tanto una comunidad de estudiosos del sector como un vocabulario compartido, poner todo por escrito, ejemplificando y citando es una operación no inmune a críticas.

Sin embargo: alguien debía asumir este riesgo.

Pido a los lectores la clemencia de considerar este libro como un primer intento, más como una forma de servicio y de apuntes que no una verdadera y propia redacción definitiva. Eso implica que después tomaré en cuenta las críticas que llegarán puntuales y abundantes, y que espero sean de cualquier manera constructivas. Más adelante, una vez que las habré recogido, las usaré para escribir un verdadero y propio texto que idealmente verá coautores a todos aquellos que habrán contribuido en tal modo a extenderlo, clarificando, mejorando, modificando, corrigiendo lo que aparece ahora aquí de manera provisional.

Este primer intento tiene muchas lagunas de las que estoy plenamente

consciente. No obstante su volumen, al límite de la aceptabilidad por parte de cualquier editor de hoy en día, tiene notables ausencias. Eso depende en parte de mi incompetencia sobre ciertos argumentos de investigación, en parte del hecho que estos argumentos a veces se hallan aún en fase de sistematización, a veces que sé muy bien que muchos otros mejores que yo podrían escribir con mayor eficacia y capacidad. Por ejemplo, muy poco se dedica a las didácticas específicas, por ejemplo de la aritmética y de la geometría; nada se dedica a la didáctica del álgebra; nada a la didáctica asistida por instrumentos informáticos; nada se dedica a didácticas aún más específicas: trigonometría, valor absoluto, ecuaciones, límites, etcétera. Lo que busqué hacer fue dar sólo algunos de los elementos de la disciplina que considero básicos; cubrir o querer cubrir todos los argumentos posibles hubiera sido una empresa vana y presuntuosa, de carácter enciclopédico. Sin embargo, espero que al menos en parte la bibliografía específica pueda favorecer la investigación de los textos que el lector, estimulado por una frase aquí o allá, querrá leer para profundizar.

Una ausencia grave en verdad está ligada a las cuestiones que se refieren a los factores metacognitivos y afectivos, hoy tan centrales en los estudios de didáctica de la matemática. Pero ese sector constituye un ejemplo de ausencia que una cuidadosa bibliografía puede colmar: ¿porqué escribir de este argumento, cuando en el mercado existe ya un libro autorizado que lo trata?, libro que se puede consultar fácilmente. Se trata de Zan (1998). Yo aconsejo de verlo y después, utilizando la bibliografía ahí reportada, eventualmente partir para estudios personales y más específicos.

## **Las citas**

Es un deber que diga que la aparente extrañeza de las citas respeta en cambio algunas reglas que me puse y que el lector no tardará en reconocer. Indico siempre en el texto la edición que utilicé, para facilitar la investigación y para tener la confirmación de mis citas. Por lo que, por ejemplo, en general tiendo a citar al Autor extranjero

usando el año de la edición del texto original para situar cronológicamente la intervención; pero cuando existe una traducción española, y yo la conozco, la indico en la bibliografía de manera extendida. En la bibliografía me permití también, aunque no es usanza difundida, hacer aquí y allá algunos comentarios personales por ejemplo a las ediciones, o a las fechas, o a situaciones editoriales que hallé curiosas.

En muchos casos la traducción del texto que reporto es del traductor, otras veces, cuando existe, es la del traductor oficial.

Claro está, al lector podrá molestarle el hecho que yo me cite a mí mismo tantas veces. No se trata de una claudicación senil ni de una ridícula forma de complaciente auto-historización; sé bien que eso provoca si acaso el efecto contrario: no consagra, sino que por el contrario causa fastidio y críticas. El hecho es que este libro es un poco la historia de mi experiencia de 35 años de relación con maestros y estudiantes de los grupos donde pasé largas horas de pruebas empíricas; de tantos y tantos encuentros con maestros para discutir las pruebas antes y después de su realización. Lentamente pasé de situaciones experimentales ingenuas (las que publicaba bajo forma de informes en los años 70 y primeros años 80) a estudios más vinculados a lo que hoy se llama “didáctica de la matemática”; honestamente, ¿cómo no citar estos trabajos, que constituyen el esqueleto del libro, que constituyen su trama? Y además, aunque llevan mi nombre, muchas son simples ediciones de Memorias y por lo tanto colecciones de trabajos de otros... Habría podido simplemente escribir las partes que puedo incluir en mis investigaciones personales, evitando con cuidado de citarme. Pero muchas veces estos fragmentos son el resumen de algo más profundo y específico que un lector curioso podría querer leer directamente en la fuente. Por lo que, me pareció serio citarlas, y por lo tanto citarme, corriendo el riesgo de molestar un poco a alguien pero dando en cambio la oportunidad de profundizar, más que esconder las fuentes personales. O, al menos, esto es lo que creo.

## **El lector ideal**

Considero importante una advertencia explícita sobre el modo en el que se redactó este libro: ¿a quién considero como lector?, ¿para quién fue escrito el libro?, ¿cómo sugiero leerlo?

En el libro se sobreponen dos niveles y por lo tanto dos estilos muy evidentes.

El primer nivel es el que podría definir *explicativo*, de primera lectura, pensado para quien accede por primera vez a este argumento: estudiantes de didáctica, maestros, curiosos. Hay entonces una abundancia de ejemplos, incluso bastante elementales, descripción de situaciones, de casos, ejemplos de investigaciones que considero elementales, básicas, dirigidas a explicar cómo dar los primeros pasos en este ambiente.

El segundo nivel es un poco más docto, diría *de profundización*; me he preguntado y me han preguntado, a lo largo de los años, de contestar a preguntas relativas a investigaciones bibliográficas, en el intento de reconstruir la historia de los eventos didácticos que, considero, no nacen de manera repentina, sino que tienen siempre largos períodos de gestación.

Dos diferentes niveles implican también dos estilos lingüísticos, dos pesos diferentes, incluso dos esfuerzos diferentes por parte del lector. Habría podido (o quizás, ¿habría debido?) distinguir en manera neta las dos partes, pero este no es mi estilo personal... Y además vi que, también en los muy numerosos encuentros que tengo con maestros, existen muchas ocasiones en las que partiendo de cuestiones elementales, una pregunta, un estímulo, una intervención, me obligan inmediatamente a penetrar en profundidad en los conceptos: es un modo de proceder que, oralmente, tiene ventajas y, debo decir, una cierta eficacia. Decidí entonces mantener ese mismo estilo, aunque si, me doy cuenta, en una primera lectura un neófito puede hallarse cohibido al escoger cómo y qué cosa leer: confío esta elección a su inteligencia, a su curiosidad, a su interés real.

Por lo tanto, el libro está escrito, por así decirlo, en forma de espiral. Existen argumentos que se proponen primero de manera incompleta y provisional, pero que se retoman en capítulos posteriores de manera

más profunda, también gracias a nuevos elementos que he proporcionado entre el primero y el sucesivo contacto. Y sin embargo puede suceder que, en el mismo párrafo, de un concepto se dé una presentación elemental, incluso recurriendo a ejemplos, e inmediatamente se pase a una profundización aparentemente pedante. En tal caso, en primera lectura se puede incluso saltar y proceder, posponiendo la profundización para una eventual segunda lectura. En resumen, creo mucho en la teorización de Stanley Fish (1980) relativa al involucramiento creativo del lector, por parte de quien escribe; en efecto, el lector se considera “corresponsable en la producción del significado” (p. 7 de la edic. it.<sup>3</sup>). Creo entonces que el modo mejor para favorecer esta corresponsabilidad creadora sea el no dar al propio lector todo ya pre-construido; el autor puede dejarse ir, ser totalmente sí mismo, confiando en una *lectura cómplice*: la elección de cuándo y qué cosa saltar, en una primera lectura, se deja al lector. Intenté limitar al mínimo el uso de la matemática, incluso en un libro de didáctica de la matemática, con el fin de no impedir la lectura por parte de dos categorías de potenciales lectores que me interesan mucho: a) maestros y futuros maestros de la escuela primaria y preescolar; b) colegas expertos de didácticas disciplinarias diferentes y de didáctica general.

En los primeros creo mucho porque sé que a ellos se encomendó un encargo educativo determinante para la formación del individuo; basta pensar en lo que escribe Gardner (1993): “(...) en casi todos los estudiantes existe la mente “no escolarizada” de un niño de cinco años que lucha por emerger y por expresarse” (p. 14 de la edic. it.), lo que debe hacernos reflexionar mucho a todos, maestros de cualquier nivel escolar o universitario.

A los colegas expertos de didácticas disciplinarias diferentes y especialmente a los colegas expertos de didáctica general, a lo largo de todo el libro busco promover ideas para posibles conexiones, para colaboraciones al menos ideales. Podría en todo caso decir que todo el libro nació con base en el deseo, muy vivo en mí, de crear un recorrido de acercamiento teórico entre la didáctica general y las didácticas disciplinarias: ciertas elecciones de contenidos hechas en el libro y en mis investigaciones de los últimos años pueden explicarse

en esta dirección.

## Agradecimientos

Y ahora tendría unas mil personas a las cuales agradecer, pero sería largo e inútil hacerlo, aburriendo ulteriormente al lector. Me limito sólo a agradecer a aquellas personas a las que debo en verdad mucho, reservándome estrictamente a este libro.

Desde un punto de vista general, debo decir que Raymond Duval, Hermann Maier, Maria Luisa Schubauer-Leoni y Gérard Vergnaud me han enseñado mucho personalmente, con paciencia e incisividad; el haber aceptado tener seminarios de estudio e investigación en el Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática en Bolonia, del que soy responsable científico, fue para mí una gran ocasión de crecimiento y de reflexión. Quiero recordar que Gérard incluso generosamente escribió el *Prefacio* de mi libro *Problemas* (D'Amore, 1993a).

A propósito de esto, ¿cómo no agradecer de manera explícita a Colette Laborde por haber aceptado *siempre* las colaboraciones que le propuse y en particular por el Prólogo de este libro?

Otros colegas y amigos que me han ayudado a reflexionar sobre los temas generales que trato, son Athanasios Gagatsis, Luis Rico, Juan Godino, Ubiratan D'Ambrosio, Bernard Sarrazy, Ricardo Cantoral, Rosa María Farfán, Luis Radford y en particular Guy Brousseau; la relación con cada uno de ellos es profunda y fecunda. Desgraciadamente Francesco Speranza, que fue muy importante para mí, y no sólo en lo que concierne a mi formación matemática, no podrá ver este libro: con él discutí los capítulos 6 y 13; pero gran parte de mi preparación actual se debe a lecturas que él me aconsejó y, más en general, a reflexiones a las que él me condujo durante años.

Para no entrar aún en detalles demasiado específicos, puedo decir que aproveché siempre las invitaciones que me pude permitir como director científico del Congreso Nacional de Castel San Pietro Terme<sup>4</sup>, para contactar estudiosos de varias nacionalidades y de alto prestigio. Basta dar una hojeada a las Memorias para ver la calidad de los