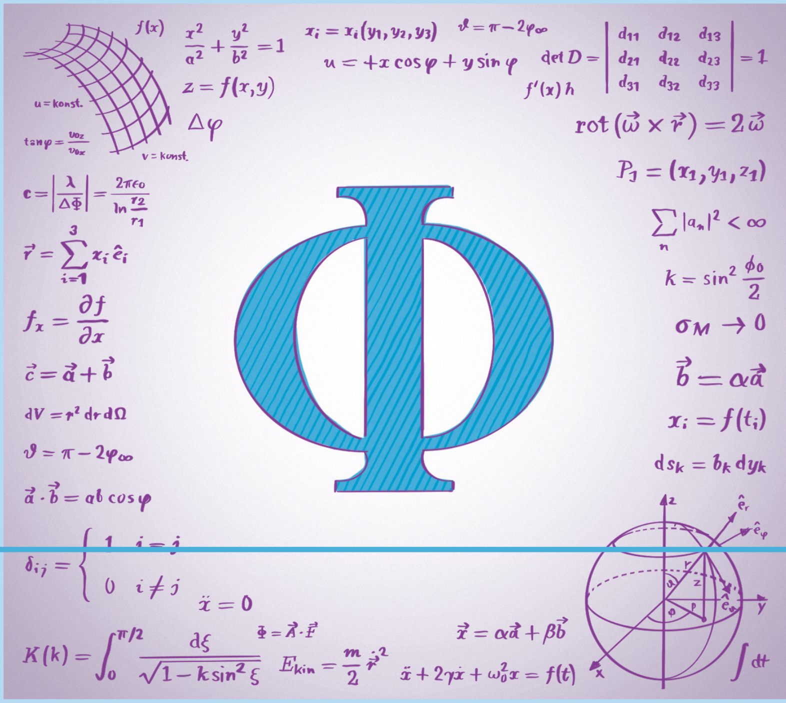
Hans Jürgen Korsch

Mathematische Grundlagen für Physiker

Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik



5., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Korsch

Mathematische Grundlagen für Physiker

Hans Jürgen Korsch

Mathematische Grundlagen für Physiker

Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik

5., aktualisierte und erweiterte Auflage

HANSER

Autor:

Prof. Dr. Hans Jürgen Korsch
Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Physik

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Die 1. bis 4. Auflage sind im Verlagsprogramm des © Binomi Verlags, Barsinghausen, erschienen.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild:
Satz: Hans Jürgen Korsch
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-47134-4
E-Book-ISBN 978-3-446-47152-8

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch richtet sich an Studienanfänger der Physik. Schon zu Beginn des Studiums wird klar, dass wohl das wichtigste Handwerkszeug des Physikers die Mathematik ist. Ja, man kann sogar behaupten, dass die Mathematik die eigentliche Sprache der Physik ist. In dieser Sprache werden die physikalischen Gesetzmäßigkeiten und Theorien formuliert, und zwar auch schon zu Beginn des Studiums. Sehr schnell stellt sich heraus, dass der dazu notwendige mathematische Apparat deutlich über den der Schulmathematik hinausgeht. Man muss seine Kenntnisse und Fertigkeiten kontinuierlich ausbauen, um den Inhalt der Physikvorlesungen zu verstehen.

Die Vorlesungen zur Mathematik, die jeder Physikstudent hören muss, werden ihn sorgfältig und in einem logischen Aufbau in diese Mathematik einführen. Man kann jedoch mit der Physik nicht warten, bis diese Mathematik vermittelt und verfügbar ist.

Der hier beschrittene Weg ist in vielen Aspekten pragmatisch. Dieses Skript enthält den Inhalt einer zweisemestrigen Vorlesung mit einem Umfang von zwei Wochenstunden, die eine vierstündige Vorlesung zur Experimentalphysik begleitet. Ziel dieser Ergänzungsvorlesung ist eine theoretisch-physikalische und mathematische Vertiefung des Stoffes der Grundvorlesungen in Physik. Dabei wird - nach Möglichkeit parallel zu dem Vorgehen in der Experimentalphysik - das mathematische Handwerkszeug des Physikers vermittelt. Solch ein Vorgehen ist nicht unproblematisch: Einerseits muss notgedrungen auf eine volle mathematische Strenge verzichtet werden, um nicht hoffnungslos hinter den experimentellen Teil zurückzufallen. Andererseits sollte dennoch ein (durch die Physik motivierter!) logischer Aufbau geboten werden, der auch ohne die begleitende Experimentalphysik in sich schlüssig ist und der die mathematischen Schwierigkeiten nicht verharmlost.

Die Stoffauswahl orientiert sich an den wesentlichen Inhalten der ersten Grundvorlesungen zur Physik und konzentriert sich in der Hauptsache auf die Mechanik und die Elektrostatik. Dazu werden die Grundlagen der Vektorrechnung, der Vektoranalysis sowie der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen und der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt.

Einige ergänzende Hinweise:

- Der mathematische Stoff wird dabei nicht in „Reinkultur“ entwickelt, sondern nach Möglichkeit durch physikalische Problemstellungen motiviert und durch physikalische Beispiele verdeutlicht.

- Einige Gebiete aus der Schulmathematik, die oft nur unzureichend bekannt sind, z.B. komplexe Zahlen und Kegelschnitte, werden im Anhang dargestellt.

- Einen größeren Raum nimmt die Behandlung nichtlinearer Phänomene in der Dynamik ein, ein Gebiet, in dem spezielle mathematische Techniken Anwendung finden.

- An einigen Stellen erschien es angebracht erste elementare Techniken der Numerischen Physik anzusprechen. Solche Methoden werden schon im frühen Physik-Studium eingesetzt (z.B. Computersimulationen in der nichtlinearen Dynamik oder bei Auswertungen von Messreihen im Physikalischen Praktikum).

- Abschnitte mit Hintergrundinformation oder weiterführenden Methoden sind mit einem * gekennzeichnet und können bei einem ersten Durchgang übersprungen werden.

- Im gesamten Text sind zahlreiche Beispiele ausführlich behandelt. Die zusätzlichen Aufgaben am Ende jedes Kapitels sollten in eigener Regie gelöst werden. Zur Kontrolle findet man Lösungen am Schluss des Buches.

Die eigentliche Motivation zur Niederschrift dieses Vorlesungsskripts entstand durch unser FiPS-Fernstudienprojekt. FiPS steht für *Früheinstieg ins Physik-Studium*: „... begabten Abiturient(inn)en, die sich während Zivildienst, Bundeswehrdienst, Freiwilligem Sozialen Jahr oder anderer Wartezeiten bereits intensiv mit ihrem angestrebten Studienfach Physik beschäftigen wollen, wird die Möglichkeit geboten, in einem multimedialen Fernstudiengang wesentliche Lehrinhalte der ersten beiden Fachstudiensemester zu erwerben... “ – diese Information und mehr über das FiPS-Fernstudienprojekt findet man unter `http://www-fips.physik.uni-kl.de`. Im Rahmen dieses Projekts wurde – neben dem benutzten Physik-Textbuch[1] – eine schriftliche Ausarbeitung unseres mathematischen Ergänzungskurses als Arbeitsgrundlage benötigt.

Besonders verdient gemacht haben sich unsere ersten externen FiPS-Studenten, die viele Fehler und Ungereimtheiten in der Vorversion dieses Skriptes entdeckt und mich in ihren zahlreichen E-Mails darauf hingewiesen haben; insbesondere wären dabei Alexander André, Benjamin Bahr, Johannes Hecht, Henning Jürgens, Ralf Kaminke, Jan Koch, Aaron Lindner, Frederick Wagner, Karl Wunderle zu nennen. Außerdem hat mich unser FiPS-Team – Christian Bayer,

[1] W. Demtröder: *Experimentalphysik I und II* (Springer-Verlag, 1998/99)

Monika Kantner, Daniel Roth und Frank Schweickert – immer unterstützt und angespornt.

Danken möchte ich auch allen „regulären“ Physikstudenten an der Universität Kaiserslautern, die mit ihrer Kritik und vielen Verbesserungsvorschlägen zu dieser Ausarbeitung beigetragen haben, insbesondere Steffen Blomeier, Michael Deveaux und Eva Schuster.

Mein Dank gilt auch den Studenten und Mitarbeitern aus meiner Forschungsgruppe, Markus Glück, Michael Hankel, Christian Hebell, Frank Keck und Bernd Schellhaaß, die viele Texte korrekturgelesen und kritisch kommentiert haben, sowie Frau Wollscheid für die Mühe, die sie sich mit der Anfertigung der zahlreichen Bilder gemacht hat.

Schließlich möchte ich meiner Frau danken, die die vielen Arbeitswochenenden und -abende mit großer Gelassenheit ertragen hat und die durch ihre Hilfe meine Arbeit an diesem Skript erst möglich gemacht hat.

Das vorliegende Skript ist mit Sicherheit noch verbesserungsbedürftig, deshalb freue ich mich über jeden Vorschlag und Hinweis auf sicherlich noch vorhandene Fehler (möglichst an die unten angegebene E-Mail Adresse).

Kaiserslautern,
September 1999

Hans Jürgen Korsch
FB Physik, Universität Kaiserslautern,
67653 Kaiserslautern
E-Mail: h.j.korsch@gmail.de

Vorwort zur fünften Auflage

Dieses Buch mit dem Titel *Mathematische Grundlagen für Physiker – Ein begleitendes Lehrbuch für die Experimentalphysik* ist eine überarbeitete Neuauflage des Buches *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*, erschienen im Binomi Verlag. Ich möchte Herrn Gerhard Merziger vom Binomi Verlag für die langjährige Zusammenarbeit herzlich danken und auch für die Anregung zu einer neuen Auflage dieses Textes im Carl Hanser Verlag. Vielen Dank auch an den Carl Hanser Verlag für die Bereitschaft, dieses Buch in ihr Verlagsprogramm zu übernehmen. Ganz besonders geholfen haben mir dabei Herr Frank Katzenmayer, Frau Christina Kubiak und Frau Anne Kurth vom Carl Hanser Verlag mit ihrer kompetenten Betreuung und vielen Verbesserungsvorschlägen.

Für diese fünfte Auflage wurde der Text erneut überarbeitet und ergänzt. Dabei waren die vielen Hinweise aus dem Leserkreis eine wertvolle Hilfe. Besonders zu erwähnen sind auch hier wieder die Anregungen von Stephan Bogendörfer.

Weitere Kommentare, kritische Bemerkungen und Hinweise auf Fehler bitte an die unten angegebene E-Mail Adresse. Eine von Zeit zu Zeit aktualisierte Korrekturliste findet man im Internet unter:

https://www.hanser-kundencenter.de/fachbuch

Dieses Buch wird im Fernstudiengang „Früheinstieg ins Physik-Studium“ (FiPS) der Technischen Universität Kaiserslautern als Lehrbuch benutzt. Weitere Informationen unter

http://www.fernstudium-physik.de/ .

Für Anfänger im Studium der Physik (und teilweise auch in den anderen Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften) stellt die Mathematik ein großes Problem dar. Gute Kenntnisse der Schulmathematik werden dabei stillschweigend vorausgesetzt, aber nicht jeder bringt hier die gleichen Voraussetzungen mit. Zum Ausgleich unterschiedlicher mathematischer Vorkenntnisse dienen an vielen Universitäten Vorkurse für Studienanfänger. Ein Skript zu einem solchen Vorkurs in Mathematik, der an der Technischen Universität Kaiserslautern seit vielen Jahren für die Studienanfänger in Physik angeboten wird, ist als Buch erhältlich:

> H. J. Korsch, „Mathematischer Vorkurs für Studienanfänger der Physik und der Ingenieurwissenschaften“ (Binomi Verlag 2004), 119 Seiten
> http://www.binomi.de.

Dieses Buch ist als Brücke zwischen mathematischem Schulwissen und Anforderungen der Vorlesungen gedacht. Es eignet sich als Begleitliteratur zu einem Universitäts-Vorkurs oder zum Selbststudium und wird allen Studienanfängern der Physik oder der Ingenieurwissenschaften empfohlen.

Kaiserslautern,
August 2021

Hans Jürgen Korsch
E-Mail: h.j.korsch@gmail.com

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vektoren

1.1 Vektoren und Tensoren in der Physik

Die Physik befasst sich mit der Beschreibung von Vorgängen in Zeit und Raum, genauer: mit ihrer *mathematischen* Beschreibung. Von Raum und Zeit haben wir einige mehr oder weniger vage Grundvorstellungen, die mit zunehmenden physikalischen Kenntnissen präzisiert, korrigiert oder erweitert werden. Hier sollen unsere anschaulichen Vorstellungen aber zunächst ausreichen.

Zu einer mathematischen Formulierung der physikalischen Gesetze (beispielsweise zu einer Beschreibung einer Bewegung im Raum) benötigen wir zunächst ein passendes mathematisches Handwerkszeug. In einer eindimensionalen Welt wäre das kein großes Problem: Die Position im „Raum" ist durch eine einzige (reelle) Variable (eine „Koordinate") gekennzeichnet, die wir zum Beispiel mit dem Buchstaben x bezeichnen können, und ein physikalisches Gesetz wie die Bewegungsgleichung „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung" schreibt sich als $F = ma$. Dabei steht F für die Kraft, m für die Masse und a für die Beschleunigung.

Im dreidimensionalen Raum ist das nicht mehr so einfach. Man kann sich damit helfen, indem man alles auf ein vorgegebenes Koordinatensystem bezieht. Aber dann sind eben nach Konstruktion(!) alle physikalischen Gesetze für dieses eine Koordinatensystem formuliert. Das ist ganz offensichtlich sehr unflexibel, denn die mathematische Form physikalischer Gesetze, bei denen auf Koordinatensysteme bezogene Größen beteiligt sind, kann unmöglich von der (willkürlichen!) Wahl des Koordinatensystems abhängen, denn sonst gäbe es unendlich viele

Formulierungen ein und desselben Gesetzes. Wir benötigen also eine mathematische Beschreibung durch Größen, die unabhängig sind von den speziellen Koordinatensystemen (oder sich nach passenden Regeln transformieren) und so die Invarianz der physikalischen Gesetze gewährleisten.

Mathematische Größen, die das leisten, sind die *Tensoren*, ein einfacher Spezialfall davon sind die *Vektoren*. Neben ihrer Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen erlauben sie auch eine Reihe von Rechenoperationen. Wie wir sehen werden, haben sie eine sehr wichtige mathematische Struktur, *linearer Raum* genannt. Eine Realisierung einer solchen Struktur stellt z.B. die Menge aller Translationen im Raum dar, also ganz anschaulich: die Menge aller parallelgleichen Pfeile. Der Tensorkalkül ist nicht nur nützlich, sondern für die Bewältigung vieler physikalischer Probleme unbedingt notwendig, wie zum Beispiel für Albert Einstein bei der Formulierung seiner Allgemeinen Relativitätstheorie.

Wie so oft, wird man erst später die oben verlangte Invarianz der Größen gegenüber Transformationen des Koordinatensystems richtig verstehen können. Das liegt auch daran, dass man zur mathematischen Formulierung bequemerweise schon den Tensor-Formalismus benutzen müsste, der ja eigentlich erklärt werden soll! Wir gehen hier heuristisch vor, wobei wir die wesentlichen Gedanken zunächst einmal für den $\mathbb{R}^2$ formulieren, also den zweidimensionalen Raum der Zahlenpaare (x, y). Diese Zahlenpaare lassen sich als Punkte der x,y-Ebene darstellen, und wir würden gerne durch dieses Zahlenpaar einen Vektor erklären, also eine Größe, die einen Betrag und eine Richtung hat, gekennzeichnet durch den Pfeil im Bild 1.1. Wir schreiben solche vektoriellen Größen als $\vec{a}$, wobei der Pfeil über dem Buchstaben auf ihre Richtungseigenschaft hinweisen soll (außerdem findet man in der Literatur auch eine Kennzeichnung von Vektoren durch fett gedruckte Buchstaben). Der Betrag, geschrieben als

$$a = |\,\vec{a}\,| \,, \quad a \in \mathbb{R} \,, \tag{1.1}$$

ist hier die Länge des Vektorpfeils, also $a = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Was geschieht nun, wenn wir zu einem Koordinatensystem übergehen, das um einen Winkel φ gedreht ist? In dem gedrehten Koordinatensystem hat der *gleiche* Vektor $\vec{a}$ statt der Koordinaten (x, y) die Koordinaten (u, v). Man kann sich überlegen, dass man durch

$$\begin{aligned} u &= +x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ v &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.2}$$

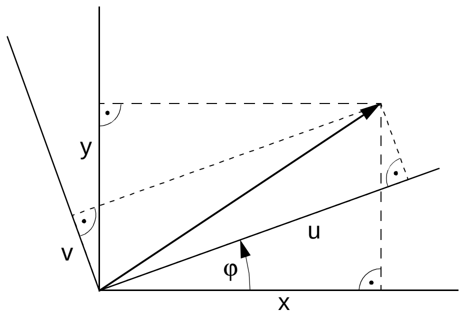


Bild 1.1: Bei einer Drehung des Koordinatensystems transformieren sich die Koordinaten (x, y) in die Koordinaten (u, v).

aus den (x, y) die (u, v) berechnen kann. Der Betrag des Vektors $\vec{a}$ in den neuen Koordinaten ist gleich $\sqrt{u^2 + v^2}$, und wir sehen mit

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (+x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + (-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 \\ &= x^2\cos^2\varphi + 2xy\cos\varphi\sin\varphi + y^2\sin^2\varphi \\ &\quad +x^2\sin^2\varphi - 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2\cos^2\varphi \\ &= x^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) + y^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\ &= x^2 + y^2\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

dass der Betrag des Vektors $\vec{a}$ sich bei der Drehung des Koordinatensystems nicht ändert. Jetzt dreht man den Spieß um und bezeichnet jede Größe, die durch ein Paar reeller Zahlen beschrieben wird, als einen *Vektor*, falls diese beiden Zahlen, die Koordinaten, sich bei einer Drehung des Koordinatensystems um einen Winkel φ wie (1.2) transformieren. Eine Größe, die sich bei einer Drehung nicht ändert, nennt man einen *Skalar*. Ein solcher Skalar ist uns schon bekannt: Der Betrag eines Vektors ist ein Skalar.

Ganz genauso kann man jetzt Vektoren im dreidimensionalen Raum als Zahlentripel (x, y, z) der drei Koordinaten bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems darstellen, die sich bei Transformationen (Drehungen) des Koordinatensystems in einer bestimmten Weise transformieren. Allerdings ist hier die Formulierung einer Drehung komplizierter, so dass wir einen anderen Weg einschlagen und uns im nächsten Abschnitt überlegen, dass man mit solchen Vektoren auch rechnen kann.

Wir werden sehen, dass man auch Vektoren in höherdimensionalen Räumen bilden kann. Es ist deshalb zweckmäßig, eine Indexschreibweise zu benutzen und die Komponenten eines Vektors $\vec{a}$ im $\mathbb{R}^3$ mit (a_1, a_2, a_3) zu bezeichnen. Unser physikalisches Gesetz „Kraft gleich Masse mal Beschleunigung“ kann man dann als $\vec{F} = m\vec{a}$ ausdrücken mit den Vektoren für die gerichteten Größen Kraft und Beschleunigung und einem Skalar für die Masse. Diese Formulierung ist koordinatenfrei.

Es wird leider noch etwas schwieriger, denn es lässt sich später nicht vermeiden mit Größen umzugehen, die noch komplizierter sind als Vektoren: mit *Tensoren*. Das hat allerdings noch etwas Zeit, deshalb hier nur ein Appetitmacher: Ein Tensor k-ter Stufe ist eine k-fach indizierte Größe, die sich in allen Indizes so transformiert wie ein Vektor. Ein Vektor selbst ist also ein Tensor erster Stufe, ein Skalar ein Tensor nullter Stufe. Tensoren zweiter Stufe werden wir als Matrizen kennen lernen, die beispielsweise die erwähnten Drehungen beschreiben. Eigentlich also ganz einfach...

1.2 Vektorrechnung

Im vorangehenden Abschnitt wurde der Vektorbegriff motiviert. Ein zweidimensionaler Vektor ist danach ein Zahlenpaar, ein dreidimensionaler Vektor ein Zahlentripel, die sich bei Transformationen der Koordinatensysteme in geeigneter Weise verhalten.

Wir werden jetzt zeigen, dass man mit solchen Größen rechnen kann, und dann eine präzise Definition des Vektors nachliefern. Ein Beispiel vektorieller Größen liefern die Verschiebungen (oder *Translationen*) der Punkte des Raumes

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \implies P_2 = (x_2, y_2, z_2)\,, \tag{1.4}$$

wobei (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) die Koordinaten der Punkte bezeichnen.

Wir werden im Folgenden die Rechenoperationen und ihre Eigenschaften einführen und am Beispiel der Verschiebungen im dreidimensionalen Raum illustrieren. Der abstrakte und verallgemeinerte Vektorbegriff im n-dimensionalen Raum wird dann definiert mithilfe dieser Rechenoperationen: Eine Menge, in der diese Rechenoperationen mit ihren bestimmten (einfachen und plausiblen!) Eigenschaften erklärt sind, heißt *Vektorraum* oder auch *linearer Raum*, und die Elemente dieser Menge heißen *Vektoren*.

Eine spezielle Klasse von Vektoren kennzeichnen wir durch ein Dachsymbol statt eines Vektorpfeils. Solch ein Vektor $\hat{a}$ hat die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ und den Betrag $|\hat{a}\,| = 1$. Man bezeichnet solche Vektoren als *Einheitsvektoren* (siehe Bild 1.2).

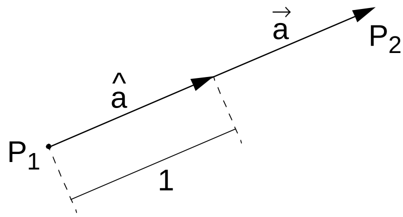


Bild 1.2: Vektor $\vec{a}$ und Einheitsvektor $\hat{a} = \vec{a}/a$.

1.2.1 Rechnen mit Vektoren

Es gibt zwei unterschiedliche Rechenoperationen mit Vektoren, die Multiplikation mit Zahlen (Skalaren), die wir im Folgenden mit griechischen Buchstaben wie α, β,... bezeichnen, und die Addition von Vektoren, die eine Reihe von Verträglichkeitsregeln erfüllen. Im Wesentlichen sagt diese Verträglichkeit aus, dass man rechnen darf „wie gewohnt". Es geht also hier nicht darum, etwas Besonderes oder gar Außergewöhnliches zu lernen. Als anschaulichen Hintergrund zur Motivation der verschiedenen Rechenoperationen verwenden wir als Bild für die Vektoren die Verschiebungen im Raum in eine bestimmte Richtung um einen bestimmten Betrag.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: Das Produkt eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar α ergibt als Resultat ist wieder einen Vektor

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}\,, \tag{1.5}$$

mit der Eigenschaft, dass der Betrag um den Faktor $|\alpha|$ geändert wird:

$$|\vec{b}\,| = |\alpha|\,|\vec{a}\,|\,. \tag{1.6}$$

Damit kann man schreiben

$$\vec{a} = |\,\vec{a}|\,\hat{a} = a\hat{a}\,. \tag{1.7}$$

Für positives $\alpha > 0$ ist die Richtung von $\vec{b}$ in (1.5) gleich der von $\vec{a}$, für $\alpha < 0$ entgegengesetzt. Das lässt sich schreiben als

$$\hat{b} = \operatorname{sign}(\alpha)\,\hat{a}\,, \tag{1.8}$$

wobei mit sign(α) das Vorzeichen von α bezeichnet wird. Diese Multiplikation ist assoziativ:

$$(\alpha\beta)\,\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}\,)\,. \tag{1.9}$$

Für die Verschiebungen im Raum wird also der Betrag der Verschiebung um den Faktor $|\alpha|$ geändert, die Richtung wird beibehalten ($\alpha > 0$) oder umgekehrt ($\alpha < 0$).

Einige einfache Folgerungen:

(1) Mit $\alpha = 0$ ergibt sich der *Nullvektor* $\vec{0} = 0\,\vec{a}$. Der Nullvektor hat keine bestimmte Richtung.

(2) Mit $\alpha = -1$ erhält man $\vec{b} = -\vec{a}$, einen Vektor gleicher Länge in umgekehrter Richtung (vgl. Bild 1.3).

(3) Mit $\alpha = 1/a$ ($a = |\,\vec{a}| \neq 0$) ergibt sich der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$:

$$\frac{1}{a}\,\vec{a} = \frac{1}{a}\,a\,\hat{a} = \hat{a}\,. \tag{1.10}$$

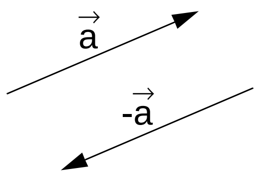


Bild 1.3: Umkehrung der Richtung eines Vektors bei negativem Vorzeichen.

Addition zweier Vektoren: Für die Verschiebungen im Raum lässt sich eine Addition als Hintereinanderausführung der beiden Verschiebungen definieren. Das Ergebnis ist wieder eine Verschiebung. Wir definieren also die Summe zweier Vektoren

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\,, \tag{1.11}$$

wie im Bild 1.4 dargestellt. Die Addition ist kommutativ:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,. \tag{1.12}$$

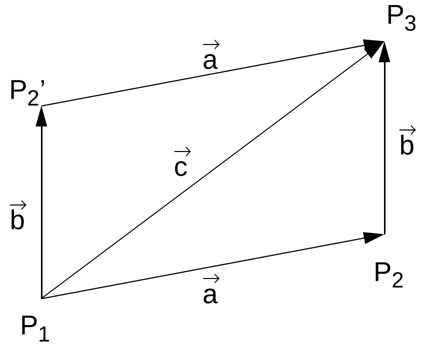


Bild 1.4: Addition von Vektoren $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$.

Die Addition von drei Vektoren erfolgt schrittweise durch aufeinanderfolgende Addition zweier Vektoren; sie ist assoziativ und distributiv:

$$\begin{aligned} \vec{a} + (\,\vec{b} + \vec{c}\,) &= (\,\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ \alpha(\,\vec{a} + \vec{b}\,) &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \\ (\alpha + \beta)\,\vec{a} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.2.2 Abstraktion des Vektorbegriffs

Nachdem wir jetzt anhand der anschaulichen Verschiebungsvektoren die elementaren Rechenregeln von Vektoren erläutert haben, können wir davon abstrahieren. Wir betrachten eine allgemeine Menge, deren Elemente wir mit $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... bezeichnen, in der eine Addition mit den folgenden Eigenschaften erklärt ist:

(G1) Es gilt das Assoziativgesetz $\vec{a} + (\,\vec{b} + \vec{c}\,) = (\,\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c}$.

(G2) Der Nullvektor $\vec{0}$ ist „neutrales Element“: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$.

(G3) Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein „inverser Vektor“ $\vec{b} = -\vec{a}$, mit $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

(G4) Die Addition ist kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Diese Struktur definiert eine *kommutative Gruppe*, auch *abelsche Gruppe* genannt.

Weiterhin sei eine Multiplikation $\alpha\vec{a}$ mit einem Skalar α (einem Element aus dem „Körper“ der reellen Zahlen) erklärt mit:

(K1) Es gelten die Distributivgesetze $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ und $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

(K2) Es gilt das Assoziativgesetz $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

(K3) Die Zahl 1 (das „Einselement des Zahlenkörpers“) erfüllt die Gleichung $1\vec{a} = \vec{a}$ für alle $\vec{a}$.

Man nennt eine solche Menge von Elementen mit Rechenoperationen, die die Regeln (G1) – (G4) und (K1) – (K3) erfüllen, *linearer Raum* (auch *Vektorraum* über dem Körper der reellen Zahlen.

Wenn eine Menge $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ von k Vektoren gegeben ist, so interessiert man sich oft für die Menge der Linearkombinationen

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\vec{x}_j \ , \alpha_j \in \mathbb{R}\,, \tag{1.14}$$

die durch diese Vektoren erzeugt werden können. Man nennt diese Menge die *lineare Hülle* dieser Vektoren, die von ihnen *aufgespannt* wird.

Falls einer der Vektoren, z.B. x_m, als Linearkombination der restlichen dargestellt werden kann,

$$\vec{x}_m = \sum_{j=1, j\neq m}^{k} \gamma_j\,\vec{x}_j \ , \quad \gamma_j \in \mathbb{R}\,, \tag{1.15}$$

oder bequemer: wenn man schreiben kann

$$\beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \ldots + \beta_k\vec{x}_k = \sum_{j=1}^{k} \beta_j\vec{x}_j = \vec{0} \ , \quad \beta_j \in \mathbb{R}\,, \tag{1.16}$$

mit irgendwelchen Koeffizienten $\beta_j \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich null sind, dann ist zumindest einer dieser Vektoren in einer gewissen Weise überflüssig, denn auch ohne ihn wird die gleiche lineare Hülle erzeugt. Man nennt die Vektoren $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k\}$ in einem solchen Fall *linear abhängig* und anderenfalls *linear unabhängig*.

Die Anzahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraumes, die diesen Vektorraum aufspannen, ist stets dieselbe und heißt *Dimension* dieses Vektorraums, und eine solche linear unabhängige Menge heißt *Basis* dieses Raumes.

Beispiele von Vektorräumen:

Die Translationen: Die Translationen oder Verschiebungen im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ bilden den wohl bekanntesten Vektorraum, der meist schon in der Schule behandelt wird. Eine solche Translation T_a verschiebt alle Punkte parallel. Insbesondere wird der Nullpunkt mit den Koordinaten $(0, 0, 0)$ in einem kartesischen Koordinatensystem in einen Punkt mit den Koordinaten (a_1, a_2, a_3) verschoben. Diese drei Zahlen a_i, $i = 1, 2, 3$, charakterisieren die Verschiebung in eindeutiger Weise. Ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten (r_1, r_2, r_3) wird durch T_a in den Punkt $(r_1 + a_1, r_2 + a_2, r_3 + a_3)$ verschoben.

Eine Addition zweier Verschiebungen T_a und T_b erklärt man durch die Hintereinanderschaltung der beiden Operationen. Dabei wird der Nullpunkt zuerst durch T_a nach (a_1, a_2, a_3) und dann durch T_b, beschrieben durch (b_1, b_2, b_3), nach $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ verschoben. Formal schreibt man das als

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,. \tag{1.17}$$

Eine Multiplikation einer Translation T_a mit einer Zahl α ist eine Verschiebung in die gleiche Richtung wie T_a, aber um den Faktor α skaliert. Dadurch entsteht eine Translation, die den Nullpunkt nach $(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$ verschiebt. Formal schreibt man das als

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)\,. \tag{1.18}$$

Es ist offensichtlich, dass diese Operationen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) erfüllen: Die Translationen bilden einen Vektorraum. Dieser Vektorraum ist dreidimensional: Die drei Translationen $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sind linear unabhängig (Beweis?) und jede Translation (a_1, a_2, a_3) lässt sich durch eine Linearkombination dieser drei Vektoren darstellen (Beweis?). Die drei Vektoren bilden also eine Basis.

Weiterhin kann man sich leicht davon überzeugen, dass man in genau der gleichen Weise Translationen in einem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ erklären kann, die man durch die n Koordinaten $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ beschreibt.

Die Polynome: Neben den Translationen erfüllen eine Reihe anderer mathematischer Strukturen die Regeln (G1) – (G4), (K1) – (K3) und bilden folglich einen Vektorraum. Viele dieser Vektorräume sind in der Physik von Bedeutung. Ein Beispiel eines solchen abstrakten Vektorraums ist die Menge aller Polynome

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \tag{1.19}$$

mit Grad $\leq n$. In Anhang A wird gezeigt, dass diese Menge eine Vektorraumstruktur besitzt. Sie bildet einen Vektorraum der Dimension $n + 1$, und man kann daher mit diesen Polynomen rechnen wie mit Vektoren.

1.2.3 Das Skalarprodukt

Das *Skalarprodukt*, das auch *inneres Produkt* genannt wird, ist ein Produkt zweier Vektoren, dessen Resultat eine Zahl ist, ein Skalar. Man kennzeichnet dieses Produkt durch einen Punkt. Es ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi \, . \tag{1.20}$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren (vgl. Bild 1.5). Zunächst sollten wir uns überlegen, dass das Resultat dieses Produkts wirklich einen Skalar liefert, denn sowohl die Beträge der beiden Vektoren als auch der Winkel zwischen ihnen bleiben bei einer Drehung des Koordinatensystems unverändert, und dies war ja die Forderung an eine skalare Größe (vgl. Seite 19).

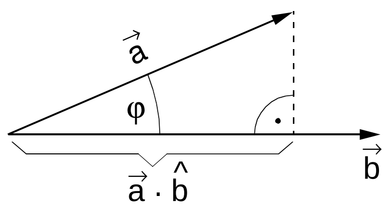


Bild 1.5: Skalarprodukt zweier Vektoren. Die Projektion eines Vektors $\vec{a}$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b}$ hat die Länge $\vec{a} \cdot \hat{b} = a \cos \varphi$.

Eigenschaften des Skalarprodukts:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \quad \text{(kommutativ)} \tag{1.21}$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \quad \text{(distributiv)} \tag{1.22}$$

$$\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) \quad \text{(homogen)}\,. \tag{1.23}$$

Einige Spezialfälle:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\text{ orthogonal }\vec{b} &\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0\\
\vec{a}\text{ parallel }\vec{b} &\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=ab\\
\vec{a}\text{ antiparallel }\vec{b} &\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=-ab\\
\vec{a}=\vec{b} &\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{a}=a^2\\
\vec{a}=\vec{0}\quad\text{oder}\quad\vec{b}=\vec{0} &\Longrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0\,.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Zwei Vektoren sind also *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Weiterhin gilt die *schwarzsche Ungleichung*

$$-ab \,\le\, \vec{a}\cdot\vec{b} \,\le\, ab\,. \tag{1.25}$$

Man kann mithilfe des Skalarprodukts sehr einfach die *Projektion* eines Vektors $\vec{a}$ auf eine Richtung (beschrieben durch einen Einheitsvektor $\hat{b}$) definieren. Für den Wert dieser Projektion gilt

$$a_\mathrm{b} = a\cos\varphi = \vec{a}\cdot\hat{b} \tag{1.26}$$

($|\hat{b}\,| = 1$). Um den projizierten Vektor zu erhalten, multipliziert man einfach den Einheitsvektor $\hat{b}$ mit dem Betrag a_b:

$$\vec{a}_\mathrm{b} = a_\mathrm{b}\,\hat{b} = \big(\vec{a}\cdot\hat{b}\big)\,\hat{b}\,. \tag{1.27}$$

Als Beispiel für eine Anwendung des Skalarprodukts beweisen wir den Kosinus-Satz: Für die Seitenlängen im Dreieck gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,, \tag{1.28}$$

wobei der Winkel γ der Seite c gegenüberliegt (vgl. Bild 1.6). Der Beweis ist sehr einfach:

$$\begin{aligned}
c^2 &= \vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})\\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a} = a^2+b^2-2ab\cos\gamma\,.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

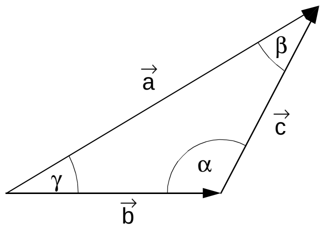


Bild 1.6: Dreieck aus den Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Man kann sogar sagen, dass man – sobald man das Skalarprodukt zur Verfügung hat – den Kosinus-Satz vergessen kann.

Hier sind wir bei der Definition des Skalarprodukts von der anschaulichen Bedeutung eines Vektors ausgegangen, der insbesondere eine Richtung im Raum besitzt. Der Winkel zwischen zwei solchen Vektoren ist dabei anschaulich klar. In einer abstrakteren Definition eines Vektorraums (vgl. Abschnitt 1.2.2) ist das aber nicht der Fall. Hier kann man das Skalarprodukt durch die Eigenschaften (1.21) – (1.23) sowie $\vec{a} \cdot \vec{a} > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$ *definieren*. Allerdings existiert ein solches Skalarprodukt nicht für jeden Vektorraum. Ein Beispiel für einen abstrakten Vektorraum mit einem Skalarprodukt ist der Vektorraum der Polynome in Anhang A. Dort wird gezeigt, dass man sogar in abstrakter Weise einen „Winkel“ zwischen zwei Polynomen definieren kann.

1.2.4 Das Vektorprodukt

Neben dem Skalarprodukt zweier Vektoren existiert im dreidimensionalen Fall $\mathbb{R}^3$ noch ein zweites Produkt, dessen Resultat aber ein Vektor ist. Man nennt dieses *Vektorprodukt* auch *Kreuzprodukt* oder *äußeres Produkt*. Es ist definiert als

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{mit} \quad c = ab\,|\sin\varphi|\ , \tag{1.30}$$

das heißt, der Betrag des Vektors $\vec{c}$ ist gleich der Fläche des von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Diese Fläche ist das Produkt der Länge der Grundseite a und der Höhe $h = b\,|\sin\varphi|$:

$$\text{Fläche} = ah = ab\,|\sin\varphi|\,. \tag{1.31}$$

Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ steht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht. Dabei wird diejenige der beiden dabei möglichen Richtungen von $\vec{c}$ durch die *Rechtsschraubenregel* festgelegt: Dreht man den ersten Vektor, $\vec{a}$, des Vektorprodukts $\vec{a} \times \vec{b}$ auf dem