LA DIDÁCTICA Y LA DIFICULTAD EN MATEMÁTICA

Análisis de situaciones con falta de aprendizaje

Bruno D'Amore
Martha Isabel Fandiño Pinilla
Inés Marazzani
Silvia Sbaragli

δ

Didácticas
MAGISTERIO

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

LA DIDÁCTICA Y LA DIFICULTAD EN MATEMÁTICA

Análisis de situaciones con falta de aprendizaje

Bruno D'Amore
Martha Isabel Fandiño Pinilla
Inés Marazzani
Silvia Sbaragli

δ
Didácticas
MAGISTERIO

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Colección Didácticas

La didáctica y la dificultad en matemática

Análisis de situaciones con falta de aprendizaje

Bruno D'Amore
Martha Isabel Fandiño Pinilla
Ines Marazzani - Silvia Sbaragli

Traducción de: Marcela Ferrari y Mayra Solana

Prefacio de: Andrea Canevaro

Colección Didácticas

La didáctica y la dificultad en matemática
Análisis de situaciones con falta de aprendizaje

Autores:
© Bruno D'Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla
Ines Marazzani, Silvia Sbaragli

Traducción de: Marcela Ferrari y Mayra Solana
Prefacio de: Andrea Canevaro

Primera edición: 2010.

www.magisterio.com.co
Dirección General
Alfredo Ayarza Bastidas
Dirección Editorial
José Vicente Joven N.
Composición
V-Joven

A quien nos lee con simpatía
A quien ama afrontar y no evitar las dificultades,
en cualquier situación.

Cultura quiere decir poder mirar las cosas
desde el punto de vista de otro.
Georg W. F. Hegel (1770-1831)

La diferencia debería ser la normalidad.
Andrea Canevaro

Contenido

La didáctica y la dificultad en matemática
Prefacio
Premisa
Capítulo 1
Dificultades en matemática y en su aprendizaje
1.1. El sentido de la dificultad en matemática
1.2. Especificidad de la dificultad en matemática
1.3. Dificultades ocultas en el aprendizaje de la matemática
1.4. Las dificultades, un análisis objetivo general
1.5. Dificultad y error
1.6. Dar espacio a la conciencia
1.7. Influencia de los factores psicológicos sobre la dificultad
1.8. Errores específicos
Capítulo 2
Obstáculos en el aprendizaje de la matemática
2.1. La teoría de los obstáculos
2.2. Obstáculos ontogenéticos
2.3. Obstáculos didácticos
2.4. Obstáculos epistemológicos
2.5. Algunas observaciones adicionales
2.6. Obstáculos y errores
2.7. Rol de la historia en la práctica escolar y el estudiante como constructor de nuevos conocimientos
2.8. El estudiante como investigador
Capítulo 3
Imágenes, modelos y misconcepciones
3.1. Imágenes y modelos de los conceptos
3.2. Significados intuitivos de los conceptos
3.3. Ejemplos de modelos intuitivos
3.4. Una interpretación constructivista de la idea de misconcepción
3.5. Ejemplos de misconcepciones

3.6. Conflictos «internos» y conflictos «socio-cognitivos»
3.7. Misconcepciones «evitables» e «inevitables»
3.8. Ejemplos de misconcepciones evitables e inevitables
3.9. Las posiciones de los «objetos» matemáticos
3.10. Misconcepciones derivadas de la incoherencia en los libros de texto
3.11. El caso de la altura de las figuras geométricas
3.12. Geometría sin vínculos espaciales
3.13. Reconsiderar críticamente las misconcepciones propias y ajenas
3.14. Misconcepciones relativas a los entes primitivos de la geometría
3.15. La relectura de una provocación
3.16. Los conceptos figúrales
3.17. Obstáculos y misconcepciones juntos
Capítulo 4
El contrato didáctico
4.1. Prácticas y meta-prácticas en la actividad escolar
4.2. Origen de los estudios sobre el contrato didáctico
4.3. Ejemplos
4.4. ¿Existe un inicio en los comportamientos contractuales?
4.5. Ejemplos y reflexiones sobre el contrato didáctico
4.6. Un ulterior ejemplo
4.7. Efecto Topaze
4.8. Efecto Dienes
4.9. Efecto Jourdain
Bibliografía
Los Autores

Prefacio

Cuando se nace, se entra inmediatamente en el mundo y se encuentra con el lenguaje, más bien, con la lengua «materna»; pero, se ¿encuentra también la «matemática materna»?

La lengua se aprende desde el nacimiento, al entrar en un mundo donde se habla. Quien nace escucha, percibe, emite sonidos, imita aquello que escucha, los balbuceos se convierten en un reclamo que pueden ser reconocidos como palabras por quien está cerca. Se inicia, así, un proceso que conduce a hablar. Es la «lengua materna». Los problemas se presentan por la diferencia entre tal expresión lingüística y la lengua «oficial» de una comunidad ampliada. O pueden presentarse problemas particulares, como la sordera, o la afasia o el autismo. Pero la mayoría de las personas considera que la lengua es una forma «natural», y que su enseñanza puede proceder desde aquella base fundamental.

Para la matemática, es probable que la gran mayoría de las personas tenga otras convicciones.

La idea más difundida es que la matemática sea «transmitida» completamente. Además, hay convicciones muy arraigadas como aquella que sostiene que algunos niños y niñas tienen una inclinación natural para la matemática («tienen disposición natural para la matemática»).

Estas convicciones naturalísticas condicionan fuertemente la percepción de las dificultades, y por consiguiente las formas de afrontarlas. Es conocido que los sujetos con síndrome de Down eran considerados «naturalmente» incapaces de hacer funcionar el pensamiento matemático. Se decía que estaban privados de este tipo de pensamiento, sosteniendo además que no podían ir más allá de los números de una cifra, careciendo de pensamiento abstracto. Para muchos, matemática y pensamiento abstracto estaban ligados por una fuerza misteriosa.

Algo por tanto ha cambiado. Pero creemos que no todas las consecuencias de este cambio han sido «concientizadas» por quienes

realizan tareas educativas en roles sociales (familiares) y profesionales (docentes y educadores sociales, psicólogos y otras profesiones «de apoyo»).
El texto de Bruno D´Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Ines Marazzani y Silvia Sbaragli, abordando el tema de las dificultades, puede ayudarnos a entender mejor algo importante: venimos al mundo y encontramos la lengua y la matemática; y están más vinculadas de lo que se cree, unidas por un proceso cultural y fisiológico que tiene una estructuración histórica compleja y fascinante. Tiene además dimensiones «micro» y «macro»: el individuo, con sus características específicas y originales; con límites normales y en algunos casos especiales; y el período amplio que llamamos «era». Y, es este el atractivo, las dos dimensiones se influencian recíprocamente y, por tanto, no pueden ser representadas como una dentro de la otra. Por esto hablamos de una estructuración compleja.
Se piensa en los sujetos con síndrome de Down, antes mencionado, pero pensemos también en los individuos con lesiones cerebrales: no han pasado muchos años desde la creencia generalizada (presente aún, y en individuos cuya preparación cultural hace casi increíble la permanencia de tal creencia) que la lesión, dañando el lenguaje, hace imposible el pensamiento. Las tecnologías, y no sólo, han hecho posible la contradicción total de dicha convicción. Y creemos que estas dimensiones «micro» influencian la dimensión «macro» en la cual parece que debemos sólo estar inmersos.
Quien crece debe explorar de muchas maneras, no sólo con su experiencia directa, sino a través de procesos deductivos e inductivos, composición de datos observados o supuestos; debe continuamente adaptar aquello que ha ordenado en su memoria. Es un proceso de crecimiento no uniforme ni idéntico. Comienza con el inicio de la vida, y la escuela tiene una gran tarea: convertir un proceso naturalístico individual en una estructuración extendida y codificada, capaz de introducir en una potencialidad más amplia y en continuo devenir.
Este paso es delicado. Pueden surgir dificultades, a las cuales se puede agregar la dificultad en el reconocimiento de la dificultad. Parece una

paradoja, y en parte lo es.
Las dificultades pueden ser abordadas a partir de algunas «creencias»:

- considerar que las aptitudes (la inteligencia) sean innatas, y que la propuesta didáctica puede alterar muy poco, o nada, los resultados de dichas aptitudes;
- considerar que existen procesos de aprendizaje que se presentan en continuidad (de la «lengua materna» a la educación lingüística), y otros procesos donde la discontinuidad es neta (la matemática);
- considerar que quien tiene una dificultad confirmada por un determinado diagnóstico debe tener una forma para remover dicho obstáculo (una forma más fácil que otra), en una previsión de aprendizajes menos exigentes;
- considerar que quien tiene una dificultad confirmada por un determinado diagnóstico, debe ejercitarse y entrenar su voluntad, repitiendo ejercicios según un modelo considerado normal.

A estas «creencias» podemos contraponerles otras hipótesis de trabajo:

- los procesos de aprendizaje viven en un entretejido de aspectos informales y formales que conciernen a todos los campos del saber y a diversas disciplinas;
- la continuidad y la discontinuidad son siempre necesarias, y deben jugar en un entretejido constructivo dinámico y variado;
- la resistencia al aprendizaje es parte integrante del mismo, y quitarla del medio para facilitarle el camino a un sujeto con problemas particulares, puede ser un modo de acrecentar las dificultades (pensemos en quien tiene problemas de dislexia o discalculía, y es incitado a ejercitarse; un sadismo ciertamente no deliberado y fruto de la ignorancia del problema);
- todos los sujetos pueden ser apoyados en la búsqueda de su propia estrategia de aprendizaje; la pluralidad de estrategias puede acompañar una perspectiva unitaria.

La reflexión que Bruno D’Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Ines Marazzani y Silvia Sbaragli, hacen sobre el *estatus de los errores*,

afecta una concepción del compromiso didáctico que busca liberarse del innatismo (la causa del error es interna, estable e incontrolable: «el estudiante ha cometido un error porque no es inteligente») por una dimensión constructivista (la causa es interna, variable y controlable: «el estudiante debe seguir trabajando para superar su error»).
Y esto conduce a que los *mediadores* y la *lógica del dominó* deberían conectarse.
Podemos utilizar la imagen de quien quiere atravesar un río para ir de una orilla a la otra y no desea mojarse: colocara los pies sobre las piedras que afloran, quizá coloque una piedra para construir un punto de apoyo (un mediador) donde faltara... Y los mediadores se conectan uno con otro. Si un mediador no invita al siguiente, no sería tal. Podría convertirse en fetiche, en prisionero, en cese forzado, en ilusión de paraíso alcanzado…
Quien lea encontrará un texto exigente y fascinante. La tarea de quien introduce, además de testimoniar el compartir que en este caso también es amistad, puede ser quien da un trasfondo complementario: no específico (no de un matemático) sino por un estudioso curioso, que frecuenta desde hace años las compañías (no malas) de quienes viven algunas dificultades.
Quién lee se conforte: los errores pueden ser fructíferos. Y las dificultades pueden mejorar la comprensión.
Es mejor pensar en un mundo imperfecto e incompleto y sentirse útil para contribuir a mejorarlo
¡Buena lectura!

Andrea Canevaro
Docente en la Facultad de Ciencias de la Formación,
Universidad de Bologna (Italia)

Premisa

Aunque los estudios y las investigaciones teóricas y empíricas sobre el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, sean los más consolidados y desarrollados respecto a estudios análogos de otras disciplinas, está a la vista de todos el hecho que, pese al mayor empeño de investigadores y docentes, persiste un quiebre estructural en el aprendizaje de esta disciplina.

A pesar del empuje innovador y los siempre mayores conocimientos que la investigación produce, a pesar de los congresos, de las revistas, de los textos que divulgan e ilustran los resultados de las investigaciones; la matemática continua a generar cierta antipatía entre adultos y jóvenes, a producir resultados negativos, constituyéndose en una de las disciplinas de menor interés. Los jóvenes que se inscriben en facultades científicas están en neta baja mundial (aunque las inscripciones a matemática en Italia están en recuperación).

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática existe algo que no está funcionando bien, es decir, existen demasiadas *dificultades* en el aprendizaje de la matemática.

¿De qué se trata?

Pese al gran número de estudios realizados básicamente en psicología sobre causas funcionales, orgánicas, sensoriales etc., de los cuales se hace sólo una rápida reseña en este libro; los trabajos de análisis, de estudio, de investigación y las experimentaciones sobre la dificultad en el aprendizaje de la matemática, desde el punto de vista de la investigación en didáctica de la matemática, no son muchos.

Ciertamente, entre los más recientes, limitándonos al panorama italiano, se destaca por su complejidad y profundidad el de Rosetta Zan (2007). Sin embargo, consideramos que una pluralidad de intervenciones y de estudios, también diferentes entre sí, aunque con intersección no vacía, puede orientar al Lector en esta literatura. Entre más estímulos haya, es posible un mayor impulso a analizar las propias situaciones de aula, a escarbar en los motivos, en las causas

de estas dificultades, no sólo con finalidad analítica, sino también para poder intervenir con conocimiento de causa y, por tanto, con especificidad.
Así, hemos decidido recoger nuestras ideas y propuestas de reflexión sobre este argumento y proponer un análisis dividiéndolo en cuatro momentos que son finalmente, los capítulos del libro:
el primero, de carácter expositivo general; el segundo, presentando en detalle la teoría de los obstáculos; el tercero, analizando la idea de misconcepción; el cuarto, verificando cómo el contrato didáctico constituye una dificultad específica; una bibliografía final bastante amplia que podría ayudar al Lector deseoso de profundizar estos temas.
Se trata de una pequeña gota en el mar de las dificultades, de lo cual nos damos cuenta perfectamente, pero es una ayuda para quienes, desarmados frente a los múltiples y repetidos errores siempre iguales, no saben qué hacer. Quizás un estímulo crítico, tal vez una recolección de ejemplos, tal vez el mínimo de teoría que eleva el ejemplo a una idea más general, podrán ser de ayuda al lector-docente.
Nuestra firme convicción es que un docente debe ser capaz de reflexionar sobre las dificultades, sobre los errores (que son evidencias externas), sobre las causas, sobre el estudio de intervenciones para remediar; no se puede formar un docente de matemática sólo en matemática y en didáctica, se requiere también introducirlo en las específicas dificultades de las situaciones de aula más realistas y menos demagógicas.
Nuestra esperanza es que este libro ayude a los docentes, que tienen la voluntad de leerlo, meditarlo, a reconocer situaciones ya experimentadas y usarlo.

Los autores

Nota al texto

1. La terminología de la didáctica de la matemática usada en este libro es poco explicada, esto porque se considera que dicha terminología es ya abundantemente difundida entre los docentes de matemática. En general, se hace referencia a D'Amore (1999).

2. Este libro, en el tiempo, ha sido pensado, discutido y realizado al unísono de los cuatro autores, todos miembros del NRD[1] de Bologna. Sin embargo, cada uno de los autores ha desarrollado con mayor intensidad el tema-capítulo correspondiente presentando su campo de estudio e investigación actual. Así, Martha Isabel Fandiño Pinilla es autora del Capítulo 1; Bruno D'Amore del Capítulo 2; Silvia Sbaragli del Capítulo 3 e Ines Marazzani del Capítulo 4.

---

1 NRD Nucleo di Ricerca in Didattica (Núcleo de investigación en Didáctica).

Capítulo 1

Dificultades en matemática y en su aprendizaje

1.1. El sentido de la dificultad en matemática

La palabra «dificultad», un común pero difuso diccionario de la lengua italiana (el de Nicola Zingarelli, editado por Zanichelli en Bologna), la define cómo: «Cualidad de aquello que es difícil. Complicación, molestia, obstáculo, impedimento». La misma definición se encuentra en la enciclopedia Zanichelli.
Las definiciones tienen en común una cierta incoherencia entre un aspecto objetivo (dificultad, obstáculo) de la dificultad y uno más subjetivo («difícil», ¿para quién?, ¿respecto a qué?). Creemos que esta incoherencia reina soberana tanto en la visión popular de dificultad, como en la visión estrictamente escolar. Una materia es definida «difícil» sobre la base de la generalidad estadística de los resultados obtenidos, pero no existen *caracterizaciones objetivas* de esto (Fandiño Pinilla, 2006, lo demuestra ampliamente en el caso de la matemática).
Ahora, limitándonos a la dificultad en matemática, esta puede asumir por lo menos tres «sentidos» distintos, con referencia a nuestro interés:

- la dificultad en matemática del estudiante,
- la dificultad específica de algunos argumentos de la matemática,
- la dificultad del docente en la gestión de una situación matemática,

recalcando, más o menos en la misma dirección propuesta por Zan

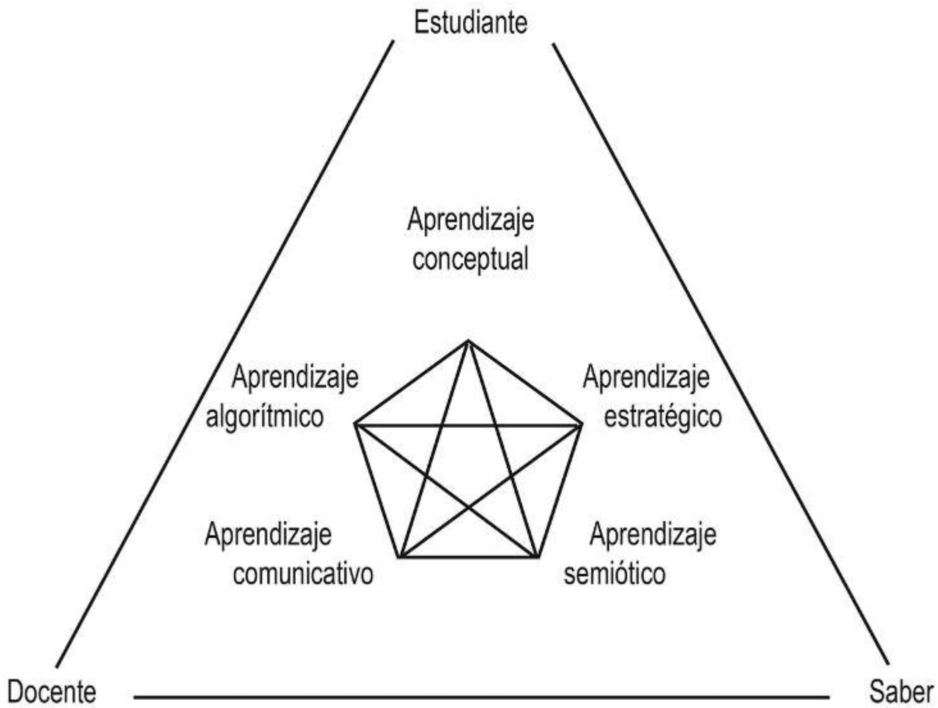
(2007), una estructura triangular que nos lleva mentalmente a considerar «el triángulo de la didáctica»: estudiante, docente, Saber (D'Amore 1999; para un análisis detallado de este esquema, véase: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002).

1.2. Especificidad de la dificultad en matemática

La dificultad en matemática puede ser analizada de forma mucho más específica, siguiendo una indicación que distingue varias componentes en el aprendizaje de la matemática (Fandiño Pinilla, 2005b). En efecto el aprendizaje de la matemática puede incluir diferentes tipos de aprendizajes:

- conceptual (noética);
- algorítmico (saber llevar a término una operación o secuencias compuestas de operaciones elementales, ...);
- estratégico (resolución de problemas, ...);
- comunicativo (argumentaciones, validaciones, demostraciones, ...);
- de la gestión de diversos registros semióticos.

Que las dificultades en estos particulares tipos de aprendizajes sean específicas está a la vista de todos: en efecto, hay estudiantes que han construido conceptos, pero no saben ejecutar algoritmos; estudiantes que llevan a término un algoritmo, pero no saben qué conceptos están a la base de dicha ejecución; estudiantes que han construido conceptos y saben ejecutar algoritmos, pero no saben resolver problemas; estudiantes que han construido conceptos, saben ejecutar algoritmos, saben resolver los problemas pero no saben comunicar aquello que han construido personalmente… y así sucesivamente; es por demás fácil hacer ejemplos para cada nivel escolar.
Por lo tanto, el estudio de las dificultades puede ser específico para cada una de los componentes del aprendizaje de la matemática. No obstante, algunas se entrelazan entre sí.



Efectivamente, pocos han sido los estudios específicos dedicados a la dificultad de la gestión de las diversas representaciones semióticas que el estudiante encuentra desde el primer día de clase (véase: D'Amore, 1998, 2000, 2002a, b, por ejemplo). En uno de estos trabajos (2002b) se da como hipótesis que una de las causas más difundidas del fracaso en el aprendizaje de la matemática es debida a la incapacidad de gestionar, al mismo tiempo, diversos registros semióticos y este hecho se confirma con numerosos ejemplos extraídos de la vida de aula.

Precisamente las especificidades en este campo fueron tomadas (a veces inconscientemente) como prototipos por algunos estudiosos en un pasado reciente, incluso sin distinciones notables.

Por ejemplo, la diferencia entre el «saber» (conceptual) y el «saber hacer» (un híbrido no bien definido, entre lo algorítmico y lo estratégico) viene tomado como específico de la dicotomía: aprendizaje de conocimientos y aprendizaje de competencias. Hoy en día esta visión tan simplista y banal ha sido totalmente superada (D'Amore, Godino, Fandiño Pinilla, 2008).

Volviendo a la terna enunciada en 1.1. sobre la dificultad específica de algunos argumentos de la matemática hay poco que decir.

Por ejemplo, construir el conocimiento del objeto matemático «propiedad conmutativa de la adición en N» tiene siempre un resultado positivo desde los primeros niveles de escolaridad; mientras que construir el conocimiento del objeto matemático «fracción» tiene casi siempre un resultado desastroso (y no sólo en los primeros niveles de escolaridad). Esto significa que existen obstáculos epistemológicos para el aprendizaje (de algunos temas) de la matemática; a este argumento notable dedicaremos todo el Capítulo 2 de este libro.
Por tanto, que existan en el estudiante dificultades objetivas en el aprendizaje de la matemática es aceptado por todos; algunas de éstas son de origen sensorial o físico o neurológico de carácter objetivo y evidenciadas, de las cuales vamos a ocuparnos brevemente en el parágrafo 1.4.; otras son más sutiles y, en nuestra opinión, están estrechamente relacionadas con las dificultades del docente en la gestión de una determinada situación matemática en el aula. Esto se debe a que algunos problemas se esconden entre los pliegues de la gramática de la comunicación (o, más en general, de la interacción) humana. A estos problemas dedicamos unos párrafos de este Capítulo 1 y más adelante, con detalles más específicos, los Capítulos 3 y 4.
Pero hay dificultades mucho más difíciles de reconocer y de verificar, y que, por lo tanto, es más complejo remediar.

1.3. Dificultades ocultas en el aprendizaje de la matemática

A las dificultades más «sutiles» del aprendizaje de la matemática se han dedicado algunos de los más notables estudiosos de la materia.
Sólo para dar la idea de lo que se trata, nos limitaremos aquí a dos ejemplos.

Primer ejemplo.

Una de las dificultades más nefastas, revelada por Guy Brousseau, consiste en el hecho de que el docente se convence a sí mismo y convence a sus estudiantes de que lo que están haciendo en el aula es buena matemática aunque no lo sea en absoluto. Al pasar a otro nivel escolar, o la primera dificultad, o al cambiar de docente, esta situación revela las fallas que a la larga son insuperables. Para explicar de qué se trata recurrimos a un extenso pasaje de D'Amore (2007a):

> «El docente propone a sus estudiantes un problema que él cree análogo a otro que había propuesto anteriormente, pero en el cual habían fracasado. Él espera que reconozcan la similitud y que utilicen las correcciones y las explicaciones que ha dado para reproducir el mismo método de resolución, a fin de afrontar con éxito la nueva situación. El docente recomienda encarecidamente a sus estudiantes que busquen y usen esta analogía. Este procedimiento es exitoso, tiene éxito desde el punto de vista del docente. Pero es, en realidad, un fraude epistemológico. El estudiante da una respuesta correcta, pero no porque él haya entendido la necesidad matemática o lógica a partir del enunciado, no porque haya "entendido y resuelto el problema", no porque haya aprendido el objeto matemático, sino simplemente porque estableció una similitud con otro ejercicio, no ha hecho más que reproducir una situación hecha por otro. Lo que es aún peor, es que para el estudiante ésta era la solicitud del docente. Creerá haber comprendido la cuestión matemática en juego, mientras que no ha hecho otra cosa que interpretar una intención didáctica enunciada explícitamente por el docente y dar la respuesta esperada.
> Este «abuso de la analogía» que Guy Brousseau ha puesto en evidencia a finales de los años '70, y sobre el cual se basan muchas otras acciones didácticas en el aula, es una de las formas más corrientes de aquello que él mismo definió como «efecto Jourdain», uno de los efectos del contrato didáctico [al cual dedicaremos el Capítulo 4]. El docente obtiene la respuesta esperada con medios que no tienen ningún valor y hace creer al estudiante (a la familia, a la institución) que ha realizado la actividad matemática que era la meta a lograr.

La actividad del estudiante debe responder, por tanto, a dos limitantes incompatibles:

- aquella determinada por las condiciones a-didácticas que determinan una respuesta original y la organización de conocimientos específicos;
- aquella determinada de las condiciones didácticas que tienen el objetivo de producir la respuesta esperada independientemente de su modalidad de elaboración».

Este tipo de actividad produce situaciones aparentemente exitosas, mientras que se prepara el camino a fracasos sucesivos: una clamorosa dificultad que parece entonces inexplicable «Pero cómo, el año pasado iba tan bien en matemática y, por el contrario, este año…». »

Segundo ejemplo.

A la propuesta en el aula de efectuar una multiplicación entre binomios (x+1) (x-1), el estudiante X responde x^2-1; el docente aprueba; a la propuesta (x+2) (x-2), el mismo estudiante X responde x^2-2; respuesta ante la cual el docente queda perplejo. En general, el estudiante X ha entendido que (x+a) (x-a) es igual a x^2-a. En el primer caso ha funcionado pero en el segundo no. Misterios de la matemática, percibida como casual. Si el docente se hubiera limitado a la primera prueba, habría concluido que X ha construido el concepto de producto notable; mientras que, por el contrario, X está muy lejos de éste.
A la misma prueba, el estudiante Y contesta x^2-1, mientras que a la propuesta (x+2) (x-2), también Y contesta x^2-2 porque ha operado así: (x+a) (x-a) obteniendo $x^2+ax-ax-a^2$ pero las dos ax se "simplifican" entre sí obteniendo $x^2+a-a-a^2$; después se "simplifican" también +a y -a^2 obteniendo, exactamente x^2-a.
El mismo error, que se manifiesta con una respuesta errónea, puede tener causas totalmente diferentes.
Esto sucede a menudo, pero si un docente se limita a mirar el resultado y no el proceso, no comprende que hay detrás de cada error.

Veamos dos modos diferentes de producir el mismo resultado (no correcto, obviamente) $\frac{1}{2}$ para la suma $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3-1}{8}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Una vez más se confirma el hecho que un error es sólo la *manifestación de un malestar cognitivo*, pero no nos dice nada de la *causa*; por tanto, no está dicho que la respuesta correcta, aquella esperada, sea la demostración del éxito de la construcción del conocimiento.
Se convierte en decisión importante comprender no sólo cual es la dificultad, sino también su origen, ya que, como hemos visto, el error puede tener causas completamente diferentes.
Entre las técnicas difundidas para el análisis del origen de las dificultades, están las entrevistas, los TEPs, la bitácora, los «informes»,… instrumentos esenciales para diagnosticar y para la evaluación compleja de la actividad de aula (véase: Fandiño Pinilla 2006).
Sobre estos puntos, decisivos, sugerimos la lectura de Zan (2007).

1.4. Las dificultades, un análisis objetivo general[2]

Los textos que consideramos fuentes principales para un uso correcto de términos y clasificaciones (a escala internacional) son los de la Organización Mundial de la Salud, actualmente en uso por los especialistas (médicos, neuropsiquiatras, psicólogos) de todo el mundo:

- Organización Mundial de la Salud (1994). *ICD-10. Décima revisión de la clasificación internacional de los síndromes de los disturbios físicos y de comportamiento*. Milán: Masson;
- Organización Mundial de la Salud (2001). *ICF Clasificación internacional del funcionamiento de la discapacidad y de la salud*. Trento: Erickson.