Horst Hischer

# Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung

## Struktur – Funktion – Zahl

*2. Auflage*

Springer Spektrum

# Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung

Horst Hischer

# Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung

## Struktur – Funktion – Zahl

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Springer Spektrum

Horst Hischer
Braunschweig, Deutschland

ISBN 978-3-662-62232-2 ISBN 978-3-662-62233-9 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62233-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.



Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Vorwort zur zweiten Auflage

Die erste Auflage dieses Buches von 2012 hatte eine erfreuliche Aufnahme in der Leserschaft gefunden, sodass der Verlag nun eine neue Auflage plante, verbunden mit dem Vorschlag, Ergebnisse aus meinen aktuellen Studien zum Gleichungsbegriff in diese Neufassung zu integrieren. Damit ergab sich zugleich die Möglichkeit einer grundsätzlichen und ergänzenden Überarbeitung der bisherigen Fassung.

Vorliegendes Buch widmet sich ausgewählten grundlegenden Aspekten der Mathematik mit Blick auf deren Bildungsbedeutsamkeit. Hierzu zählen sowohl grundlegende Begriffe als auch grundlegende Themen und gewiss auch grundlegende Methoden. Wie bereits in der Fassung von 2012 erfolgt im Zusammenhang mit *fundamentalen Ideen* eine Fokussierung auf die mit *Struktur*, *Funktion* und *Zahl* bezeichneten *grundlegenden Begriffe der Mathematik*, nun ergänzt um den Themenkreis *„Gleichungen und Gleichheit“*. Generell wird zwischen dem (abstrakten) *Begriff* und seiner Bezeichnung, nämlich dem *Begriffsnamen*, unterschieden.

Doch „gibt“ es eigentlich derartige mathematische Begriffe, haben sie einen „Seinsstatus“? Und wenn ja, welchen? ULRICH FELGNER schreibt hierzu in der Schlussbetrachtung seiner ‘*Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit*’ (2020):

> Es zeigte sich insbesondere, daß es ein Reich mathematischer Gegenstände nirgendwo zu geben scheint, weder in der sinnlich wahrnehmbaren Welt, noch in der übersinnlichen Welt. Es kann daher auch nicht sein, daß Mathematische Theorien durch die Objektbereiche, die sie angeblich untersuchen, bestimmt seien. […]
>
> Man redet dennoch in allen mathematischen Disziplinen über mathematische Objekte, so als ob es sie irgendwo oder irgendwie geben würde. Aber bemerkenswert ist doch, daß es dabei auf die Natur (oder die Substanz) der mathematischen Objekte überhaupt nicht ankommt […].

Er merkt an, dass DAVID HILBERT in einem „*Axiomatisches Denken*“ titulierten Vortrag von 1917 eine Mathematische Theorie so gekennzeichnet habe, dass sie „*nichts anderes*“ als ein „*Fachwerk von Begriffen*“ sei, und er ergänzt:

> Es ist beim Aufbau einer mathematischen Theorie also nur zu sagen, daß es die Theorie mit einigen „*Systemen von Dingen*” zu tun hat und daß die Dinge, die in diesen Systemen enthalten sind, „*in gewissen gegenseitigen Beziehungen*” stehen. „*Die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome*” dieser Theorie.

Bei den nachfolgend erörterten *grundlegenden Begriffen der Mathematik* geht es allerdings nicht darum, ob und wie oder wo derartige „Dinge“ existieren, es geht also nicht primär um deren ontologischen Status, sondern es soll lediglich versucht werden, ein mit ihnen zu bildendes *Fachwerk der Begriffe* andeutungsweise erkennbar werden zu lassen.

Dieses Werk wendet sich an alle, die sich für Mathematik im Kontext von Unterricht interessieren, vor allem an diejenigen, die beruflich damit zu tun haben: im Lehramtsstudium, in Studienseminaren, in der Schule, in Lehre und Forschung zur Mathematik und ihrer Didaktik.

Jedoch ist dieses Buch kein Ersatz für übliche Vorlesungen und Bücher zur Mathematik im Rahmen des Lehramtsstudiums, auch ist es keine Sammlung von Vorschlägen zur Gestaltung von Mathematikunterricht. Vielmehr dient es der Reflexion und der Vertiefung der erwähnten grundlegenden Aspekte, wofür in den üblichen mathematischen Fachveranstaltungen wohl die notwendige Muße („scholé") fehlt. Aber Seminare und neuartige Vorlesungen wären wohl für solche Ziele ein geeigneter Ort – weniger am Anfang des Studiums, aber auch ggf. erst danach.

Die Konzeption dieses Buches basiert auf meiner in langer Lehr- und Unterrichtstätigkeit gewachsenen Auffassung, dass derartige grundlegende Aspekte für ein ertragreiches Unterrichten weder allein aus der Mathematik heraus, noch allein aus einer pädagogischen Perspektive heraus vermittelbar sind, sondern dass beide Seiten unter Berücksichtigung der *historischen Dimension der Entstehung von Mathematik* zusammengehören, was mit zu den *Aufgaben der Didaktik der Mathematik* gehört, deren Ziel in einem Zusammenführen von Mathematik und Pädagogik mit Blick auf den Mathematikunterricht bestehen muss – und zwar unter Berücksichtigung von einschlägigen Sichtweisen der Psychologie, der Soziologie und der Philosophie.

Solche neuartigen Lehrveranstaltungen können sich kaum an einem fachsystematischen Aufbau der Mathematik orientieren, vielmehr sollten sie *kulturhistorische und ontogenetische Aspekte der Entstehung und Entwicklung mathematischer Begriffe* mit im Blick haben: Denn in systematisch aufgebauten Fachvorlesungen sind zwar mathematische Teilgebiete optimiert und elegant darstellbar, aber das dient weniger einem Verständnis der Entstehung von Mathematik in dem o. g. Sinn.

So schreibt HANS FREUDENTHAL in seinem Buch *„Mathematik als pädagogische Aufgabe"*:

> Ein jüngerer Kollege erzählte mir, daß er, sich nach erfolgreichem Mathematik-Studium der Forschungsarbeit zuwendend, lange Zeit meinte, mathematische Arbeiten würden in dem Stile erfunden, in dem man sie zu publizieren pflegt, und daß er – natürlich vergebens – versuchte, in diesem Stile zu forschen. *(1973, S. 59)*

Das macht deutlich, dass im Mathematikstudium (vor allem in Lehramtsstudiengängen – aber warum nicht auch sonst?) neben systematisch aufgebauten, rein mathematischen Lehrveranstaltungen auch reflektierende (und damit didaktische) wie die gerade beschriebenen sinnvoll und wohl auch erforderlich sind. Und so stellt vorliegendes Buch eine „Ernte" aus meinen Vorlesungen, Seminaren und Facharbeiten dar, die ich seit 1971 – erst an der Technischen Universität Braunschweig und dann an der Universität des Saarlandes – sowohl zur „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" als auch zur „Didaktik der Mathematik" konzipiert und durchgeführt bzw. betreut habe.

Die eingangs mit *Struktur*, *Funktion* und *Zahl* bezeichneten Begriffe stehen in enger Beziehung zueinander und können kaum systematisch aufeinander aufbauend adäquat behandelt werden. Insbesondere weist damit die hier genannte Reihenfolge *keine inhaltliche* und auch *keine systematische Hierarchie* auf. Gleichwohl wird hier der Versuch einer Ordnung gewagt, indem im ersten Kapitel mit „Begriff" begonnen wird, was aber in allen folgenden Kapiteln in je eigener Weise aufgegriffen wird.

Und so ist das gesamte Buch durch eine streckenweise eher hermeneutische Zugangsweise gekennzeichnet, indem – wie im BRUNERschen Spiralprinzip – Themen erneut aufgegriffen, erweitert und vertieft werden, was bei einer (auch) historisch orientierten Betrachtungsweise geradezu zwangsläufig geschieht. In diesem Sinn werden manche Abschnitte bzw. Kapitel eher in einem „Plauderton" behandelt, andere dagegen in systematischer Orientierung formaler, strenger und vermutlich auch anstrengender, was aber unvermeidlich ist, so insbesondere in den Kapiteln 5, 6 und 8.

Das Anliegen von **Kapitel 1** zeigt sich schon im Titel: *Mathematik kulturhistorisch begreifen*. So sind wir derzeit im Zusammenhang mit der sog. „Modellierung" und mit der „Anwendung der Mathematik" Zeugen einer Ausrichtungstendenz des Mathematikunterrichts, bei der die sog. „Nützlichkeit" der Mathematik als bildungsbedeutsamer Aspekt (über)betont wird, wobei dann weniger zum Tragen kommt, dass zum Menschsein nicht nur das „Nützliche" und damit das „ökonomisch Verwertbare" gehören, sondern dass erst das nicht auf Nutzen und Anwendung Gerichtete den Menschen „ganz Mensch" sein lässt, wie es SCHILLER 1785 formuliert hat:

> … der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt. *(Die ästhetische Erziehung des Menschen in einer Reihe von Briefen, 15. Brief.)*

So ist die Mathematik seit ihren Anfängen in vorgeschichtlicher Zeit mit den konträren Ausrichtungen „Anwendung" und „Spiel des Geistes" verbunden, was in Abschnitt 1.1 am Beispiel der Geometrie(n) dargestellt wird und damit verdeutlichen soll, dass Mathematik ebenso wenig einer utilitaristischen Rechtfertigung bedarf wie Kunst, Musik und Dichtung. Damit gehört zum Begreifen von Mathematik auch eine historische Dimension, und das führt in Abschnitt 1.2 zum Konzept der „historischen Verankerung" des Mathematikunterrichts, wie es OTTO TOEPLITZ sinngemäß in einem Vortrag 1927 gefordert hat (vgl. Abschnitt 1.2.2.2):

> Wenn man an diese Wurzeln der Begriffe zurückginge, würden der Staub der Zeiten, die Schrammen langer Abnutzung von ihnen abfallen, und sie würden wieder als lebensvolle Wesen vor uns erstehen.

Durch diese *historische Verankerung* kann und soll eine *innermathematische Beziehungshaltigkeit* erreicht werden. Hier liegt dann ein enger Zusammenhang mit den *fundamentalen Ideen* vor, die u. a. durch *Historizität* und *Archetypizität* gekennzeichnet sind und die gemäß BRUNER „den Kern aller Naturwissenschaft und Mathematik bilden". Solche Ideen begegnen uns in einer Symbiose aus einer *grundlegenden Handlung* und einem *grundlegendem Begriff*, was zu dem gegenüber der ersten Auflage von 2012 inhaltlich erweiterten Abschnitt 1.3 führt, der sich dem „Begriff" und der „Begriffsbildung" im mathematischen Kontext widmet. Hier wird betont, dass *Begriff*, *Begriffsname* und *Begriffsinhalt* zu unterscheiden sind und dass der Prozess der ontogenetischen Begriffsbildung nur durch indirekte Beobachtung aus dem Wechselspiel im Umgang mit Objekt und Symbol erkennbar wird.

Mit **Kapitel 2** beginnt die Untersuchung inhaltlich grundlegender mathematischer Aspekte: *Strukturen* tragen und beschreiben das Gebäude der Mathematik und damit das „Fachwerk der Begriffe", und strukturelle Aspekte ermöglichen es erst, Teilgebäude der Mathematik zu entwerfen, zu bauen, zu verändern und zu erweitern, sodass Zusammengehörigkeiten zwischen ihnen erkennbar werden oder sogar erst hergestellt werden können.

Das Strukturieren der Mathematik ähnelt daher den Bemühungen sowohl in der Architektur als auch in der Städtebau- und Raumordnung. Dieses *Strukturieren als mathematische Aktivität* setzte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein und kann als *„Wende in der Algebra vom Verfahren zur Struktur“* angesehen werden: Ging es nämlich bis dahin vor allem darum, *Verfahren* zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen zu entwickeln, so etwa bei CARDANO in seiner „Ars Magna“ von 1545, so galt das Interesse nunmehr den *Strukturen*, in denen Gleichungen usw. unter bestimmten Bedingungen lösbar sind.

Drei Ursachen gelten als Auslöser dieser neuen Ausrichtung der Mathematik: in Anknüpfung an das bis dahin übliche Verständnis von „Algebra“ die grundsätzliche Untersuchung der *Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen* $n$*-ten Grades* in der Gleichungslehre (ABEL und GALOIS); *Bewegungen und ihre Invarianten in der Geometrie* (KLEIN); *Quadratische Formen* in der Zahlentheorie (LAGRANGE und GAUß). Diese bis dahin zusammenhanglos erscheinenden Bereiche wiesen überraschenderweise Gemeinsamkeiten auf, die mit „Gruppe“ als historisch *erstem Strukturbegriff* abstrahierend erfasst werden konnten (CAYLEY und WEBER).

Zur formalen Beschreibung solcher Strukturen kamen in demselben Jahrhundert als neue Werkzeuge bzw. Sprachen die „Erfindung“ der Mathematischen Logik (BOOLE, FREGE) und der Mengenlehre (CANTOR) hinzu, gepaart mit einer dadurch möglichen zunehmend präziseren Axiomatisierung mathematischer Strukturen (DEDEKIND, PEANO, HILBERT). Andererseits lässt sich *derzeit* in der Mathematik in manchen Bereichen (wenn auch nicht überall) *eine „Wende von den Strukturen zurück zu den Verfahren“* beobachten, die u. a. durch die Verfügbarkeit von Methoden und Werkzeugen der Informatik wie u. a. den CAS (Computeralgebrasystemen) begünstigt wird. Als Beispiel einer mathematischen Struktur wird eine „Mengenalgebra“ vorgestellt. Damit ist das inhaltliche Anliegen dieses Kapitels umrissen, das mit einem kurzen Einblick in die „Fuzzy Logic“ endet.

Ergänzend ist hier anzumerken, dass in diesem Buch *Prinzipien der auf Axiomatisierung beruhenden Strukturierung* nur exemplarisch dargestellt werden – für Zahlen (in Kap. 6, 8) und für Gruppen (in Kap. 5) –, nicht jedoch für weitere Strukturen wie z. B. geometrische oder topologische.

**Kapitel 3** widmet sich den *historischen Wurzeln des Zahlbegriffs*, beschränkt auf die vorgeschichtliche Zeit und die Antike. Der Umgang der Ägypter mit Zahlen, insbesondere mit „Stammbrüchen“, wird angedeutet (und auch in Kapitel 7 angesprochen), und der entsprechende Umgang der Babylonier mit „Sexagesimalbrüchen“ wird anhand zweier berühmter Keilschrifttafeln angedeutet. Schwerpunkt dieses Kapitels ist dann das mit „Alles ist Zahl“ beschreibbare Zahlenverständnis der älteren Pythagoreer im Rahmen ihrer Proportionenlehre und der zugehörigen Wechselwegnahme, gefolgt vom Schock der Entdeckung der Inkommensurabilität durch HIPPASOS VON METAPONT (vermutlich am Quadrat oder am Pentagramm?) und der Auflösung dieses Schocks durch die jüngeren Pythagoreer (EUDOXOS) mit seiner genialen Erweiterung des Proportionsbegriffs unter Beibehaltung der Wechselwegnahme, so dass die Pythagoreer von da an aus unserer Sicht über den angeordneten Halbkörper der positiven reellen Zahlen verfügten.

**Kapitel 4** zeigt – inhaltlich gegenüber der ersten Auflage erheblich erweitert – die *kulturhistorische Entwicklung des Funktionsbegriffs:* von den Tabellen bei den Babyloniern vor rund 4 000 Jahren über kinematische Kurven bei den Pythagoreern, erste Funktionsgraphen vor rund 1 000 Jahren, der zeitgleich erfundenen neuen Notenschrift durch GUIDO VON AREZZO, graphischen Bewegungsdarstellungen durch NICOLE D'ORESME, in der Folgezeit bei „empirischen Funktionen" (als Tabellen oder „Kurven", z. B. bei HALLEY und LAMBERT) und bei Häufigkeitsverteilungen (z. B. bei HUYGENS und FOURIER). Es folgt der Beginn der expliziten Begriffsentwicklung von „Funktion" durch NEWTON, LEIBNIZ und die Brüder BERNOULLI bis hin zu EULER, gefolgt von der Entwicklung zum modernen Funktionsbegriff durch FOURIER, DIRICHLET und DU BOIS-REYMOND und dann über DEDEKIND, FREGE, PEIRCE, SCHRÖDER, PEANO, RUSSELL, ZERMELO und WHITEHEAD bis hin zur Krönung von „Funktion als Relation" durch HAUSDORFF 1914. Und derzeit begegnen uns Funktionen mit „vielen Gesichtern".

In **Kapitel 5** werden *strukturierende Werkzeuge* vorgestellt und untersucht: Relationen und speziell Funktionen, Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen. Ferner wird erläutert, was unter einem Axiomensystem zu verstehen ist und was hier *Widerspruchsfreiheit*, *Unabhängigkeit* und *Vollständigkeit* bedeuten. Als konkrete mathematische Struktur wird eine BOOLEsche Algebra vorgestellt, und am Beispiel des Gruppenbegriffs werden musterhaft Schwierigkeiten bei der Entwicklung eines widerspruchsfreien und unabhängigen Axiomensystems aufgezeigt.

**Kapitel 6** widmet sich in Anlehnung an DEDEKIND und PEANO der Entwicklung eines Axiomensystems für die *natürlichen Zahlen*, was zu einer „Dedekind-Peano-Algebra" genannten Struktur führt. Darauf aufbauend wird die Gültigkeit des Beweisverfahrens der vollständigen Induktion bewiesen (sic!). Der Rekursionssatz und die sich darauf gründende Möglichkeit zur rekursiven *Definition* der Addition und der Multiplikation werden dargestellt, schließlich auch der Monomorphiesatz: Dieser besagt, dass zwei beliebige Dedekind-Peano-Algebren isomorph sind, was zugleich bedeutet, dass das Axiomensystem für eine Dedekind-Peano-Algebra sogar *vollständig* ist. Zusätzlich wird eine Ordnungsrelation $\leq$ erklärt, die zu $(\mathbb{N},+,\cdot,\leq)$ führt, dem angeordneten Halbring der natürlichen Zahlen. Abschließend werden „endliche Menge" und „unendliche Menge" im Sinne der genialen DEDEKINDschen Idee definiert, und mit Bezug auf Dedekind-Peano-Algebren werden „abzählbar" und „überabzählbar" definiert.

**Kapitel 7** beginnt mit der *Entwicklung des Bruchbegriffs,* und zwar im Zusammenhang mit Aspekten der ontogenetischen und der kulturhistorischen Begriffsentwicklung, indem zunächst verdeutlicht wird, dass die Bezeichnung „Bruch" doppeldeutig ist, weil darunter fallweise eine Äquivalenzklasse oder ein Repräsentant dieser Klasse verstanden werden kann – eine Quelle für viele Fehlverständnisse bei „Laien", zu denen auch Schülerinnen und Schüler zählen. Solche Probleme treten bei „Bruchzahl" nicht auf, die aber kein Bruch ist, wohl aber durch unendlich viele Brüche darstellbar ist. Es folgen zwei Abschnitte über *Grundvorstellungen* bei Brüchen und über *Vorstellungen und Darstellungen von Brüchen* und ein ausführlicher Abschnitt über *Bruchrechnung*. Historische und aktuelle Aspekte zu *Bruchentwicklungen* schließen sich an: Stammbruchentwicklungen, Kettenbruchentwicklungen und FAREY-Folgen mit FORD-Kreisen.

In **Kapitel 8** wird zunächst der *konstruktive Aufbau des Zahlensystems* beschrieben, ausgehend von den natürlichen Zahlen über die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen bis hin zu den reellen Zahlen – oftmals durch konkrete ausführliche Durchführung der konstruktiven Schritte, z. T. aber nur durch deren Skizze. Dieser konstruktive Weg wird alternativ kontrastiert mit einer *axiomatischen Kennzeichnung der Menge der reellen Zahlen* und der *Aussonderung der anderen erwähnten Zahlenmengen*, wie es bereits HILBERT vorgeschlagen hatte, und es werden äquivalente Axiomensysteme für den angeordneten Körper der reellen Zahlen vorgestellt. Das Kapitel endet mit Beweisen zur Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit und mit einem kurzen historischen und aktuellen Einblick in die Strukturen der komplexen Zahlen und der Quaternionen.

**Kapitel 9** ist neu und widmet sich der Frage, was eine „Gleichung“ ist, womit ein weiterer grundlegender Begriff der Mathematik angesprochen wird. Diese Frage scheint müßig zu sein, weil wohl alle, die irgendwie mit Mathematik zu tun haben, mit Gleichungen als einem quasi selbstverständlichen Werkzeug umgehen. Es zeigt sich aber, dass die in der Mathematik verwendete „Gleichheit“ – ganz im Gegensatz zum Alltagsverständnis – meist die „Identität“ ist, die allerdings mit Mitteln der Mathematischen Logik implizit definierbar ist. Doch andererseits ist die Bezeichnung „Gleichung“ im Falle sog. „offener Terme“ in den meisten Fällen nicht gerechtfertigt, weil hier i. d. R. gar nichts „gleich“ *ist*, sondern zwei Dinge erst (im Sinne von „identisch“) *„gleich“ werden sollen*. Und schließlich wird auch die Geschichte der Entstehung des Gleichheitszeichens angesprochen.

Da nicht alle in diesem Buch aufgeworfenen Fragen und Probleme beantwortet werden (können), bleibt viel Raum für individuelle, eigenständige oder angeregte Vertiefungen – auch in Studien- und Examensarbeiten unterschiedlichen Umfangs und Schwierigkeitsgrades. Und ganz in diesem Sinn enthält das Buch zahlreiche Aufgaben, dazu in **Kapitel 10** ausführliche Lösungsvorschläge.

Sollte dieses Buch trotz sorgfältiger Durchsicht noch Fehler oder andere Ungenauigkeiten enthalten, so bitte ich um Mitteilung an den Verlag. Das betrifft auch Kommentare und Alternativen zu den Lösungen und ggf. weitere Anmerkungen zu diesem Buch.

Ich danke dem Verlag Springer Nature für die Anregung zur Konzeption einer Neuauflage dieses Buches, insbesondere danke ich hier sowohl Frau Iris Ruhmann als auch Frau Anja Groth für die ganz vorzügliche Betreuung von der Planung an bis hin zur Fertigstellung. Herrn Prof. Dr. Ulrich Felgner, Universität Tübingen, danke ich herzlich für wertvolle Kommentare zur ersten Auflage und vor allem für den reichhaltigen Gedankenaustausch zum Thema „Gleichungen“ während der letzten beiden Jahre. Herrn Prof. Dr. Wilfried Herget, Universität Halle-Wittenberg, danke ich für die konstruktive Durchsicht der Texte. Und schließlich und ganz besonders danke ich meiner Frau Ingeborg dafür, dass sie meine konzentrierte Zurückgezogenheit während der Erstellung dieses Buches mitgetragen und ertragen hat. Ihr und meinen beiden Töchtern widme ich dieses Buch.

*Horst Hischer, im Oktober 2020*

# Inhalt


**1 Mathematik kulturhistorisch begreifen 1**

1.1 Mathematik zwischen Anwendung und Spiel 1
1.1.1 Vorbemerkung 1
1.1.2 Das Morley-Dreieck zwischen Anwendung und Spiel 2
1.1.3 Mathematik zwischen „homo faber“ und „homo ludens“ 5
1.1.4 Mathematik und das Menschenrecht auf Irrtum 7
1.1.5 Ein Blick in die Anfänge der Geometrie 8
1.1.5.1 Geometrisches Handeln in vorgeschichtlicher Zeit 8
1.1.5.2 Am Beginn geschichtlicher Zeit 10
1.1.5.3 Ein kurzer Blick in andere Kulturen: China, Japan und Neuseeland 12
1.1.6 Einige aktuelle Beispiele 13
1.1.6.1 Raumgeometrie und Raumanschauung 13
1.1.6.2 Inzidenzgeometrie und endliche Geometrie 16
1.1.6.3 Freiformarchitektur und Mathematik 18
1.1.7 Fazit 19

1.2 Mathematik im kulturhistorischen Kontext 20
1.2.1 Fundamentale Ideen und grundlegende Begriffe 20
1.2.1.1 Grundsätzliche Betrachtungen 20
1.2.1.2 Kriterien bezüglich fundamentaler Ideen 22
1.2.1.3 Ein Beispiel: „Mittelwert & Mittelwertbilden“ und Konsequenzen 23
1.2.2 Historische Verankerung 26
1.2.2.1 Verankernde Ideen 26
1.2.2.2 Otto Toeplitz: „genetische Methode“ als didaktisches Konzept 27
1.2.3 Fazit: „historische Verankerung“ statt „genetische Methode“ 31

1.3 Mathematik, Begriff und Begriffsbildung 35
1.3.1 Was ist ein „Begriff“? – Versuch einer eingrenzenden Beschreibung 35
1.3.1.1 Erste Fragen und erste Antworten 35
1.3.1.2 „Begriff“ – ein Blick in wohl weniger bekannte Werke 36
1.3.1.3 Was ist ein Begriff? — Gottlob Frege 38
1.3.2 Begriffsbildung als Prozess 40
1.3.2.1 Begriffsbildung in ontogenetischer und in kulturhistorischer Sicht 40
1.3.2.2 Aspektvielfalt von „Begriffsbildung“ im mathematikdidaktischen Kontext 42
1.3.2.3 Phasen der Begriffsbildung 44
1.3.2.4 Das epistemologische Dreieck 47
1.3.3 Fazit: Begriff – Grundbegriff – Grundlegender Begriff 48

**2 Grundlagen mathematischer Strukturen 51**

2.1 Überblick 51

2.2 Algebra: vom Verfahren zur Struktur — und wieder zurück 51
2.2.1 Elementare algebraische Strukturen in naiver Sicht 51
2.2.2 Die grundlegende Wende in der „Algebra“: vom Verfahren zur Struktur 52
2.2.3 „Algebra“: zur Entstehung der Bezeichnung 53
2.2.4 Cardano und seine Formeln 55
2.2.5 „Gruppen“ – wie es dazu kam 57
2.2.5.1 Gleichungslehre: mit Permutationen von Cardano über Hudde bis zu Abel und Galois 57
2.2.5.2 Felix Klein und die Geometrie: Invarianten bei Bewegungen 66
2.2.5.3 Gauß, Lagrange und die Zahlentheorie: Quadratische Formen 67
2.2.5.4 Gruppen bei Cayley und Weber: die Geburt der modernen Algebra 69

2.3 Logik und Mengen 71
2.3.1 Vorbetrachtung 71
2.3.2 Aussagen und „klassische“ Aussagenlogik 72
2.3.3 Aussagenlogische Junktoren 77
2.3.3.1 Das aussagenlogische NICHT 77
2.3.3.2 Das aussagenlogische UND — die Konjunktion 79
2.3.3.3 Das aussagenlogische ODER — Adjunktion und Disjunktion 80
2.3.3.4 Das aussagenlogische WENN ... DANN — die Subjunktion 81
2.3.3.5 Das aussagenlogische GENAU DANN … WENN — die Bijunktion 82
2.3.3.6 Gegensätze: „konträr“ versus „kontradiktorisch“ 82
2.3.4 Aussagenkalkül und aussagenlogische „Gesetze“ 82
2.3.5 Quantoren und Variablenbindung 85
2.3.6 Zur „Ersetzungsregel“ und einer Konsequenz 87
2.3.7 Mengen 88
2.3.7.1 Zur Entstehung der Mengenlehre 88
2.3.7.2 Mengen — grundlegende Notationen und Definitionen 92
2.3.7.3 Extensionalitätsprinzip und Mengeninklusion 94
2.3.7.4 Aussonderungsprinzip und leere Menge 94
2.3.8 Mengenalgebra 96
2.3.8.1 Verknüpfungen von Mengen und Venn-Diagramme 96
2.3.8.2 Potenzmengen 99
2.3.8.3 Mengenalgebra als Struktur 101
2.3.9 Paarmengen und Produktmengen 103
2.3.10 Erste Anmerkungen zur „axiomatischen Mengenlehre“ 106
2.3.11 Vage Logik (Fuzzy Logic) — ein kurzer Einblick 107

**3 Zu den historischen Wurzeln des Zahlbegriffs 111**

3.1 Was ist eine Zahl? 111
3.1.1 Subjektive Theorien zum Zahlbegriff 111
3.1.2 Vertiefende Diskussion 112
3.1.3 Aspekte von Begriffsbildung 114

3.2 Zum Zahlbegriff in vorgeschichtlicher Zeit 115

3.3 Zum Zahlbegriff in der Antike 116
3.3.1 Babylonische Keilschrifttafeln 116
3.3.1.1 Grundsätzliches 116

3.3.1.2 Yale YBC 7289 117
3.3.1.3 Plimpton 322 118
3.3.2 In Kürze: zur Arithmetik der alten Ägypter 121
3.3.3 Hatten Babylonier und Ägypter schon einen „Zahlbegriff“? 122
3.3.4 Pythagoreer: Größenverhältnisse als Proportionen 123
3.3.4.1 Pythagoreer: Mathematik als „freie Wissenschaft“, als „Spiel des Geistes“ 123
3.3.4.2 Zum Zahlenverständnis der Pythagoreer — Eins ist keine „Zahl“! 125
3.3.4.3 „Alles ist Zahl“ 126
3.3.4.4 Wechselwegnahme und größtes gemeinsames Maß 128
3.3.4.5 Pythagoreische Mittelwerte und babylonischer Approximationsalgorithmus 130
3.3.4.6 Babylonischer Algorithmus und Heron-Verfahren 132
3.3.5 Die Entdeckung der Irrationalität 133
3.3.5.1 Das Pentagramm der Pythagoreer 133
3.3.5.2 Hippasos von Metapont und das Pentagon 134
3.3.5.3 Wechselwegnahme bei Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck 136
3.3.5.4 Inkommensurabilität und Konsequenzen für die Verhältnisgleichheit 137
3.3.5.5 Irrationalität 140
3.3.5.6 Alternativen zur Entdeckung der Inkommensurabilität? 142
3.3.5.7 Ergänzungen 144
3.3.5.8 Ein kritischer Rückblick 145

3.4 Fazit 146

**4 Zur Kulturgeschichte des Funktionsbegriffs 147**

4.1 Was ist eine Funktion? – Problematisierung 147

4.2 Zeittafel zur Entwicklung des Funktionsbegriffs 152

4.3 Babylonier und griechische Antike 153
4.3.1 Babylonier: Tabellierung von Funktionen 153
4.3.2 Griechische Antike: kinematisch erzeugte Kurven als Funktionen 153

4.4 Zeitachsenorientierte Darstellungen im Mittelalter 155
4.4.1 Klosterschule: Zodiac – Planetenbahnen im Tierkreis 155
4.4.2 Guido von Arezzo: Notenschrift als zeitachsenorientierte Darstellung 157
4.4.3 Darstellung zeitabhängiger Größen durch Nicole d’Oresme 157

4.5 16. bis 18. Jh.: Tafeln, empirische Tabellen und Graphen 161
4.5.1 1551 Rheticus – erste trigonometrische Tabellen 161
4.5.2 1614 John Napier: erste „Logarithmentafeln“? 162
4.5.3 1662 John Graunt: erste demographische Statistik 164
4.5.4 1669 Christiaan Huygens: „Lebenslinie“ und „Lebenserwartungszeit“ 165
4.5.5 1686 Edmund Halley: Luftdruckkurve 165
4.5.6 1741 / 1761 Johann Peter Süßmilch: geistiger Vater der Demographie 166
4.5.7 1762 / 1779 Johann Heinrich Lambert: Langzeittemperaturmessungen 167
4.5.8 1786 William Playfair: Linien-, Balken- und Tortendiagramme 170
4.5.9 1795 / 1797 Louis Ézéchiel Pouchet: Nomogramme 171
4.5.10 1796 James Watt & John Southern: Dampfmaschine und Kreisprozess 171
4.5.11 1817 Alexander von Humboldt: erstmals geographische Isothermen 172

4.5.12 1821 Jean Baptiste Joseph Fourier: Häufigkeitsverteilungen 172

4.6 Beginn der expliziten Begriffsentwicklung von „Funktion" 173
4.6.1 Überblick 173
4.6.2 1671 Isaac Newton: Fluxionen und Fluenten 173
4.6.3 1673 / 1694 Gottfried Wilhelm Leibniz: erstmals das Wort „Funktion" 174
4.6.4 1691 / 1694 Jakob I. Bernoulli 175
4.6.5 1706 / 1718 Johann I. Bernoulli: erstmals Definition von „Funktion" 175
4.6.6 1748 Leonhard Euler: erstmals „Funktion" als grundlegender Begriff 176

4.7 Entwicklung zum modernen mathematischen Funktionsbegriff 177
4.7.1 1822 Jean Baptiste Fourier: erste termfreie Definition von „Funktion" 178
4.7.2 1829 / 1837 Dirichlet: termfreier Funktionsbegriff 179
4.7.3 1875 Du Bois-Reymond: Funktion als Tabelle 181
4.7.4 1887 Richard Dedekind: Abbildung als eindeutige Zuordnung 182
4.7.5 1891 Gottlob Frege: Präzision – *Funktion, Argument, Funktionswert* 183
4.7.6 Ende 19. Jh. Peirce, Schröder, Peano: erstmals Funktion als Relation 185
4.7.7 1903 – 1910 Russell, Zermelo, Whitehead: Annäherung an „Funktion als Relation" 186
4.7.8 1914 Felix Hausdorff: mengentheoretische Definition von „Funktion" als „Relation" 186

4.8 „Gesichter" von Funktionen — die aktuelle große Vielfalt 188
4.8.1 Funktion als Relation – oder? 188
4.8.2 Bilder als Funktionen – Sichtbare Funktionen 191
4.8.3 Hörbare Funktionen 192
4.8.4 Digitalisierung als Diskretisierung durch Abtastung und Quantisierung 194
4.8.5 Scanner als materialisierte Funktion 195
4.8.6 Funktionenplotter, Funktionsplots und Schaubilder von Funktionen 196
4.8.7 Funktion und Funktionsgraph: eine kuriose formale Konsequenz 196

4.9 Fazit 197

**5 Strukturierung durch Relationen und Funktionen 201**

5.1 Relationen und Funktionen — grundlegende Definitionen 201
5.1.1 Vorbetrachtungen zur Definitionsfindung 201
5.1.2 Binäre und mehrstellige Relationen 202
5.1.3 Funktionen 204
5.1.4 „Mehrstellige Funktionen" versus „Funktionen mehrerer Veränderlicher"? 213
5.1.5 Binäre Operationen (Verknüpfungen) und mehrstellige Operationen 214
5.1.6 Verkettung von Relationen 216

5.2 Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen 218
5.2.1 Eigenschaften binärer Relationen: Formalisierung und Visualisierung 218
5.2.2 Quotientenmengen und Zerlegungen 221
5.2.3 Halbordnung, Totalordnung, Striktordnung, Trichotomie, Wohlordnung 225

5.3 Strukturierung und Axiomatik — Grundsätzliches 229
5.3.1 Axiomatische Methode 229
5.3.1.1 Was sind Axiome? 229
5.3.1.2 Was ist Axiomatik? 231

5.3.1.3 Deduktion, Induktion und Abduktion 232
5.3.2 Axiomensysteme 233
5.3.2.1 Anforderungen an ein Axiomensystem 233
5.3.2.2 Widerspruchsfreiheit 233
5.3.2.3 Unabhängigkeit 235
5.3.2.4 Vollständigkeit 236
5.3.3 „Modell“ und „Modellierung“ — (wie) passt das zusammen? 236
5.3.4 Mengenalgebra als Boolesche Algebra 237
5.3.5 Zur Unabhängigkeit eines Axiomensystems am Beispiel von Gruppen 238
5.3.6 Fazit 246

**6 Natürliche Zahlen in axiomatischer Sichtweise 247**

6.1 Was sind natürliche Zahlen? 247

6.2 Die Nachentdeckung der Dedekind-Peano-Axiome 249

6.3 Abstraktion: Dedekind-Peano-Algebra 254

6.4 Analyse von Dedekind-Peano-Algebren 259
6.4.1 Vollständige Induktion 259
6.4.2 Unabhängigkeit der Dedekind-Peano-Axiome 261
6.4.3 Homomorphismen in Dedekind-Peano-Algebren 262
6.4.4 Der Monomorphiesatz für Dedekind-Peano-Algebren 268
6.4.5 Der Rekursionssatz 270

6.5 Der angeordnete Halbring der natürlichen Zahlen 273

6.6 Endlichkeit und Abzählbarkeit 277

**7 Bruch und Bruchentwicklung 283**

7.1 Was ist eigentlich ein „Bruch“? — Erste vorsichtige Ansätze 283
7.1.1 Vorgeschichte 283
7.1.2 Paradoxien bei Brüchen — das Chuquetmittel 284
7.1.3 Etymologische Aspekte 286
7.1.4 Erste historische Aspekte 287
7.1.5 Was ist ein Bruch? – (Typische?) Schlaglichter einer Umfrage 287
7.1.6 Wir tasten uns heran — erste algebraische Aspekte 288
7.1.7 Strukturmathematische Präzisierung 291
7.1.8 Brüche und „Aufbau des Zahlensystems“ 294
7.1.9 Die Menge der Bruchzahlen 295
7.1.10 Wohldefiniertheit bei Bruchverknüpfungen 298

7.2 Grundvorstellungen bei Brüchen 300
7.2.1 Vorbemerkung 300
7.2.2 Einige Einstiegsbeispiele 301
7.2.3 Bruch als „Teil eines Ganzen“ oder als „Teil mehrerer Ganzer“ 302
7.2.4 Quasikardinaler Aspekt bei Brüchen 305
7.2.5 Quasiordinaler Aspekt bei Stammbrüchen 306
7.2.6 Bruch als (Zahlen-)Verhältnis 306

7.2.7 Bruch als Vergleichsinstrument — der „von-Ansatz“ 308
7.2.8 Subjektive Erfahrungsbereiche 309
7.2.9 Eine falsche Grundvorstellung zur Bruchaddition? 311

7.3 Vorstellungen und Darstellungen von (Bruch-)Zahlen 313
7.3.1 Gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche 313
7.3.2 Brüche als Namen für Zahlen 314
7.3.3 Konkrete und abstrakte Brüche 315
7.3.4 Bruchzahlen als „Zahlen“? 316

7.4 Bruchrechnung 317
7.4.1 Vorbemerkung 317
7.4.2 Erweitern und Kürzen 318
7.4.3 Größenvergleich von Brüchen 323
7.4.4 Addition von Brüchen 326
7.4.5 Subtraktion von Brüchen 332
7.4.6 Multiplikation von Brüchen 333
7.4.7 Einbettung der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen 338
7.4.8 Identifizierung von Bruchschreibweise und Divisionsschreibweise 338
7.4.9 Division von Brüchen 339
7.4.10 Doppelbrüche 345

7.5 Bruchentwicklung 346
7.5.1 Vorbemerkung 346
7.5.2 Stammbruchentwicklungen 347
7.5.3 Kettenbruchentwicklungen 354
7.5.4 Farey-Folgen und Fordkreise 357

**8 Struktur der Zahlenbereiche 361**

8.1 Ganze Zahlen und rationale Zahlen 361
8.1.1 Unvollständigkeiten des angeordneten Halbrings der natürlichen Zahlen 361
8.1.2 Einbettung — eine Übersicht 362
8.1.3 Konstruktion des Rings der ganzen Zahlen — Skizze 364
8.1.4 Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen — Skizze 369

8.2 Der archimedisch angeordnete, unvollständige Körper der rationalen Zahlen 370
8.2.1 Der angeordnete Ring der ganzen Zahlen 370
8.2.2 Der angeordnete Körper der rationalen Zahlen 373
8.2.3 Dichtheit des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen 374
8.2.4 Archimedizität des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen 376
8.2.5 Folgenkonvergenz in angeordneten Körpern 381
8.2.6 Unvollständigkeit des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen 389

8.3 Konstruktion der reellen Zahlen über Fundamentalfolgen 392
8.3.1 Der Körper der reellen Zahlen 392
8.3.2 Der archimedisch angeordnete Körper der reellen Zahlen 394
8.3.3 Zur Vollständigkeit des Axiomensystems der reellen Zahlen: Übersicht 397
8.3.4 Zur Monomorphie des Axiomensystems der reellen Zahlen 398

8.4 Ergänzungen und Ausblick 399
8.4.1 Axiomatische Kennzeichnung der reellen Zahlen und der Unterstrukturen 399
8.4.2 Äquivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms der reellen Zahlen 402
8.4.3 Alternative Konstruktionsmöglichkeiten der Menge der reellen Zahlen 406
8.4.4 Reelle Zahlen: „Konstruktion“ versus „axiomatische Kennzeichnung“ 407
8.4.5 Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit und Transzendenz 408
8.4.6 Komplexe Zahlen und Quaternionen 415

**9 Gleichungen und Gleichheit 423**

9.1 Vorbemerkungen 423

9.2 Eine erste Bestandsaufnahme zum Gleichungsbegriff 424
9.2.1 Ein kurzer Blick in die Literatur 424
9.2.2 Kommentierung und Konsequenzen 426

9.3 Phänomenologische Aspekte zum Gleichungsbegriff 427
9.3.1 Vorbemerkungen 427
9.3.2 Mathematisch-inhaltliche Aspekte 429
9.3.3 Sprachliche Aspekte 432
9.3.4 Resümee 433

9.4 Gleichheit und Identität 434
9.4.1 Gleichheit und Identität im alltagssprachlichen Verständnis 434
9.4.2 Gleichheit im Rechtswesen 436
9.4.3 Übereinstimmung bezüglich „aller Merkmale“? 437
9.4.4 Gleichheit – Ununterscheidbarkeit – Identität 439
9.4.5 Gleichheit und Äquivalenz in der Mathematik 441
9.4.6 Ungleichheit und Verschiedenheit 445
9.4.7 Zu einer axiomatischen Fassung des Identitätsbegriffs 447
9.4.8 Ein kritischer Rückblick 450
9.4.9 Tertium comparationis – Drittengleichheit 452

9.5 Ein allgemeiner Gleichungsbegriff 453
9.5.1 Vorbemerkung 453
9.5.2 Zur Definition von „Gleichung“ 454
9.5.3 Zur Vorgehensweise im Rückblick 458
9.5.4 Gleichungen in nicht-numerischen Strukturen 460
9.5.5 Ungleichungen 461

9.6 Zum Gleichheitszeichen 462

9.7 Schlussbemerkung 469

**10 Zu den Lösungen der Aufgaben 471**

**Literatur 509**

**Bildquellennachweise 525**

**Index 527**

Für Ingeborg, Monika und Corinna

# 1 Mathematik kulturhistorisch begreifen

## 1.1 Mathematik zwischen Anwendung und Spiel

### 1.1.1 Vorbemerkung

Die Mathematik begegnet uns seit ihren Anfängen in vorgeschichtlicher Zeit bis heute im Spannungsfeld zwischen zwei verschiedenen Seiten einer Medaille: einerseits mit einer nicht auf Nutzen und Anwendung gerichteten, quasi philosophischen Seite, die zur „Reinen Mathematik“ (bzw. „Theoretischen Mathematik“) gehört, andererseits auch mit einer auf Anwendung gerichteten utilitaristisch-technischen Seite, die typisch ist für die „Angewandte Mathematik“ (bzw.: „Praktische Mathematik“) und etliche Anwendungsdisziplinen wie z. B. Physik, Ingenieurwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften. Im Spannungsfeld zwischen diesen beiden Seiten ist ein der Allgemeinbildung verpflichteter Mathematikunterricht zu inszenieren. Denn die Legitimation von Bildungszielen und Unterrichtsfächern darf sich nicht nur auf utilitaristische Aspekte der „Anwendbarkeit“ oder der „Nützlichkeit für die Gesellschaft“ gründen, vielmehr muss „Schule“ *auch* ihrem nicht auf Nutzen gerichteten Wortursprung σχολή[1] (im Sinne von „Muße“) gerecht werden! Diese grundsätzlichen Aspekte seien in diesem Kapitel *exemplarisch für die Geometrie* erläutert und durch ausgewählte Beispiele von den „Anfängen“ bis heute veranschaulicht.

Das Wort „Geometrie“ tritt (zumindest in der Mathematik) in einer Fülle von Wortkombinationen auf, wie beispielsweise in den nachfolgend ausgewählten, alphabetisch aufgeführten:

> Abbildungsgeometrie, Absolute Geometrie, Affine Geometrie, Algebraische Geometrie, Analytische Geometrie, Darstellende Geometrie, Desargues-Geometrie, Deskriptive Geometrie, Differentialgeometrie, Ebene Geometrie, Elliptische Geometrie, Endliche Geometrie, Euklidische Geometrie, Galois-Geometrie, Gewebe-Geometrie, Hyperbolische Geometrie, Innere Geometrie, Inzidenzgeometrie, Kugelgeometrie, Laguerre-Geometrie, Lie-Geometrie, Lobatschewski-Geometrie, Minkowski-Geometrie, Möbius-Geometrie, Nichteuklidische Geometrie, Pappus-Geometrie, Poisson-Geometrie, Projektive Geometrie, Pseudoeuklidische Geometrie, Pseudounitäre Geometrie, Raumgeometrie, Riemann-Geometrie, Sphärische Geometrie, Stochastische Geometrie, Synthetische Geometrie, Tropische Geometrie, Unitäre Geometrie, Vektorgeometrie, Wirklichkeitsgeometrie, …

Das konfrontiert uns zunächst mit der Tatsache, dass „Geometrie“ doppelsinnig zu verstehen ist: einerseits als Bezeichnung für ein spezielles Teilgebiet und andererseits auch als Bezeichnung für die (prinzipiell offene) Kategorie des Insgesamt all dieser Teilgebiete. „Geometrie“ bedeutet gemäß der griechischen Wortherkunft etwa „Erd-Messung“ und meint damit ursprünglich einen recht praktischen, „anwendungsbezogenen“ Bereich, wie er uns z. B. in den Bezeichnungen „Darstellende Geometrie“ und „Raumgeometrie“ zu begegnen scheint.

[1] Gelesen „s-cholé“ (wie in „Häs-chen“ oder „biss-chen“), transkribiert „schole“.


H. Hischer, *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-62233-9_1

Aber wir finden auch „Geometrien", bei denen ein „Anwendungsbezug" nicht oder kaum erkennbar ist, so z. B. bei „Absoluter Geometrie" und bei „Inzidenzgeometrie". Dabei sei zur Vermeidung von Missverständnissen festgehalten, dass mit „Anwendungen" an dieser Stelle stets *Anwendungen außerhalb der Mathematik* gemeint sind, denn selbstverständlich können mathematische Erkenntnisse und Ergebnisse auch innerhalb der Mathematik angewendet werden – doch darum soll es hier nicht gehen, wenn nachfolgend von „Anwendungen" die Rede ist.

### 1.1.2 Das Morley-Dreieck zwischen Anwendung und Spiel

[…] es ist in der That bewundernswürdig, daß eine so einfache Figur,
wie das Dreieck, so unerschöpflich an Eigenschaften ist.

*August Leopold Crelle, 1821*

FRANK MORLEY (geboren 1860 in Woodbridge, Suffolk, England; gestorben 1937 in Baltimore, Maryland, USA), war gemäß [OAKLEY & BAKER 1978, 737] ein „großer algebraischer Geometer". Er wurde später durch einen nach ihm benannten Satz berühmt:[2]

> **Satz von Morley** (ca. 1899):
> *Die drei Schnittpunkte der drei anliegenden Winkeldreiteilenden eines beliebigen Dreiecks bilden ein gleichseitiges Dreieck.*

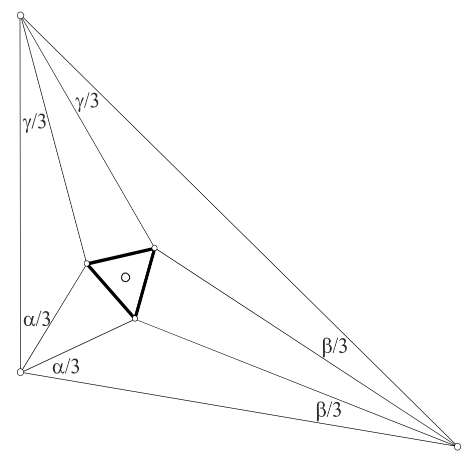


Bild 1.1: Ein Dreieck und sein Morley-Dreieck

Bild 1.1 macht einerseits diesen Sachverhalt „offen sichtlich" und legt andererseits zugleich eine „naive" Konstruktion nahe: Mit einem Programm für bewegliche Geometrie lässt sich (mittels numerischer Winkeldrittelung!) das innere Dreieck „konstruieren", und die Erzeugung eines Kreises um einen der drei Eckpunkte durch einen der beiden anderen nebst interaktiver Variation des Ausgangsdreiecks visualisiert den Satz von MORLEY .

Dabei sollte man jedoch nicht versäumen, über die Konsequenzen aus diesem Satz gebührend zu staunen: Denn durch solch eine „simple" Konstruktion wird *jedem Dreieck* eindeutig sein „eigenes" gleichseitiges Dreieck quasi als sein „Herzstück" zugeordnet, nämlich *sein Morley-Dreieck!* Der *Satz von Morley* ist daher auch unter der Bezeichnung „**Morleys Wunder**" (Morley's Miracle) bekannt geworden. Bei MORLEY selbst taucht dieser Satz allerdings nur nebenbei und implizit als Spezialfall einer von ihm 1900 in der Arbeit "On the metric geometry of the plane $n$-line" veröffentlichten Theorie auf.

2 Satz von MORLEY in der Formulierung gemäß [COXETER 1963, 41].

So wird bei [OAKLEY & BAKER 1978, 738] erwähnt, dass MORLEY „kein Aufheben(s)“ wegen dieses Satzes gemacht und dazu auch nie einen Beweis publiziert habe:[3]

> Morley, of course, was well aware of the unique characteristics of his theorem and its ramifications. […] but it pleased him to indicate that he had not bothered to make a big song and dance about it since it was only a small part of his general theory. And so he never enunciated, in print, just the simple theorem, nor did he ever publish a direct verification of it.

Verwundern mag allerdings, dass dieser geradezu ins Auge springende Satz erst so spät entdeckt worden ist – sind doch Dreiecke bereits seit EUKLID stets Gegenstand der (Elementar-) Geometrie und gibt es doch auch eine etablierte „Dreiecksgeometrie“! Gemäß [COXETER 1963, 46] liegt das möglicherweise an der für diesen Satz konstitutiven „Winkeldreiteilung“:

> Dies mag der Grund dafür sein, daß der Satz von Morley […] erst im zwanzigsten Jahrhundert gefunden wurde, man fühlte sich unfähig, über gedrittelte Winkel nachzudenken.

Die *Winkeldreiteilung* gehört zu den „drei berühmten klassischen Problemen der Antike“ (neben der *Verdoppelung des Würfels* und der *Quadratur des Kreises*). Lässt man nur „Zirkel und Lineal“ als „ideale“ (nicht reale!) Konstruktionswerkzeuge zu, so konnte bekanntlich erst im 19. Jahrhundert abschließend geklärt werden, dass diese drei Probleme *in diesem Sinne* (!) *nicht lösbar* sind. Alle drei Konstruktionen sind jedoch kein Problem für praktische, etwa mechanische Anwendungen, weil es hierfür seit langem etliche Werkzeuge gibt, die jeweils hinreichend gute praxistaugliche Lösungen liefern. Und so ist das „Problem der Winkeldreiteilung“ aus Sicht der Praxis und der Technik von ähnlicher Bedeutung wie etwa die Frage nach der Irrationalität von $\sqrt{2}$ oder die nach der Transzendenz von $\pi$: All diese „Probleme“ sind für handwerkliche oder technische Anwendungen gleichermaßen irrelevant – dennoch sind es jeweils *fundamentale mathematische Fragen!*[4] – Typisch Mathematik?

Wenn man nun aber die Winkeldreiteilung nicht unter dem Aspekt von „Geometrie als Anwendung“ sehen will, so gilt das auch für den Satz von MORLEY, der uns heute unter dem Aspekt von „Geometrie als Spiel“ begegnet – genauer: unter dem Aspekt von „Geometrie als Spiel des Geistes“, was noch zu erläutern sein wird.

**Satz von Yff** (1967):
*Ein beliebiges Dreieck und sein Morley-Dreieck liegen stets in Perspektive.*

**PETER YFF** (gesprochen „Eiff“; 8. 3. 1924 in Chicago geboren und daselbst 13. 11. 2019 gestorben, seit 1951 an der Amerikanischen Universität von Beirut tätig, 1986 dort emeritiert) bewies 1967 mit Hilfe sog. *trilinearer Koordinaten* den Satz von MORLEY. Dabei entdeckte und bewies er den nebenstehend genannten Satz (vgl. Bild 1.2):

[3] Der Satz von MORLEY wurde (wohl erstmalig) in [EBDEN 1908] und (erweitert) in [EBDEN 1909] als Aufgabe publiziert, und bald erschienen drei Beweise in [BEARD 1909], [NARANIENGAR 1909] und [SATYANARAYANAR 1909]. Unter http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/ (26. 07. 2020) gibt es Hinweise auf weitere Beweise. 1976 publizierte E. P. B. UMBIGIO einen elementargeometrischen Beweis in *Esperanto* (vgl. [GLAESER 2005, 15]). Die Beweise liegen nicht auf der Hand, obwohl z. T. Kenntnisse der (klassischen!) Schulmathematik genügen.

[4] Siehe hierzu die ausführliche Untersuchung der drei „klassischen Probleme der Antike“ in [HISCHER 2018].

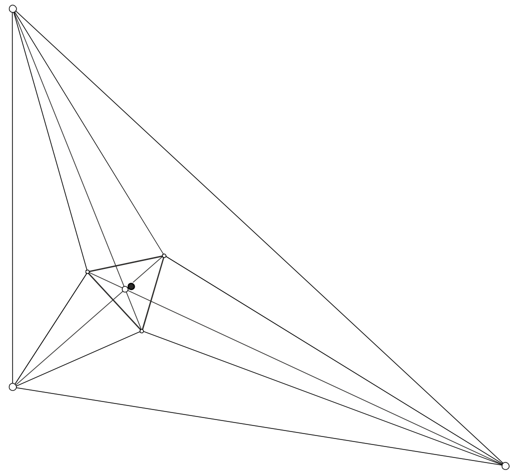

Bild 1.2: Satz von Yff
(Morley-Punkt schwarz, Yff-Punkt weiß)

Die drei Verbindungsstrecken zwischen den Dreieckspunkten und den zugeordneten Eckpunkten des Morley-Dreiecks haben also einen gemeinsamen Schnittpunkt, der ein *Perspektivzentrum* für beide Dreiecke ist. Das bedeutet weiterhin, dass *jedes Dreieck* nicht nur projektiv, sondern sogar *perspektivisch auf ein gleichseitiges Dreieck* abgebildet werden kann. Dieses Perspektivzentrum hieß ursprünglich „*Yff-Punkt*" des gegebenen Dreiecks, wird jetzt aber *„zweiter Morleypunkt"* des Dreiecks genannt, während der in Bild 1.2 schwarz dargestellte (i. a. davon verschiedene) Mittelpunkt des Morleydreiecks nunmehr *„erster Morleypunkt"* heißt, nachdem in den 1980er Jahren eine 1913 publizierte Arbeit von TAYLOR & MARR entdeckt wurde, in der diese bereits einen Beweis des Satzes von YFF vorgelegt hatten.

YFF hat seine eigene Entdeckung und den Beweis nie veröffentlicht, sondern er hat diese nur in seinem Notizbuch festgehalten, weil sich *„lange Zeit kaum jemand für die Dreiecksgeometrie zu interessieren schien"*, wie er mir am 14. 03. 2011 mitteilte:

> It is true that I proved these results in 1967, but I never published them. I believe that they became known after I gave them to Clark Kimberling about 20 years ago. […] For a long time I did not know many others who were studying triangle geometry, and I merely wrote my results in a notebook.[5]

Durch den Einbezug von „Perspektive" bekommt der „Satz von Yff" – obwohl „spielerisch" entdeckt – eine andere Qualität als der von MORLEY, denn „Perspektive" gehört originär in die Darstellende Geometrie, also in einen primär anwendungsbezogenen Bereich. Und man wird wohl schon über ein fundiertes Anschauungsvermögen verfügen müssen, um eine entsprechende Entdeckung machen zu können. Damit soll nicht verkannt werden, dass „Perspektive" in der Projektiven Geometrie definiert und untersucht wird – dann ggf. weniger mit Blick auf Anwendungen wie in der Darstellenden Geometrie.

Geometrische Sachverhalte können also einerseits (im ursprünglichen Verständnis von „Geometrie") mit Bezug auf Anwendungen gesehen werden, und andererseits können sie offenbar ohne Anwendungsbezug (dann als „Spiel des Geistes") auftreten, wobei diese Sichtweisen nicht stets trennscharf sein müssen. Das wird in den folgenden Abschnitten anhand von Beispielen vertieft. Doch zunächst folgen zwei Einschübe:

---

5 Siehe hierzu die von CLARK KIMBERLING gepflegte "Encyclopedia of Triangle Centers", in der viele tausend „Dreiecks-Mittelpunkte" mit Quellenangaben erfasst sind: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html (am 13.06. 2020 waren es 38899 Einträge). YFF hat mir seinen handschriftlich rekonstruierten Beweis zugesandt.

### 1.1.3 Mathematik zwischen „homo faber“ und „homo ludens“

Statt von „Anwendung“ sollte man in diesem Kontext besser von „Technologie“ sprechen, was aber erfordern würde, das mit „Technologie“ verbundene Konzept darzustellen, was aber nicht Anliegen dieses Buches ist.[6] Wesentliches sei anhand von Bild 1.3 erläutert:[7]

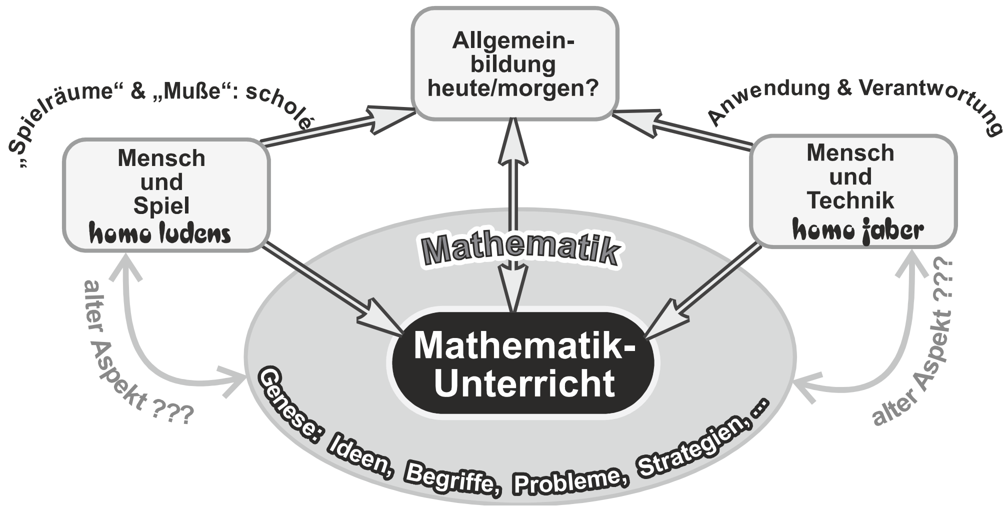


Bild 1.3: Mathematik(-Unterricht) im Spannungsfeld zwischen Anwendung und Spiel

Die Mathematik ist seit ihren babylonischen Anfängen vor rund 4500 Jahren stets auch auf reale Probleme außerhalb ihrer selbst angewendet worden. Sie hatte und hat hierbei maßgeblichen Anteil an der Entwicklung sowohl der Ingenieurwissenschaften als auch der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, und sie hat sich durch die Herausforderungen dieser Anwendungsdisziplinen in ganz besonderer Weise weiterentwickelt. Mit steigender Tendenz entwickelt sich nunmehr die Mathematik zu einem wichtigen Werkzeug in Wissenschaft und Technik und in weiteren Bereichen der Gesellschaft wie z. B. in der Finanzwirtschaft. Jedoch bringen solche Anwendungen auch *verantwortungsethische Herausforderungen* für den homo faber als den „(mittels Technik) gestaltenden Menschen“ mit sich.

Der Mensch als homo sapiens begegnet uns aber nicht nur in der Rolle dieses homo faber, sondern auch als homo ludens, also als „spielender Mensch“, was der niederländische Kulturhistoriker JOHAN HUIZINGA in seinem gleichnamigen Buch eindrucksvoll beschreibt.[8]

---

6 Der seit langem in der Öffentlichkeit und auch in der Mathematikdidaktik übliche Gebrauch von „Technologie“ ist oft oberflächlich und lässt die damit verbundene philosophisch-soziologische Dimension vermissen (wie sie durch „Anwendung und Verantwortung“ und auch durch „homo faber“ angedeutet wird), weil dann „Technologie“ lediglich als unreflektierter Reimport aus dem Angloamerikanischen benutzt wird, wo dieses Wort schlicht für „Technik“ verwendet wird. Ausführlichere Betrachtungen zu „Spiel“ und „Technologie“ und zu ihrem Verhältnis finden sich bisher u. a. in [HISCHER 2002a] und in [HISCHER 2016].

7 Reduktion der Abbildung aus [HISCHER 2002a, 98]. Die hier auftretenden Termini „Genese“, „Ideen“, „Begriffe“ usw. sind inhaltlich nicht trennscharf. Hierauf gehen wir in Abschnitt 1.3 ein.

8 [HUIZINGA 1987]

Schon FRIEDRICH VON SCHILLER betont die Bedeutung des Spielens für das Menschsein:[9]

> […] der Mensch spielt nur, wo er in voller Bedeutung des Wortes Mensch ist, und er ist nur da ganz Mensch, wo er spielt.

Und der Erziehungswissenschaftler HORST RUPRECHT schreibt dazu 1989:[10]

> Es ist klar, daß das Curriculum der Schulen sich öffnen muß für Spielräume in allen Fächern. *Mathematik* ist ein grandioses *Spiel des Geistes* und als solches müßte sie in den Schulen erscheinen.

RUPRECHT benutzt hier „Spielraum" im Sinne von „spielerischer Freiraum" als freie Übersetzung des griechischen „schole" für „Muße" (worauf „Schule" zurückgeht, vgl. S. 1). Er ruft also eindringlich zu *mehr Muße in der Schule* auf – aber: unsere Schule als (H)Ort der Muße? Und das angesichts einer aktuellen, auf einen zentral normierten „Output" hin stattfindenden Orientierung, die angeblich einer Objektivierung der Leistungsbewertung geschuldet ist?

„Spiel" darf dabei aber nicht mit der oft negativ konnotierten „Spielerei" gleichgesetzt werden, vielmehr ist darunter (auch im Sinne von HUIZINGA) u. a. Folgendes zu verstehen:[11]

> Das *Spiel* findet seinen Sinn in sich selbst – es erzeugt Freude – es ist weitgehend nicht auf Nutzen oder konkrete Anwendung gerichtet – es wird individuell, häufig in Gruppen durchgeführt, hat damit auch eine soziale Komponente – es findet dabei durchaus nicht regellos statt, wie wir schon an dem Wort „Spielregeln" sehen, die sozial ausgehandelt werden müssen – es erfordert von allen Mitspielern Aktivität, d. h., es gibt kein „passives Spielen" – und es bedarf dennoch der *Muße*.

So unterscheiden sich die Aspekte „Spiel" und „Anwendung" *grundsätzlich*: Denn zu *Anwendungen* gehört stets eine zu verantwortende *Außenwirkung* – sie sind *auf Nutzen gerichtet*. Das *Spiel* ist hingegen *nicht auf Nutzen gerichtet* und primär ohne (geplante) Außenwirkung. Beides trifft auch auf die Mathematik zu: *Mathematik als Anwendung* und *Mathematik als Spiel des Geistes* – und in „Spiel des Geistes" zeigt die Mathematik ihre philosophische und zweckfreie Seite.

Unterstellt man als (ein) Ziel des Mathematikunterrichts die *Vermittlung eines gültigen Bildes der Mathematik*, so sind bei dessen Inszenierung also die *beiden* Aspekte „Anwendung" und „Spiel" zu berücksichtigen. Insbesondere darf man nicht der Versuchung erliegen, dem Zeitgeist folgend den Mathematikunterricht damit *rechtfertigen* zu wollen, dass Mathematik nützlich und anwendbar sei. Der Philosoph ODO MARQUARD beschreibt eine solche „allgegenwärtige" Haltung als *„Ubiquisierung des Rechtfertigungsverlangens"* und schreibt u. a.:[12]

> Denn heute bedarf offenbar alles der Rechtfertigung: […] nur eines bedarf – warum eigentlich? – keiner Rechtfertigung: die Notwendigkeit der Rechtfertigung vor allem und jedem.

So ist hervorzuheben:

- *Mathematik bedarf ebenso wenig einer Rechtfertigung wie Dichtung, Kunst und Musik!*

---

9 In: *„Die ästhetische Erziehung des Menschen in einer Reihe von Briefen, Fünfzehnter Brief"* (1785)

10 [RUPRECHT 1989, 38 f.]; Hervorhebungen nicht im Original.

11 Nach [HISCHER 2002a, 91 f.]; diese Aspekte wurden 1994 in einer Gruppe bei einer Arbeitstagung entwickelt.

12 [MARQUARD 1986, 11]

### 1.1.4 Mathematik und das Menschenrecht auf Irrtum

„Woran arbeiten Sie?“ wurde Herr K. gefragt. Herr K. antwortete:
„Ich habe viel Mühe, ich bereite meinen nächsten Irrtum vor.“

*Bert Brecht, in ‘Geschichten vom Herrn Keuner’ (aus den ‘Kalendergeschichten’)*

Im Zusammenhang mit Anwendung und Spiel ist ein weiterer Aspekt bedeutsam: der *Irrtum*. So thematisiert der Sozialphilosoph BERND GUGGENBERGER ein Jahr nach Tschernobyl das *„Menschenrecht auf Irrtum“*, und zuvor merkt ODO MARQUARD an: *„Wir irren uns empor!*[13]

Warum ist all dies im vorliegenden Kontext erwähnenswert?

GUGGENBERGER plädiert für eine positive Sicht des Irrtums: Die alte Formel des errare humanum est – „Irren ist menschlich“ – werde meist als Aussage über einen verzeihlichen Mangel des Menschen missverstanden. Hingegen komme in ihr ein besonderer Vorzug des Menschen zum Ausdruck, nämlich: Er ist des Irrens *fähig* und vermag daraus und *deshalb* zu lernen!

Insbesondere spricht GUGGENBERGER – passend zur o. g. Formel von ODO MARQUARD – von der *„Produktivkraft des Irrtums“* für die *Weiterentwicklung unseres Wissens.* Andererseits würden die heutigen großtechnischen Systeme tendenziell zur *Irrtumskatastrophe* neigen, und damit seien sie *nicht hinreichend fehlertolerant* und also unmenschlich. Er mahnt damit das „Menschenrecht auf Irrtum“ an, d. h., die technischen Systeme müssten so gestaltet werden, dass menschliche Irrtümer nicht in die Katastrophe münden. Er kontrastiert solche irrtumsfeindlichen technischen Systeme mit dem „*spielerisch-freien Erproben*“, welches für das Menschsein im Sinne einer „tastenden Vernunft“ wichtig sei. Und in der Tat sehen wir:

- Beim **Spiel** ist der Irrtum nicht nur möglich, und er ist nicht katastrophal, sondern er gehört dazu. Man weiß nicht, wie ein Spiel oder spielerisches Tun endet, andernfalls wäre es langweilig und kein Spiel mehr: Der Irrtum ist hier geradezu konstitutiv und also erwünscht.
- Hingegen in der **Technik** (und damit: bei **Anwendungen**) darf dieses nicht passieren. Der Ausgang von Handlungen, die Anwendungen nach sich ziehen, muss kalkulierbar sein: Der Irrtum ist unerwünscht, denn er kann in diesem Fall katastrophale Folgen haben.

Ob es möglich ist, technische Systeme *irrtumsfreundlich* zu entwickeln, sei dahingestellt. Im pädagogischen Kontext sollte jedoch die *Rolle des Irrtums in Lernprozessen* nachdenklich stimmen. GUGGENBERGER deutet die bereits erwähnte Formel *„Wir irren uns empor“* von ODO MARQUARD *evolutionstheoretisch*, und sie sei damit also sowohl chemisch und biologisch, also *phylogenetisch* (die stammesgeschichtliche Entwicklung betreffend), als auch kulturell und somit *kulturhistorisch* zu verstehen.

Darüber hinaus enthält diese Formel auch einen *ontogenetischen* (die Entwicklung des einzelnen Menschen betreffenden) und damit auch *pädagogischen* Aspekt, der in der Mathematik-Didaktik das „entdeckende Lernen“ betrifft.

[13] [GUGGENBERGER 1987], ferner [MARQUARD 1981, 121] und [MARQUARD 1986, 22].

So sollte den Schülerinnen und Schülern vermittelt werden, dass mathematische Begriffe sowohl in kultur- und wissenschaftshistorischer als auch in anwendungs- und kontextbezogener Hinsicht dynamisch und vielfältig sind, dass also das *Bilden von Begriffen und Definitionen stets ein kreativer Prozess* ist, der i. d. R. mit vielen Irrtümern verbunden ist. Damit sollten aber pädagogische Situationen des Irrens nicht möglichst vermieden, sondern gesucht und gefördert werden – zur Entfaltung der *„Produktivkraft des Irrtums"* für den Menschen. Die kontrastierenden und komplementären Auffassungen von **Mathematik** einerseits **als Spiel (des Geistes)** und andererseits als Technik **und** damit **als Anwendung** können bei didaktischen Planungen möglicherweise dazu beitragen, diesen Aspekt hervortreten zu lassen.

Zur kritischen Reflexion der in der Mathematik verwendeten Methoden und Werkzeuge, aber auch zur Würdigung der zweifellos seit Anbeginn spielerischen Aspekte mathematischen Tuns gehört notwendig ein *Blick in die historische Entwicklung der Begriffe, Ideen, Probleme und Strategien*. Und hierzu gehört die nicht neue

- *Erkenntnis, dass die Gegenstände des Mathematikunterrichts nicht nur als Fertigprodukt im Sinne eines wohldurchdachten, ausgefeilten Systems vorgesetzt werden dürfen.*

Vielmehr *muss* der Unterricht die wesentliche Erfahrung des *Suchens, Irrens, Probierens, Entdeckens* – also: des (elementaren) *Forschens – ermöglichen,* und das bezieht sich dann auf verschiedenartige *Phasen des Unterrichts* wie etwa: *Begriffsentwicklung – Problemlösen – Algorithmenentwicklung*. Und solche Aspekte müssen auch im *Mathematikstudium* auftreten.

### 1.1.5 Ein Blick in die Anfänge der Geometrie

#### *1.1.5.1 Geometrisches Handeln in vorgeschichtlicher Zeit*

Archäologische Funde legen die Auffassung nahe, dass lange vor der Erfindung der Schrift zuerst die Wahrnehmung und Gestaltung geometrischer Strukturen durch den Menschen stand. So sind bereits für die Zeit um ca. 40 000 v. Chr. geometrisch gestaltete Ornamente, etwa auf Tongefäßen, nachweisbar.[14] Insbesondere aus der Jungsteinzeit, dem Neolithikum (von ca. 4 000 v. Chr. bis ca. 1700 v. Chr.), sind uns viele geometrische Muster überliefert, beispielsweise Ornamente auf Tongefäßen wie in Bild 1.4.[15]

Bild 1.4:
Geometrische Ornamente auf Tongefäßen

14 Z. B. [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 6], Beispielabbildungen dazu fehlen dort leider.

15 [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 7]; eine Zeitangabe zu der Abbildung fehlt. Es ist jedoch nicht zu vermuten, dass die Autoren die abgebildeten Gefäße der o. g. Zeit um 40 000 v. Chr. zuordnen, sondern dass diese Gefäße also zur erwähnten Jungsteinzeit gehören.

Praktischen Nutzen haben solche geometrischen Muster wohl kaum gehabt. Man findet sie auch auf Grab-Ornamenten, vermutlich als *religiös-beschwörende Motive*, was bei den o. g. Keramiken auch nicht auszuschließen ist, es kann aber auch einfach *spielerische Freude an Mustern* gewesen sein, so wie man dieses bei Kindern beobachten kann. Und das Spiel ist ohnehin eine wichtige Quelle kreativen Tuns (vgl. die „quasihochsymmetrische", in einem Zug zeichenbare Figur in Bild 1.5):[16]

> Auch das Spiel als Quelle für die Beschäftigung mit geometrischen Eigenschaften sollte nicht übersehen werden. Nicht nur an Brettspiele, denen ja fast immer gewisse symmetrisch angelegte Muster zugrundeliegen, ist zu denken. Die Ethnomathematik, die sich in jüngster Zeit den impliziten mathematischen Vorstellungen bei den Naturvölkern zugewandt hat, lieferte erstaunliche Forschungsergebnisse. Bei einem afrikanischen Volksstamm in Angola findet sich beispielsweise die Sitte, beim Erzählen der Sage von der Weltentstehung freihändig eine Figur aus einem einzigen, sich kunstvoll verschlingenden Kurvenzug zu zeichnen, was sorgfältige geometrische Überlegungen erfordert, soll das gewünschte Resultat mit seinen Symmetrieeigenschaften hervorgebracht werden [...].

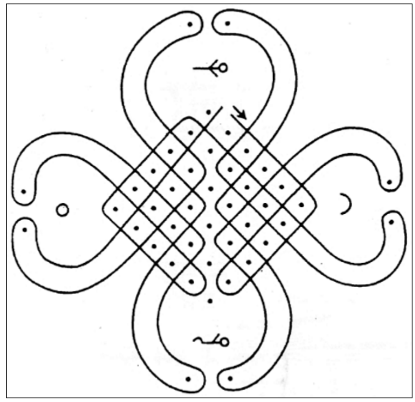

Bild 1.5: In einem Zug zeichenbare Figur zur Weltentstehungssage der Jokwe in Angola: der Weg von Sonne (links), Mond (rechts) und Mensch (unten) zu Gott (oben).)

Zwar entstammt die in Bild 1.5 dargestellte Figur aus unserer abendländischen Perspektive nicht „vorgeschichtlicher Zeit". Dennoch gehört sie inhaltlich in diesen Kontext, weil dieser Kulturkreis strukturell als vorgeschichtlich anzusehen ist.

Diese Beispiele eint etwas, das [HUIZINGA 1997, 13] wie folgt beschreibt:

> […] Und schließlich betrachte man den Kult: Die frühe Gemeinschaft vollzieht ihre heiligen Handlungen, die ihr dazu dienen, das Heil der Welt zu verbürgen, ihre Weihen, ihre Opfer und ihre Mysterien, in reinem Spiel im wahrsten Sinne des Wortes.

Hier erscheint also zunächst „Geometrie im Kult", dann gemäß HUIZINGA „Kult als Spiel" und damit insgesamt **Geometrie als Spiel**. Wir finden aber noch andersartige Beispiele in vorgeschichtlicher Zeit: Neben dem doch recht komplexen Beispiel in Bild 1.5 gibt es auch einfache, hochsymmetrische und ebenfalls *in einem Zug zeichenbare Figuren* wie insbesondere den *Kreis*. **Kreise** traten historisch sehr früh als geometrische Muster auf. Beispielweise begegnen sie uns bekanntlich auch auf der britischen Insel in den berühmten Megalithen von **Stonehenge** und bei weiteren „henges" wie etwa dem hölzernen „Woodhenge". Für „henge" haben wir im Deutschen kein sprachliches Pendant, aber es gilt:

- Ein Henge ist ein prähistorisches, meist nahezu kreisförmiges Bauwerk, das aus einem Wall, einem Graben und einer ebenen Fläche im Zentrum besteht.

---

16 [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 7]; Bild 1.5 aus [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 8].

Stonehenge ist die bekannteste und am besten erhaltene *„Kreisgrabenanlage“*. Wir können hier nicht weiter auf die Bedeutung dieser Kreisgrabenanlage eingehen, die in der Zeit von ca. 3 000 bis 1100 v. Chr. in drei Bauphasen entstanden ist. Zumindest scheint heute festzustehen, dass *Stonehenge nicht nur kultische Bedeutung* hatte, *sondern auch astronomisch genutzt* wurde. So treten hier geometrische Strukturen nicht mehr nur im spielerischen oder kultischen Rahmen auf, sondern sie dienten – in Verbindung damit – auch praktischen Zwecken.

Doch es gibt sehr viel ältere Kreisgrabenanlagen wie z. B. das erst 1991 entdeckte und von 2002 bis 2004 in **Goseck** (Sachsen-Anhalt) freigelegte und schon ca. 4 800 v. Chr. entstandene Henge (Bild 1.6). Dieses ehemals hölzerne **Sonnenobservatorium** – also ein „Woodhenge“ – diente vermutlich (wie Stonehenge) sowohl kultischen als auch astronomischen Zwecken.

Bild 1.6: rekonstruierte Kreisgrabenanlage in Goseck (Sachsen-Anhalt) – ca. 4800 v. Chr. entstanden

Als archäologische Besonderheit ist ferner **Göbekli Tepe** in Ostanatolien zu erwähnen, ein erst Anfang der 1960er Jahre entdeckter Komplex aus mehreren Kreisanlagen, die ca. 9 000 v. Chr. entstanden sind – quasi ein „anatolisches Henge“. Hierbei handelt es sich um eine Kultanlage, vermutlich um einen Tempel einer „Jägergesellschaft“.

Kreisgrabenanlagen wie die von Göbekli Tepe über Goseck bis hin zu Stonehenge dienten also *zumindest kultischen Zwecken*, so dass uns in vorgeschichtlicher Zeit **Geometrie als Spiel** begegnet und *bezüglich der astronomischen Bedeutung* auch **Geometrie als Anwendung**.

#### *1.1.5.2 Am Beginn geschichtlicher Zeit*

Die ägyptischen Pyramiden legen Zeugnis ab von dem geometrischen Können ihrer Planer und Erbauer. Weitere Kenntnisse des damaligen mathematischen Wissensstandes haben wir vor allem durch zwei aufgefundene Papyrusrollen, nämlich durch den *Papyrus Rhind* und durch den *Moskauer Papyrus*: Der Schotte HENRY RHIND entdeckte im Jahre 1858 im heutigen **Ägypten** die nach ihm benannte Papyrusrolle, die größtenteils im Britischen Museum in London aufbewahrt wird.

Diese beiden Papyri geben den Wissensstand von etwa 2000 v. Chr. wieder, und zwar in Form von Aufgabensammlungen mit Lösungshinweisen.

Eine dieser Aufgaben[17] betrifft die Berechnung des Flächeninhalts eines Vierecks mit (in unserer Notation) den Seitenlängen $a$, $b$, $c$ und $d$, und zwar mit Hilfe einer (verbal notierten) Näherungsformel (unter zweimaliger Verwendung des *arithmetischen Mittels*).

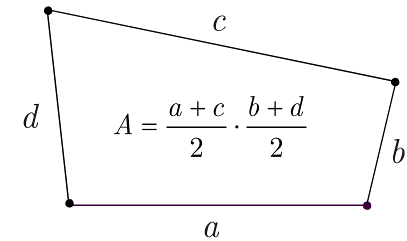


Bild 1.7: Ägyptische Flächeninhaltsberechnung durch zweimalige Mittelwertbildung

Wir würden das heute wie in Bild 1.7 veranschaulichen können: Unschwer ist erkennbar, dass die dort angegebene Formel nur in Sonderfällen richtig ist, dass sie aber dennoch in „rechtecknahen" Situationen offenbar näherungsweise brauchbar ist. (Die Ägypter verwendeten diese Formel übrigens auch zur Berechnung von Dreiecksflächeninhalten!)

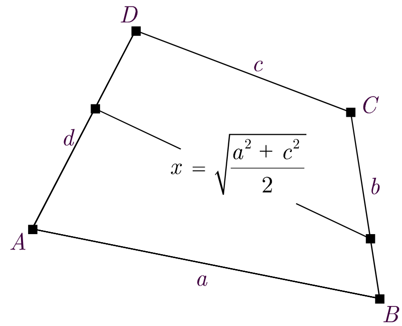


Bild 1.8: Babylonische Transversalenberechnung zur Flächeninhaltshalbierung

Etwa aus derselben Zeit (dem Anfang des 2. Jahrtausends v. Chr.) stammt eine Formel der **Babylonier** zu einer „Teilungsaufgabe" für ein Viereck (sie lebten in Mesopotamien, dem sog. „Zwischenstromland", im heutigen Irak):[18] Ein viereckiges Feld mit den Seiten $a$, $b$, $c$, $d$ ist durch eine von $b$ nach $d$ verlaufende Transversale $x$ in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zu zerlegen. Bild 1.8 visualisiert die Problemstellung und zeigt zugleich die „Lösung" in heutiger Notation als *quadratisches Mittel,* was verblüfft. Dabei fällt auf, dass nur zwei Seitenlängen in die Berechnung eingehen, abgesehen davon, dass die gesuchte Transversale nicht eindeutig existiert.

Beiden Beispielen ist neben der Verwendung eines Mittelwerts noch mehr gemein: So tritt hier „Geometrie" im ursprünglichen Wortsinn als „Erd-Messung" bzw. als „Landvermessung" auf, und damit liegt nur der Aspekt von **Geometrie als Anwendung** vor!

Weiterhin sind zwei babylonische Artefakte mit geometrischen Bezügen kurz zu erwähnen, auf die wir in Abschnitt 3.3.1 noch etwas näher eingehen werden:

Es ist einerseits die *Keilschrifttafel Yale YBC 7289*, die zwischen 1800 und 1600 v. Chr. entstanden ist und die als Ergebnis sexagesimale Aproximationen der Diagonalenlänge eines Quadrats mit den Kantenlängen 1 (bzw. 30) enthält, denn die Babylonier verfügten bereits über einen Algorithmus zur Approximation von Quadratwurzeln wie $\sqrt{2}$, den sie zur Aufstellung astronomischer Tafeln verwendeten.[19]

---

[17] Vgl. [GERICKE 1970, 47] und [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 13].

[18] Bei [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 18] als Formel, hier in Bild 1.8 graphisch dargestellt. Eine vertiefende Aufgabe dazu findet sich in [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 24].

[19] Mehr dazu u. a. in [HISCHER 2002b].

Und es ist die *Keilschrifttafel Plimpton 322* zu nennen, die (wie in einem heutigen Tabellenkalkulationsprogramm) die Tabellierung einer Funktion zeigt: der geometrisch definierten Sekansfunktion (genauer: von $\sec^2$), einer (fast vergessenen) trigonometrischen Funktion, die gemeinsam mit der Kosekansfunktion in der Dreiecksgeometrie gerne benutzt wurde:[20]

$$\sec = 1 / \cos$$

Damit scheint viel dafür zu sprechen, dass **am Beginn geschichtlicher Zeit** vor rund 4000 Jahren in der Geometrie der Aspekt „Anwendung" anstelle von „Spiel" dominiert hat! Jedoch dominiert und triumphiert rund 1500 Jahre später **in der pythagoreischen Mathematik** der Aspekt „Spiel des Geistes", und zwar nicht nur in der Geometrie, was hier nur angedeutet werden muss, weil es offensichtlich ist: Es ist die weniger auf Anwendung und Nützlichkeit gerichtete, sondern die philosophisch und grundlagentheoretisch geprägte Mathematik der Pythagoreer. Wir kommen darauf in den Abschnitten 3.3.4 und 3.3.5 zurück.

#### *1.1.5.3 Ein kurzer Blick in andere Kulturen: China, Japan und Neuseeland*

Wir haben gesehen, dass der Kreis bei der Entstehung geometrischen Handelns und Denkens in Europa und in Vorderasien eine besondere Rolle gespielt hat, und zwar zunächst in kultischen Zusammenhängen. Kreise wurden auch in China und in Japan untersucht, wenngleich z. T. unter einem für die damalige europäische Mathematik zunächst ungewöhnlichen Aspekt, geht es hier doch um

> das Einpassen von sich berührenden Kreisen in vorgegebene Figuren wie Halbkreise, Ellipsen und andere Formen […].[21]

Damit sind **Kreispackungen** gemeint. Ein schönes Beispiel dazu zeigt Bild 1.9. Es ist die Nachbildung einer möglicherweise aus dem 14. Jahrhundert stammenden Darstellung.[22] Die korrekte Erzeugung solcher Kreispackungen ist spontan gesehen nicht trivial.

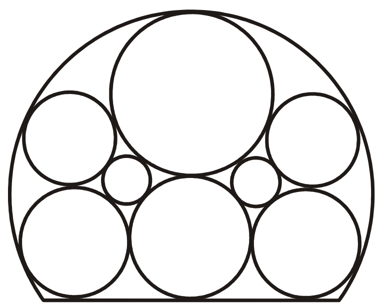

Bild 1.9:
chinesische Kreispackung (14. Jh.)

Ein auf praktische Anwendung gerichteter Sinn solcher Darstellungen ist nicht erkennbar, so dass hier vermutlich **Geometrie als Spiel des Geistes** erscheint.

Das gilt wohl auch für die „schwebenden Kreise" aus Japan (17. Jahrhundert.), wie sie in der Nachbildung in Bild 1.10 zu sehen sind:[23]

Angedeutet ist hier, dass die Mittelpunkte der acht einander berührenden Kreise die Eckpunkte eines regelmäßigen Achtecks bilden.

---

20 Mehr zu Plimpton 322 z. B. in [HISCHER 2002a, 327 ff.], ferner in Abschnitt 3.3.1.3 und in Aufgabe 3.1 (S. 120).

21 [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 125]

22 In Anlehnung an eine Abbildung aus [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 125] nachgebildet.

23 Nachbildung in Anlehnung an eine Abbildung aus [SCRIBA & SCHREIBER 2002, 133].