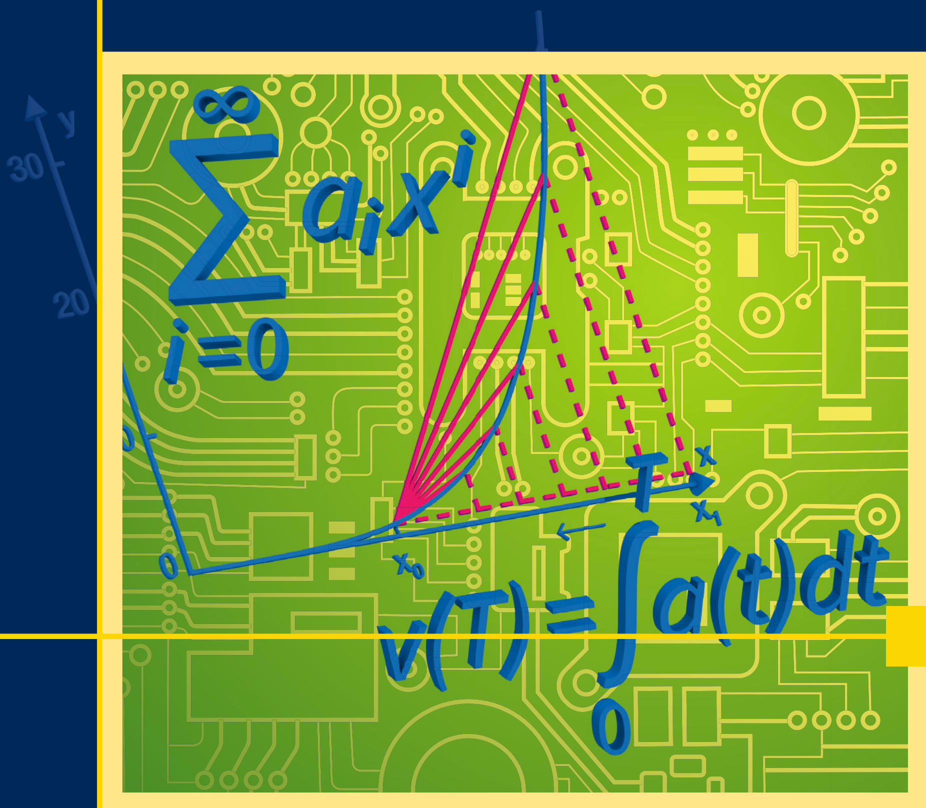
Michael Knorrenschild

Mathematik für Ingenieure 1

Grundlagen im Bachelorstudium



2., aktualisierte Auflage

HANSER

Knorrenschild

Mathematik für Ingenieure 1

Michael Knorrenschild

Mathematik für Ingenieure 1

Grundlagen im Bachelorstudium

2., aktualisierte Auflage

HANSER

Autor:
Prof. Dr. rer. nat. Michael Knorrenschild, Bochum

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C013736

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Satz: Michael Knorrenschild
Druck und Bindung: Eberl & Kœsel, Altusried-Krugzell
Austattung patentrechtlich geschützt. Kösel FD 351, Patent-Nr. 0748702
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47190-0
E-Book-ISBN 978-3-446-47207-5

Vorwort

Schon wieder ein Mathematik-Buch für Ingenieurstudiengänge. Es gibt doch schon so viele. Richtig.
Dieses hier ist anders. Die Zeiten haben sich geändert. Bachelor-Studiengänge bieten ein verkürztes Studium (und die Kürzungen fanden in manchen Fällen auf Kosten der Grundlagenfächer statt). Anwendungsorientiert soll gelehrt werden, mühselige Rechnerei werde ja vom Computer übernommen. Das ist einleuchtend. Ein Irrtum ist es jedoch, daraus zu schließen, es brauche weniger Mathematik-Kenntnisse. Rechnen ist nicht Mathematik. Um einen Computer für mathematische Fragestellungen zu verwenden, bedarf es nicht weniger Mathematik-Kenntnisse, sondern im Gegenteil mehr, im Sinne von vertiefte, Mathematik-Kenntnisse. Durch unsachgemäße Verwendung von Computern entsteht regelmäßig volkswirtschaftlicher Schaden (und manchmal auch an Leib und Leben). Ingenieure benötigen also ein Verständnis mathematischer Begriffe und Methoden, um Computer sinnvoll einsetzen und Ergebnisse richtig interpretieren zu können. Und das gilt nicht nur für Ingenieure, sondern für alle Absolventen von technischen und naturwissenschaftlichen Studiengängen.
Dieses Buch versucht diese Philosophie umzusetzen, – Methodenwissen anstelle von Faktenwissen.
Daher finden sich in diesem Buch nicht allzu viele Rechenaufgaben, sondern vielmehr Aufgaben, die das Verständnis der Begriffe und Methoden hinterfragen und festigen. An Vorwissen reichen Schulkenntnisse bzw. ein (ernsthaft!) besuchter Vorkurs, wie er an Fachhochschulen üblicherweise angeboten wird, aus.
Das Vorgehen fußt auf langjährigen Lehrerfahrungen im Bereich Mathematik für Anwender. Studierende aus drei Kontinenten und vielerlei Kulturen haben das Konzept durch ihr Feedback zu meinen Lehrveranstaltungen auf den richtigen Weg gebracht. Alle studentischen Fragen und Kommentare, egal auf welchem Niveau, haben mir ermöglicht, meine Lehrmethoden zu verfeinern. Dafür gebührt ihnen Dank an erster Stelle.

Besonderen Dank schulde ich den damaligen Ingenieurstudenten Christian Jelenowski, Christof Kaufmann und Arndt Steffen. Sie haben große Teile des Buches gegengelesen, dabei viele Fehler, Ungenauigkeiten und unbeholfene Erklärungen gefunden und zu meiner Aufmerksamkeit gebracht. Alle Fehler, die sich jetzt noch finden, gehen daher auf meine eigene Kappe.

Dem Team des Carl Hanser Verlags bin ich dankbar für die gewohnt angenehme Zusammenarbeit, besonders Frau Natalia Silakova für ihren Einsatz bei der Realisierung der Neuauflage.

Für diese Neuauflage wurden viele Kleinigkeiten verbessert und überarbeitet. Hinweise und Anregungen aus dem Leserkreis sind jederzeit willkommen.

Bochum, im Oktober 2021 — Michael Knorrenschild

Zum Umgang mit diesem Buch

Das Buch ist in einem erzählenden Stil geschrieben, sodass es sinnvoll ist, die einzelnen Kapitel beim ersten Kontakt von vorne beginnend zu lesen. Ziel des Autors ist es, Leserinnen und Leser auf sprachlich leicht verdauliche Weise mit den jeweiligen Konzepten vertraut zu machen. Oft wird sich dann das Gefühl einstellen, die Hintergründe erfasst und verstanden zu haben. Ebenso oft folgt beim Durchrechnen von Aufgaben die Erfahrung, dass dieses Gefühl trügerisch ist – mit den Aufgaben klappt es nicht so recht. Ergebnis sind Frust und schlechte Laune, und damit lernt es sich schlecht.

Um dem entgegenzuwirken, ist der Text von einigen Begleitmaßnahmen flankiert, so etwas wie Leitplanken an der Fahrbahn der Lernenden. Diese laufen unter der Rubrik **Festigung**: Hier geht es um das spielerische Ausprobieren von Formeln, die Durchführung einer Probe, das geistige Verknüpfen von Formeln und Bildern und das Nachrechnen einfacher Gleichungen. Das rechnerische Ergebnis ist dabei von vornherein klar – Lösungen brauchen Sie dazu nicht. Das Denkergebnis ist das, worauf es ankommt, und das kann nur in Ihrem eigenen Kopf entstehen. Hier wird die Grundlage geschaffen, um das Erlernte später schnell in Erinnerung rufen zu können.

Zur Festigung: So sind kleine Aufgaben und Zwischenüberlegungen notiert, die das soeben Gelesene im Verständnis festigen sollen.

Merkregeln und prägnante Formulierungen von Zusammenhängen finden Sie in **roten Kästen**. So wird späteres Nachschlagen erleichtert.

Wichtige Regel: Immer mitdenken.

Die Erfahrung zeigt, dass gewisse Denkfehler und naheliegende Trugschlüsse an bestimmten Stellen immer wieder auftreten. Diese werden durch **Warndreiecke** am Rand hervorgehoben. Die Idee ist, die Denkfallen gar nicht erst in tiefere Schichten des Hirns sacken zu lassen. Die Verlockung ist groß, aber wer diese Fallen vermeidet, wird später reich belohnt. Es wird gelegentlich vor blindem Auswendiglernen gewarnt. Wer eine Formel nicht verstanden hat, kann sie nicht anwenden. Beispiel: Die meisten Studierenden können die binomischen Formeln anwenden, wenn Ausdrücke der Form $(a+b)^2$ o. ä. auftreten. Tritt aber $(x+3z+7)^2$ auf, erkennen viele schon nicht mehr die Anwendbarkeit der binomischen Formeln. Diese Brücke gilt es zu schlagen, will man im späteren Berufsleben das Gelernte anwenden.

Das Warndreieck weist auf typische Fehler hin.

In die Darstellung eingeflochten ist eine Einführung in die Benutzung von MATLAB®. MATLAB[1] genießt eine weite Verbreitung und jeder Ingenieurstudierende wird früher oder später damit in Berührung kommen. In diesem Buch verwenden wir nur den Kern von MATLAB; Toolboxes (Zusatzpakete) oder eine aktuelle Version werden nicht benötigt. Sie können anstelle von MATLAB im Prinzip auch kostenlose Programme wie Scilab[2] verwenden, jedoch gibt es kleinere Unterschiede in der Syntax der einzelnen Befehle (viele weitere Unterschiede sind auf dem Niveau dieser Einführung nicht relevant).

Das Buch kann auch ohne MATLAB benutzt werden – die MATLAB-Teile können ohne Schaden übersprungen werden.

Da Auslandsaufenthalte einschließlich Studienaufenthalte an ausländischen Hochschulen schon oft Bestandteil eines Bachelor-Studiums sind, werden so manchem Studierenden die Vokabelverzeichnisse am Ende des Buches hilfreich sein.

Was Sie benötigen, um von diesem Buch zu profitieren:

- Neugier und Mut, sich auf neue Ideen einzulassen
- Disziplin und Durchhaltevermögen
- Vorkenntnisse aus der Schule bzw. aus aktiver Teilnahme an einem Vorkurs

Ein Vorkurs und Wiederholung von Schulmathematik ist in diesem Buch **nicht** enthalten.

Was Sie nicht benötigen, ist mathematisches Talent und einen Computer (egal ob mit oder ohne MATLAB).

„Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater.“
Albert Einstein, 1879-1955
in einem Brief 1943 an Barbara Wilson, eine Mittelstufenschülerin

Klavierspielen lernt man nicht durch Lesen von Noten oder den Besuch von Konzerten. Mathematik lernt man nicht durch Lesen von Büchern oder den Besuch von Vorlesungen. Man lernt, indem man alles selbst ausprobiert. Mathematik ist das einzige Fach, in dem das ohne materiellen Aufwand und gefahrlos möglich ist (in manchen anderen Fächern brauchen Sie kostspielige Apparate, gefährliche Substanzen, und müssen daher vieles einfach glauben, was Ihnen erzählt wird). Hier kann sich jede(r) von allem persönlich überzeugen, nichts muss einfach hingenommen werden.

Genug der Vorrede, nun viel Vergnügen und Erfolg beim Erkunden der Welt der Mathematik.

[1] MATLAB ist eingetragenes Warenzeichen von The Mathworks Inc.
[2] siehe http://www.scilab.org

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen (Steilkurs)

1.1 Fakten zu Funktionen 13
1.2 Trigonometrische Funktionen 20
1.3 Hyperbelfunktionen 27
1.4 Erste Schritte in MATLAB 29
1.4.1 Einfache arithmetische Ausdrücke 29
1.4.2 Plotten von Funktionen 31
1.4.3 Selbst definierte Funktionen 34
1.5 Arbeitstechniken 35

2 Erste Begegnung mit dem Unendlichen

2.1 Folgen und Grenzwerte 39
2.2 Grenzwerte bei Funktionen – Stetigkeit 51
2.3 Uneigentliche Grenzwerte 61

3 Polynome und rationale Funktionen

3.1 Polynome 66
3.1.1 Das Horner-Schema 67
3.1.2 Multiplikation von Polynomen 77
3.2 Rationale Funktionen 78
3.2.1 Partialbruchzerlegung 80
3.2.2 Grenzwertverhalten von rationalen Funktionen 85

4 Vom Reellen zum Komplexen
4.1 Komplexe Zahlen . . . 89
4.2 Wurzelrechnung . . . 99

5 Differenzialrechnung
5.1 Differenzierbarkeit und Ableitung . . . 105
5.2 Extremwerte . . . 116
5.3 Numerische Bestimmung von Nullstellen: Newton- und Sekantenverfahren . . . 124
5.4 Regeln von L'Hospital . . . 129
5.5 Höhere Ableitungen . . . 132

6 Integralrechnung
6.1 Grundlagen . . . 144
6.2 Berechnung von Stammfunktionen . . . 154
6.2.1 Partielle Integration . . . 160
6.2.2 Integration von rationalen Funktionen . . . 161
6.2.3 Substitutionsregel . . . 165
6.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . 173
6.4 Uneigentliche Integrale . . . 174
6.5 Berechnung von Längen von Kurven . . . 178
6.6 Rotationskörper . . . 180
6.7 Kurven in Parameterform . . . 183
6.8 Integration von Funktionen über Polarkoordinaten . . . 187

7 Lineare Algebra
7.1 Vektorrechnung . . . 193
7.1.1 Grundlagen . . . 193
7.1.2 Geraden . . . 201

7.1.3 Ebenen 205
7.1.4 Abstandsberechnungen 213
7.2 Vektorräume und ihre Darstellung 218
7.3 Lineare Gleichungssysteme 229
7.3.1 Die Lösungsmenge von homogenen linearen Gleichungssystemen 237
7.3.2 Die Lösungsmenge von inhomogenen linearen Gleichungssystemen 240
7.3.3 Der Gauß-Algorithmus – Praktische Lösung von linearen Gleichungssystemen 248
7.4 Determinanten 253
7.5 Orthogonalbasen 258
7.6 Spezielle Matrizen 267
7.7 Lineare Abbildungen 272

8 Unendliche Reihen
8.1 Grundlagen 281
8.2 Taylor-Reihen 288

Lösungen 300

Literaturverzeichnis 335

Sachwortverzeichnis 337

Liste der Anwendungen

Elektrotechnik: Abtasten von Signalen . . . 40
Informatik: Aufwand beim Sortieren von Arrays . . . 46
Statistik: die Gaußsche Glockenkurve . . . 63
Umrechnung in andere Zahlensysteme . . . 70
Schwingungen . . . 96
Elektrotechnik: Zeigerdarstellung . . . 97
Elektrotechnik: komplexe Widerstände . . . 98
Physik: Geschwindigkeit I . . . 107
Elektrotechnik: Kondensator und Spule . . . 114
Physik: Geschwindigkeit II . . . 119
Fehlerfortpflanzung bei Funktionsauswertungen . . . 119
Mechanik: das Bierdosenproblem . . . 122
Elektrotechnik: die sinc-Funktion . . . 130
Physik: Beschleunigung . . . 133
Elektrotechnik: Integral einer Schaltfunktion I . . . 148
Physik: Geschwindigkeit III . . . 156
Physik: Freier Fall . . . 157
Mechanik: Massen, Momente, Schwerpunkt . . . 169
Physik: Arbeit als Integral . . . 171
Elektrotechnik: Gleichwert, Wechselstrom . . . 174
Elektrotechnik: Wirkleistung und Effektivwert . . . 174
Elektrotechnik: Integral einer Schaltfunktion II . . . 177
Vektoren . . . 196
Physik: Kräfte . . . 197
Physik: Tangentenvektor . . . 197
Physik: Arbeit (mit Vektoren) . . . 200
Physik: Drehmoment . . . 210
Elektrotechnik: Eintor, Zweitor . . . 230
Elektrotechnik: Knotenpotenzialmethode . . . 230
Elektrotechnik: Überlagerungssatz . . . 241
Elektrotechnik: Zweitor . . . 247
Elektrotechnik: Signalverarbeitung mit Filtern . . . 274
Statistik: Gaußsches Fehlerintegral . . . 297

Liste der MATLAB-Beispiele

Einfache arithmetische Ausdrücke . . . 29
Plotten von Funktionen . . . 31
Selbst definierte Funktionen . . . 34
Polynome . . . 70
Umrechnung in andere Zahlensysteme . . . 71
Produkt von Polynomen, Faltung . . . 77
Polynomdivision . . . 78
Komplexe Zahlen: Real- und Imaginärteil, Polardarstellung . . . 94
Komplexe Zahlen: Wurzeln . . . 100
Ableitung von Polynomen . . . 112
Numerische Bestimmung von Extremstellen . . . 123
Numerische Bestimmung von Nullstellen . . . 128
Numerische Berechnung von Integralen . . . 151
Stammfunktion von Polynomen . . . 155
Vektoren, Norm, Komponenten . . . 198
Skalarprodukt, Kreuzprodukt . . . 217
Matrizen . . . 224
Lösung von linearen Gleichungssystemen . . . 245
Lösung von linearen Gleichungssystemen . . . 253
Determinanten . . . 254
transponierte Matrix . . . 258
Gram-Schmidt-Verfahren, Orthogonalisierung von Matrizen . . . 265
Die harmonische Reihe . . . 283

1 Grundlagen (Steilkurs)

Wir beginnen mit einer sehr gerafften Zusammenstellung von wichtigen Fakten. Dass Sie den Schulstoff beherrschen, wird vorausgesetzt. Ohne diese Vorarbeit werden Sie an diesem Buch – und an keinem anderen Mathematik-Buch, an keiner Vorlesung und Übungsstunde Freude haben. Und ohne Freude lernt es sich schlecht.
Die Mehrzahl der Begriffe in diesem Kapitel sollten Ihnen deshalb bekannt vorkommen, oder mehr als das: Sie sollten damit vertraut sein. Sie finden daher hier auch keine größeren Beispiele. Unabdingbar ist aber das Verständnis des Funktionsbegriffs, daher finden Sie hier nochmals die genauen Definitionen. Etwas ausführlicher wird es bei den hyperbolischen Funktionen, die nicht unbedingt in Schulen und Vorkurs behandelt werden.
Ein erster Einstieg in MATLAB gehört ebenfalls dazu. Weiter einige generelle Hinweise zum Herangehen an Aufgabenstellungen (nicht nur in der Mathematik), damit Sie, egal wie schwer oder leicht die Aufgabe ist, einen Einstieg finden. Mit diesen Hinweisen gehören Hindernisse wie „Ich wusste gar nicht, wie ich die Aufgabe anfangen sollte“ der Vergangenheit an. Für den Start in die Lösung einer Aufgabe ist also gesorgt, und wie’s danach weitergeht, ist eine Übungssache.

1.1 Fakten zu Funktionen

Definition 1.1

Funktion, Abbildung

Eine **Funktion** $f : X \longrightarrow Y$ (auch **Abbildung** genannt) ordnet jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zu. Die Menge X heißt dabei **Definitionsbereich**, Y heißt **Wertebereich**. Die wirklich getroffenen Bildpunkte bezeichnet man als **Bildmenge** von f und schreibt:
$f(X) := \{ f(x) \mid x \in X \} = \{ y \in Y \mid \text{es gibt } x \in X \text{ mit } f(x) = y \}$.
Der Graph einer Funktion f ist die Menge
$$\text{Graph}(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in X \}$$
Eine Funktion kann man auch notieren als $f : x \mapsto f(x)$ und bezeichnet dabei x als die **Variable** (Veränderliche) und $f(x)$ als den **Funktionswert an der Stelle x**.

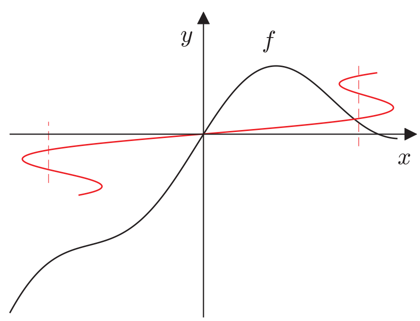


Bild 1.1 Die schwarze Linie ist der Graph einer Funktion f, denn jedem x wird genau ein $y = f(x)$ zugeordnet. Die rote Linie ist der Graph einer Zuordnung, die keine Funktion ist, denn manchen x sind mehrere y zugeordnet.

Es ist unbedingt nötig, die Funktion f vom Funktionswert $f(x)$ zu unterscheiden. Dies sind völlig verschiedene Objekte: f ist eine

Immer schön Funktion f (eine Zuordnung) und Funktionswert $f(x)$ (meist eine Zahl) auseinanderhalten, um nicht unnötige Verwirrung zu schaffen.

Zuordnung, $f(x)$ ist (meist) eine Zahl. In vielen Büchern findet man Formulierungen wie „...eine Funktion $f(x)$...“, was, genau genommen, Unsinn ist. Diese saloppe Formulierung ist in Ordnung, wenn jeder weiß, was gemeint ist, führt aber in anderen Situationen zu Unklarheiten und Missverständnissen.

Umkehrbarkeit von Funktionen

Definition 1.2

Sei $f : X \longrightarrow f(X)$ und $M \subseteq X$. f heißt **umkehrbar** auf M, wenn jedes $y \in f(M)$ nur genau einmal getroffen wird, d. h.

$$\text{für alle } x_1, x_2 \in M \text{ gilt:} \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Die Abbildung, die jedem Bildpunkt $f(x)$ das dann eindeutige x zuordnet, heißt **Umkehrfunktion** $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$.

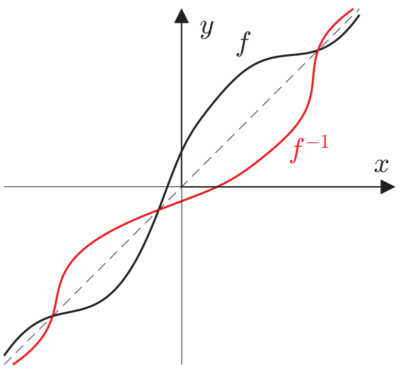


Bild 1.2 Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden.

Ob jedes y nur einmal getroffen wird, sieht man, indem man versucht, die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufzulösen. Gelingt dies äquivalent und in eindeutiger Weise, so gibt es zu jedem y nur genau ein x, das y wird also nur einmal getroffen. Am Ende der Auflösung nach x steht auf der anderen Seite der Gleichung $f^{-1}(y)$.

Umkehrfunktion f^{-1} nicht mit Kehrwert $\frac{1}{f}$ verwechseln. Bei Funktionswerten dagegen hilft genaues Lesen: $f^{-1}(x)$ ist der Wert der Umkehrfunktion an der Stelle x, während $(f(x))^{-1}$ der Kehrwert von $f(x)$ ist.

Beispiel 1.1

f gegeben durch $f(x) = 5x + 7$ soll auf Umkehrbarkeit geprüft werden. Umstellung ergibt:

$$y = 5x + 7 \iff x = \frac{1}{5}(y - 7)$$

also ist f umkehrbar und die Umkehrfunktion f^{-1} hat die Funktionsvorschrift $f^{-1}(x) = 0.2\,(x - 7)$. ■

Komposition von Funktionen

Definition 1.3

Hat man zwei Funktionen f und g, so bezeichnet man mit $f \circ g$ die **Komposition** (Hintereinanderausführung) der Funktionen.

Es ist dann
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$
Sind f und g umkehrbar, ist auch $f \circ g$ umkehrbar und es gilt:
$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)).$$

Die Komposition $f \circ g$ kann nur gebildet werden, wenn die Bildmenge von g im Definitionsbereich von f liegt. Bei $f \circ g$ wird zuerst g angewandt und danach f. Entsprechend gilt bei den Umkehrfunktionen: Damit $(f \circ g)^{-1}$ existiert, muss die Bildmenge von f^{-1} im Definitionsbereich von g^{-1} liegen.

Beispiel 1.2

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + 4$: Dann ist

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+4) = (x+4)^2 \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 4 \end{aligned}$$

f ist umkehrbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. g ist umkehrbar auf $\mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = x - 4$, also gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1}(x) &= (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \sqrt{x} - 4 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\geq 4} \end{aligned}$$

Definition 1.4

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- f heißt **streng monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$
- f heißt **monoton steigend**, wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$
- f heißt **streng monoton fallend** wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$
- f heißt **monoton fallend**, wenn für alle x, y gilt
$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y).$$

Monotonie von Funktionen

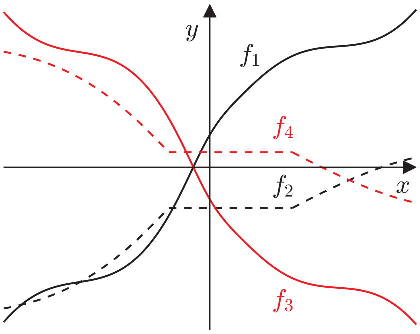


Bild 1.3 f_1 ist streng monoton steigend, f_2 monoton steigend, f_3 ist streng monoton fallend, f_4 monoton fallend.

Translation, Verschiebung

Definition 1.5

Die Abbildung $t_d : x \mapsto x+d$ heißt **Translation** (Verschiebung) um (die Konstante) d.

Translationen bewirken eine Verschiebung des Graphen von f in horizontaler oder vertikaler Richtung.

Die Abbildung t_d an sich ist simpel; interessant wird es, wenn sie mit anderen Funktionen zusammenkommt:
$f \circ t_d$: Hier wirkt sich die Translation in x-Richtung aus.
$(f \circ t_d)(x) = f(x+d)$, siehe Bild 1.4(a).
$t_d \circ f$: Hier wirkt sich die Translation in y-Richtung aus.
$(t_d \circ f)(x) = f(x)+d$, siehe Bild 1.4(d).

Skalierung

Definition 1.6

Die Abbildung $s_c : x \mapsto cx$ heißt **Skalierung** um (den konstanten Faktor) c.

Skalierungen bewirken eine Stauchung oder Dehnung des Graphen von f um einen Faktor.

Auch eine Skalierung ist für sich selbst nicht sonderlich spannend und entfaltet erst ihre Wirkung im Zusammenspiel mit anderen Funktionen:
$f \circ s_c$: Hier wirkt sich die Skalierung in x-Richtung aus.
$(f \circ s_c)(x) = f(cx)$, siehe Bild 1.4(b).
$s_c \circ f$: Hier wirkt sich die Skalierung in y-Richtung aus.
$(s_c \circ f)(x) = c\,f(x)$, siehe Bild 1.4(e).

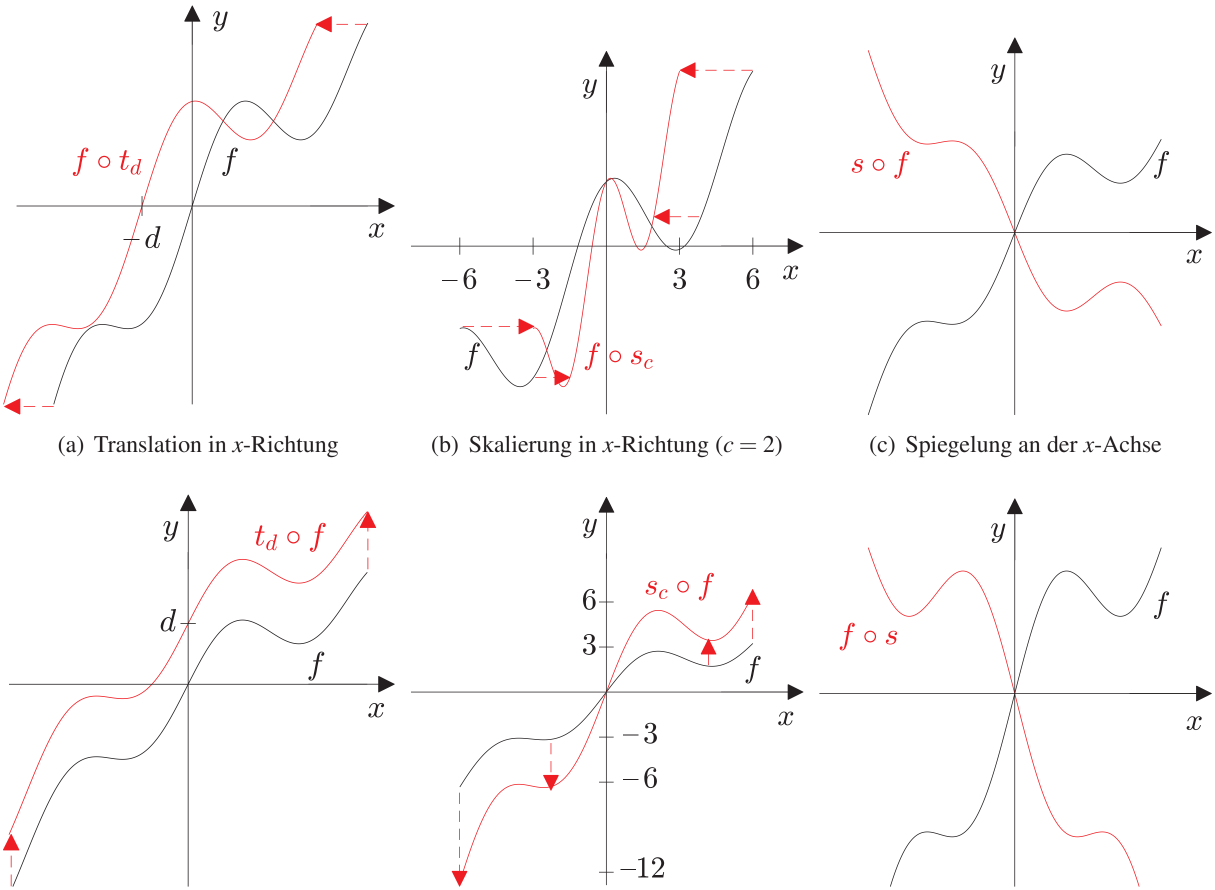
Spiegelung

Definition 1.7

Die Skalierung $s : x \mapsto -x$ heißt **Spiegelung**.

Spiegelungen bewirken eine Spiegelung des Graphen von f an der x- bzw. y-Achse.

Eine Spiegelung ist also nichts anderes als eine Skalierung um den Faktor -1. Sie heißt natürlich Spiegelung, weil etwas gespiegelt wird. In Kombination mit einer Funktion f wird nämlich der Graph von f gespiegelt und zwar
$f \circ s$: Spiegelung an y-Achse: $(f \circ s)(x) = f(-x)$, siehe Bild 1.4(f)
$s \circ f$: Spiegelung an x-Achse: $(s \circ f)(x) = -f(x)$, siehe Bild 1.4(c).



(a) Translation in x-Richtung (b) Skalierung in x-Richtung ($c = 2$) (c) Spiegelung an der x-Achse

(d) Translation in y-Richtung (e) Skalierung in y-Richtung ($c = 2$) (f) Spiegelung an der y-Achse

Bild 1.4 Translation, Skalierung und Spiegelung: Auswirkungen am Graphen von f

Definition 1.8

Polynom vom Grad n

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Polynom vom Grad n. Die a_i, $i = 0, \ldots, n$ nennt man auch die **Koeffizienten** des Polynoms. Das Polynom $p(x) = 0$ konstant heißt **Nullpolynom**.

Beispiel 1.3

Konstante Funktionen sind auch Polynome, und zwar vom Grad 0: $p(x) = cx^0$.
$p(x) = 4x^3 - 2x^5 + 2x - 9$ ist ein Polynom vom Grad 5. Die Koeffizienten lauten $a_5 = -2$, $a_4 = 0$, $a_3 = 4$, $a_2 = 0$, $a_1 = 2$, $a_0 = -9$.
$p(x) = (x+3)^7(x^2 - 5x + 2)^3$ ist ein Polynom vom Grad $7 + 2 \cdot 3 = 13$.
$p(x) = x^2 + 2x^{0.5}$ ist kein Polynom (nur natürliche Zahlen sind als Exponent erlaubt). ■

Rationale Funktion

Definition 1.9

Rationale Funktionen sind Quotienten zweier Polynome.

Seien p, q Polynome, q sei nicht das Nullpolynom. Dann heißt die Funktion f, die gegeben ist durch

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}, \quad \textbf{rationale Funktion.}$$

Beispiel 1.4

Insbesondere sind auch Polynome rationale Funktionen (man kann das Nennerpolynom einfach konstant als $q(x) = 1$ wählen). Eine typische rationale Funktion sieht aber eher so aus: $f(x) := \dfrac{x^2 + 2x - 7}{5x^{13} - 6x^7 + 2}$. ■

Gerade und ungerade Funktionen

Definition 1.10

Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt. f heißt **ungerade**, wenn gilt:

$$f(x) = -f(-x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 1.5

Die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ ist eine gerade Funktion.
Polynome in x, in denen nur Potenzen von x mit geradem Exponenten vorkommen, sind gerade Funktionen. 0 ist dabei auch als gerade Zahl anzusehen.

Polynome in x, in denen nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten vorkommen, sind ungerade Funktionen.
Der Quotient zweier gerader Funktionen ist eine gerade Funktion.
Der Quotient zweier ungerader Funktionen ist auch eine gerade Funktion (siehe Aufgabe 1.1).
Der Quotient einer geraden Funktion durch eine ungerade oder umgekehrt ist eine ungerade Funktion. Beispiele dazu:

$p_1(x) = x^2$: gerade.
$p_2(x) = -5x^{14} + 3x^8 - x^2 + 7$: gerade.
$p_3(x) = 3x^7 + 2x^3 - x$: ungerade.
$r_1(x) = \dfrac{-7x^8 + 2x^4 - x^2 + 2}{2x^5 + x^3 - 3x}$: ungerade.
$r_2(x) = \dfrac{x^5 - 2x^3 - x}{2x^7 + 5x^3 - 2x}$: gerade. ■

Definition 1.11

Exponentialfunktion

Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\exp(x) := \mathrm{e}^x$, wobei $\mathrm{e} = 2.718281828\ldots$ die Eulersche Zahl ist, wird **Exponentialfunktion** oder meist kurz **e-Funktion** genannt. Die e-Funktion ist streng monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$. Die Bildmenge ist $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

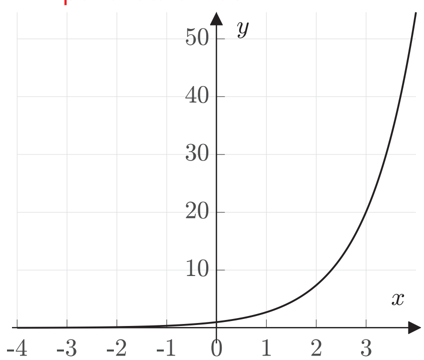


Bild 1.5 Der Graph von exp

Die e-Funktion ist einfach eine Potenzfunktion; man rechnet mit ihr gemäß den bekannten Potenzrechenregeln.

Satz 1.1

Logarithmusfunktion

Die e-Funktion ist umkehrbar; ihre Umkehrfunktion heißt **natürlicher Logarithmus**, $\ln : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es gelten die folgenden Rechenregeln für alle $x, y > 0$:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \tag{1.1}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \tag{1.2}$$

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln x, \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \ln x, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

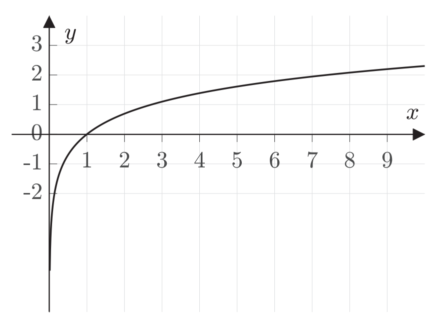


Bild 1.6 Der Graph von ln

1.2 Trigonometrische Funktionen

Alle Winkel werden im Bogenmaß verwendet. Das bedeutet, dass wir anstelle des Winkels in Grad die Länge des zu diesem Winkel gehörenden Kreisbogen auf dem Einheitskreis verwenden[1]. Der gesamte Einheitskreis wird durch einen Winkel von 360° beschrieben und hat einen Umfang von 2π, also entspricht 360° im Bogenmaß 2π. Die Umrechnung geschieht mit dem klassischen Dreisatz.
Die Winkelfunktionen sin, cos, tan, cot können durch Längen von Streckenabschnitten am Einheitskreis definiert werden, siehe Bild 1.7. Je nach Lage der Streckenabschnitte muss diese Länge noch ein Vorzeichen bekommen, z. B. liegt für $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ die ganze Geschichte im zweiten Quadranten (links oben) und damit wird $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\tan x > 0$, $\cot x < 0$.

An diesem Bild können Sie viele wichtige Eigenschaften der Winkelfunktionen direkt ablesen. Es ist aber in den anderen drei Quadranten auf die Vorzeichen der Größen zu achten. Die Eigenschaften aus Formeln abzulesen ist oft etwas verwirrend, weil die Winkelfunktionen und auch die Formeln recht ähnlich aussehen. Wirkliche Einsicht bringt dagegen dieses Bild.

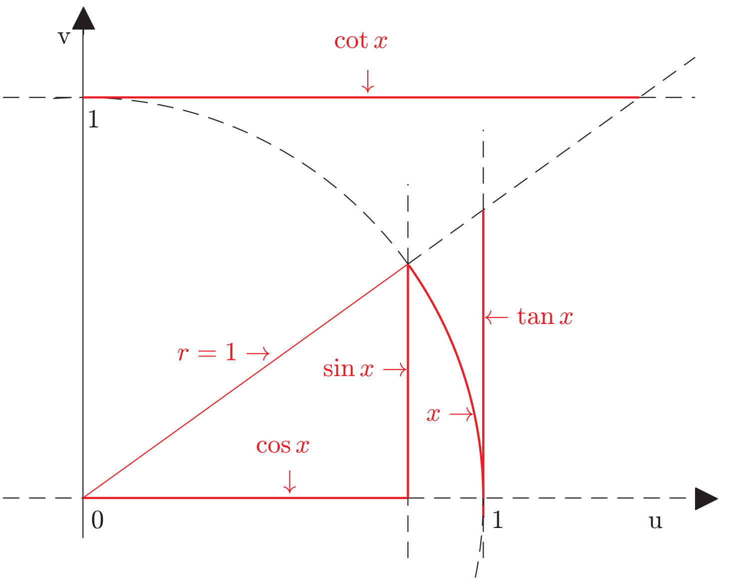


Bild 1.7 Definition von sin, cos, tan und cot am Einheitskreis: x ist der Winkel im Bogenmaß.

[1] Sie werden schnell merken, dass in der Mathematik i. Allg. die Dinge genauso heißen wie sie sind: Bogenmaß heißt Bogenmaß, weil hier die Länge eines Kreisbogens gemessen wird.

Satz 1.2

Eigenschaften (I) von sin und cos

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sin x \in [-1,1], \quad \cos x \in [-1,1] \tag{1.5}$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x \tag{1.6}$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.7}$$
$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x \tag{1.8}$$
$$|\sin x| \leq |x| \tag{1.9}$$

Hierbei bedeutet $\sin^2 x := (\sin x)^2$ und $\cos^2 x := (\cos x)^2$.

Zur Festigung: Machen Sie sich alle diese Eigenschaften an Bild 1.7 klar.

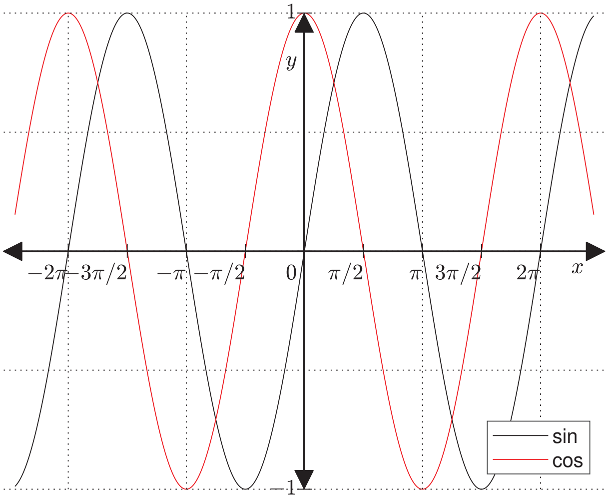


Bild 1.8 Die Graphen von sin und cos

Man sieht: Der Graph von sin ist einfach der von cos, nur verschoben (und umgekehrt). cos ist also eine Translation (siehe Def. 1.5) von sin um $\frac{\pi}{2}$, wir können also schreiben: $\cos = \sin \circ t_{0.5\pi}$.

Definition 1.12

Periodische Funktion

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt ***p*-periodisch**, wenn gilt:

$$f(x+p) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist p eine Konstante, die sog. **Periode** der Funktion f.

sin und cos sind nach (1.6) also 2π-periodische Funktionen.

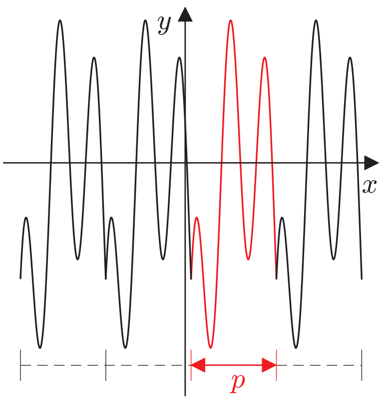


Bild 1.9 Der Graph einer p-periodischen Funktion: Ein Abschnitt der Länge p wiederholt sich.

Eine p-periodische Funktion ist eindeutig beschrieben durch Angabe der Funktionsvorschrift auf einem Intervall der Länge p. Außerhalb dieses Intervalls wird die Funktion „periodisch fortgesetzt". Für den Graphen von f bedeutet das, dass der Graph über diesem Intervall rechts und links immer wieder angefügt wird. Dabei können natürlich Sprünge entstehen, wenn die Stücke an den Klebestellen nicht zusammenpassen. In Bild 1.9 passiert das aber nicht, da die Funktionswerte am linken und am rechten Rand des Intervalls übereinstimmen.

Eigenschaften (II) von sin und cos

Zur Festigung: Formulieren Sie diese Eigenschaften als Kompositionen von sin, cos und geeigneten Translationen t_c.

Man sieht also: sin und cos sind Translationen voneinander.

Satz 1.3

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x, & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(x+\pi) &= -\sin x, & \cos(x+\pi) &= -\cos x \\ \sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x, & \cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x \end{aligned}$$

Additionstheoreme für sin und cos

Satz 1.4

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{aligned}$$

Schwingungen

Schwingungen entstehen durch zwei Skalierungen und eine Translation aus der sin-Funktion.

Definition 1.13

Sei $A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := A \sin(\omega t + \varphi)$$

heißt **Schwingung** mit **Amplitude** A, **Kreisfrequenz** ω und

Phasenwinkel φ; t ist die Zeit. Schwingungen sind periodische Funktionen mit Periode $p = \frac{2\pi}{\omega}$.

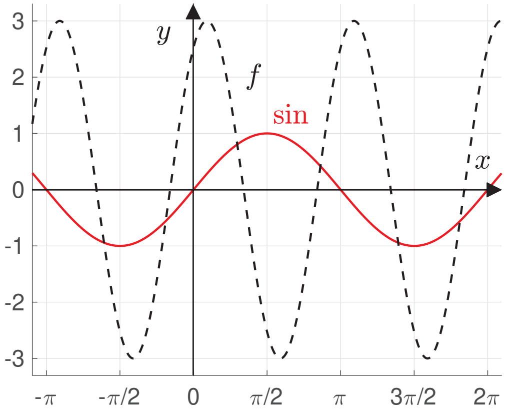


Bild 1.10 Eine Schwingung $f : t \mapsto 3\sin(2t+1)$: Amplitude 3, Kreisfrequenz 2, Phasenwinkel 1, Periode $\frac{2\pi}{3}$.

Satz 1.5

tan und cot

Die Funktionen tan und cot sind definiert als

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

- Der Definitionsbereich von tan ist $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, der von cot ist $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- tan und cot sind π-periodisch.
- tan und cot sind ungerade Funktionen.
- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ für alle $x \in D_{\cot}$.
- $\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$ für alle $x \in D_{\tan}$

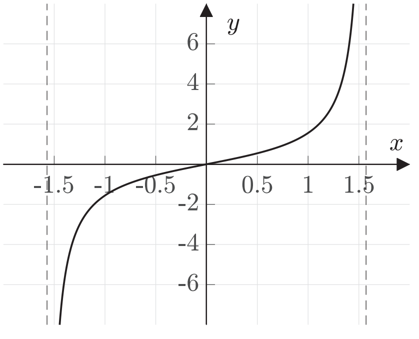


Bild 1.11 Graph von tan über $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Additionstheorem für tan

Satz 1.6

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für die $\tan x$, $\tan y$ definiert sind und für die $\tan x \tan y \neq 1$ bzw. $\tan x \tan y \neq -1$ ist, gilt

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Tabelle 1.1 Einige Werte von sin, cos, tan, cot

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Umkehrbarkeit von sin und cos

Satz 1.7

- sin ist auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend.
- Die Bildmenge ist $\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.

Daher ist $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt arcsin; es gilt $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

- cos ist auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend.
- Die Bildmenge ist $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.

Daher ist $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt arccos; es gilt $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$.

Auf den meisten Taschenrechnern müssen Sie für arcsin die Tastenfolge $\boxed{\text{inv}}$ $\boxed{\sin}$ oder die Taste $\boxed{\sin^{-1}}$. Kein Problem für Sie, denn Sie wissen ja, dass arcsin die Umkehrfunktion (inverse Funktion) von sin ist, also ist $\arcsin = \sin^{-1}$.

Umkehrbarkeit von tan und cot

Satz 1.8

- tan ist auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend.
- Die Bildmenge ist $\tan((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \mathbb{R}$.

Daher ist $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt arctan; es gilt $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

- cot ist auf $(0, \pi)$ streng monoton fallend.
- Die Bildmenge ist $\cot((0, \pi)) = \mathbb{R}$.

Daher ist $\cot : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt arccot; es gilt $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$.

Polarkoordinaten

Jeder Punkt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ kann auf zwei verschiedene Arten eindeutig angegeben werden:

- in kartesischen Koordinaten als (x, y) mit $x, y \in \mathbb{R}$ und
- in Polarkoordinaten als (r, φ) mit $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, siehe Bild 1.12.

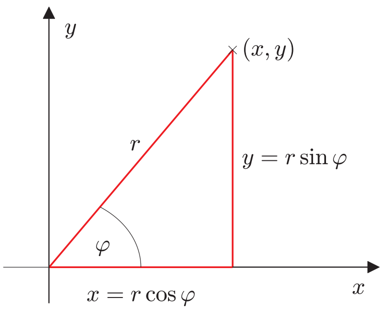


Bild 1.12 Polarkoordinaten r und φ eines Punktes (x, y)

Zum einen also durch Angabe der Abstände zur x- und zur y-Achse, zum anderen durch Angabe des Abstands vom Ursprung und einem Winkel gegenüber der x-Achse. Man beachte, dass der Nullpunkt keine eindeutigen Polarkoordinaten hat: Zwar ist $r = 0$ eindeutig, aber der Winkel φ ist es nicht.

Satz 1.9

Umrechnung zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten

Die Umrechnung zwischen Polarkoordinaten und kartesischen Koordinaten kann nach folgenden Formeln geschehen:

- Polarkoordinaten (r, φ) in kartesische Koordinaten (x, y): $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.
- kartesische Koordinaten (x, y) in Polarkoordinaten (r, φ):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

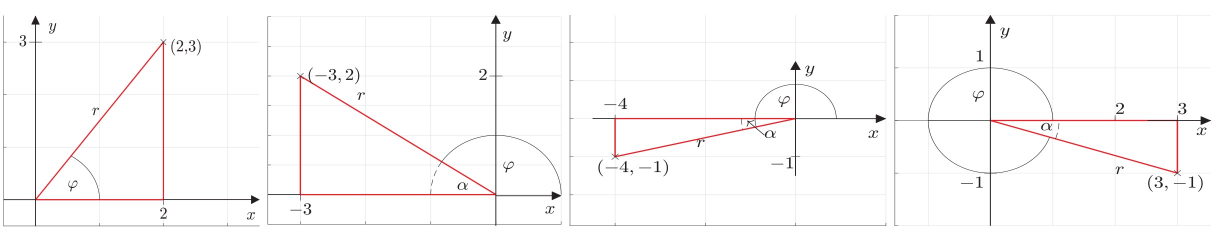
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x > 0,\ y \geq 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x > 0,\ y < 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{falls } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0,\ y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{falls } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Empfehlung: Für die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten nicht diese Formel für φ verwenden, sondern sich mit einer Skizze die Lage des Punktes klarmachen und arctan benutzen.

Erfahrungsgemäß haben viele Schwierigkeiten, diese Formel anzuwenden. Sie sollten sich aber mit der Formel ohnehin nicht belasten. Die Formel ist eigentlich auch nur nützlich, wenn man mal in die Verlegenheit gerät, die Koordinatenumwandlung programmieren zu müssen. Für die gelegentliche Umrechnung per Hand reicht es, eine flotte Skizze zu machen und sich mit arctan auszukennen. Wie das geschickt geht, zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 1.6

- Gesucht sind die Polarkoordinaten von $(2,3)$. Klar ist nach Pythagoras: $r = \sqrt{2^2+3^3} = \sqrt{13}$. Aus Bild 1.13(a) sehen wir, dass $\tan\varphi = \frac{3}{2}$. Da wir sehen, dass $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ liegen wird – dazu dient gerade das Bild – können wir gefahrlos den arctan verwenden und erhalten $\varphi = \arctan 1.5 \approx 0.9828$.
- Gesucht sind die Polarkoordinaten von $(-3,2)$. Leicht ist $r = \sqrt{13}$. Den Hilfswinkel α in Bild 1.13(b) können wir leicht mit arctan berechnen: $\alpha = \arctan\frac{2}{3}$. Aus dem Bild entnehmen wir, dass der gesuchte Winkel $\varphi = \pi - \alpha$ ist. Also $\varphi = \pi - \arctan\frac{2}{3} \approx 2.5536$.
- Gesucht sind die Polarkoordinaten von $(-4,-1)$. Also $r = \sqrt{17}$. Der Hilfswinkel α in Bild 1.13(c) berechnet sich als $\alpha = \arctan\frac{1}{4}$. Das Bild zeigt, dass der gesuchte Winkel $\varphi = \pi + \alpha$ ist. Also $\varphi = \pi + \arctan\frac{1}{4} \approx 3.3866$.
- Gesucht sind die Polarkoordinaten von $(3,-1)$. Also $r = \sqrt{10}$. Der Hilfswinkel α in Bild 1.13(d) berechnet sich als $\alpha = \arctan\frac{1}{3}$. Das Bild zeigt, dass der gesuchte Winkel $\varphi = 2\pi - \alpha$ ist. Also $\varphi = 2\pi - \arctan\frac{1}{3} \approx 5.9614$. ■



(a) (b) (c) (d)

Bild 1.13 Zur Umrechnung in Polarkoordinaten, siehe Beispiel 1.6

1.3 Hyperbelfunktionen

Definition 1.14

$$\begin{aligned}
\sinh x &:= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right) && \text{lies „sinus hyperbolicus“}\\
\cosh x &:= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right) && \text{„cosinus hyperbolicus“}\\
\tanh x &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} && \text{„tangens hyperbolicus“}\\
\coth x &:= \frac{\cosh x}{\sinh x} && \text{„cotangens hyperbolicus“}
\end{aligned}$$

Die Namen der Hyperbelfunktionen klingen so ähnlich wie die der trigonometrischen Funktionen. Wir wollen diese Ähnlichkeit einmal genauer erforschen. Für sin und cos hatten wir die in vielerlei Zusammenhang nützliche Formel $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, welche wir aus Bild 1.7 ablesen konnten. Das bedeutet, der Punkt $(\cos t, \sin t)$ hat für alle $t \in \mathbb{R}$ den Abstand 1 vom Nullpunkt, liegt also stets auf dem Einheitskreis. Für sinh und cosh gilt eine ähnliche Gleichung, nämlich

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

(Nachweis in Beispiel 1.7). Der Punkt $(\cosh t, \sinh t)$ liegt dann für jedes $t \in \mathbb{R}$ in der Punktmenge $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$. Wir suchen nun eine Funktion f, sodass diese Menge der Graph von f wird; dazu stellen wir um nach y:

$$x^2 - y^2 = 1 \iff y^2 = x^2 - 1 \iff y = \pm\sqrt{x^2-1}.$$

Der Punkt $(\cosh t, \sinh t)$ liegt also auf dem Graphen der Funktion $f_1(x) = \sqrt{x^2-1}$ oder dem von $f_2(x) = -\sqrt{x^2-1}$. In Bild 1.16 sind beide Graphen eingezeichnet. Dies ist eine Hyperbel – und nun wissen wir auch, warum diese Funktionen mit Nachnamen „hyperbolicus“ heißen. Eine solche Hyperbel ist natürlich keine geschlossene Kurve (wie z. B. ein Kreis), sondern eine unendlich lange Linie. Der Punkt $(\cosh t, \sinh t)$ durchläuft für $-\infty < t < \infty$ die Hyperbel von rechts unten (aus dem Unendlichen kommend) nach rechts oben (ins Unendliche gehend).

Hyperbelfunktionen

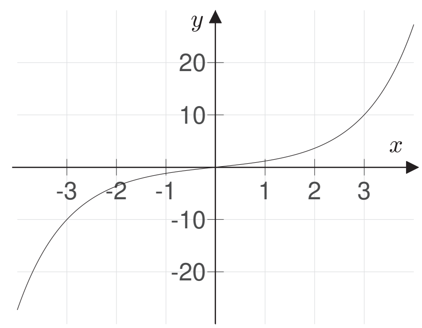


Bild 1.14 Der Graph von sinh

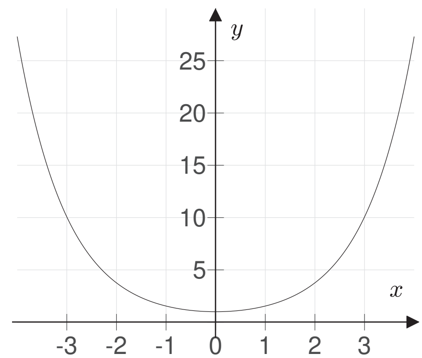


Bild 1.15 Der Graph von cosh

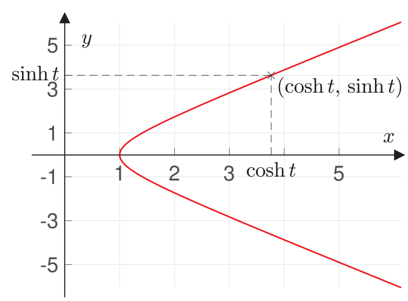


Bild 1.16 Hyperbel

Eigenschaften der Hyperbelfunktionen

Satz 1.10

- sinh ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte ungerade Funktion, die streng monoton steigend ist. Bildmenge ist $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
- cosh ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte gerade Funktion, die streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ und streng monoton steigend auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ist. Es gilt $\cosh x \geq 1$ für alle x. Bildmenge ist $\cosh(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \cosh(\mathbb{R}_{\leq 0}) = \mathbb{R}_{\geq 1}$.

↪ Aufgabe 1.2

- Für alle $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad (1.10)$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \quad (1.11)$$
$$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx) \quad (1.12)$$

- tanh ist eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte ungerade Funktion, die streng monoton steigend ist.
  Es gilt: $|\tanh x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
  Bildmenge ist $\tanh(\mathbb{R}) = (-1, 1)$.
- coth ist eine auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte ungerade Funktion, die streng monoton fallend auf $\mathbb{R}_{<0}$ und auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist.
  Es gilt: $|\coth x| \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Die Bildmenge ist $\coth(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
- Hyperbel-Funktionen und ihre Umkehrbarkeit:
  $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \Longrightarrow \operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $\cosh : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1} \Longrightarrow \operatorname{arcosh} : \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,
  $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1) \Longrightarrow \operatorname{artanh} : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$,
  $\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \Longrightarrow$
  $\operatorname{arcoth} : \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  Die Umkehrfunktionen liest man als „area sinus hyperbolicus“, „area cosinus hyperbolicus“, usw..
  Sie sind auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen streng monoton fallend (arcoth) bzw. streng monoton steigend (arsinh, arcosh, artanh).
- Die Umkehrfunktionen können mithilfe von ln wie folgt ausgedrückt werden:

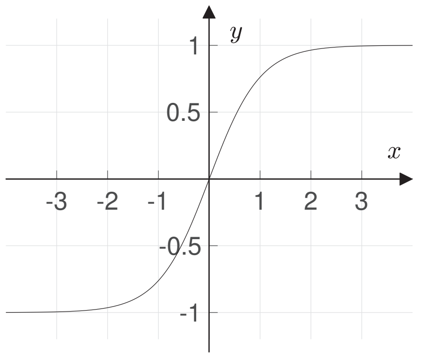


Bild 1.17 Der Graph von tanh

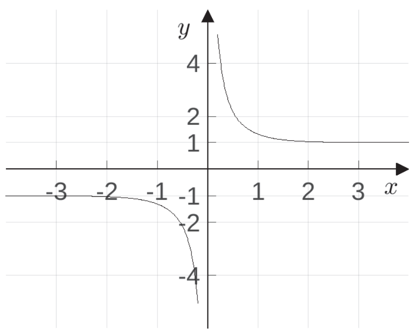


Bild 1.18 Der Graph von coth