Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik

Viktor Isaev
Andreas Eichler
Frank Loose *Hrsg.*

# Professionsorientierte Fachwissenschaft

## Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium Mathematik

Springer Spektrum

# Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik

Die Lehre im Fach Mathematik auf allen Stufen der Bildungskette hat eine Schlüsselrolle für die Förderung von Interesse und Leistungsfähigkeit im Bereich Mathematik-Naturwissenschaft-Technik. Hierauf bezogene fachdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit liefert dazu theoretische und empirische Grundlagen sowie gute Praxisbeispiele.
Die Reihe „Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik" dokumentiert wissenschaftliche Studien sowie theoretisch fundierte und praktisch erprobte innovative Ansätze für die Lehre in mathematikhaltigen Studiengängen und allen Phasen der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik.

Weitere Bände dieser Reihe finden Sie unter https://link.springer.com/bookseries/11632

Viktor Isaev · Andreas Eichler · Frank Loose
(Hrsg.)

# Professionsorientierte Fachwissenschaft

## Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium Mathematik

Springer Spektrum

*Hrsg.*
Viktor Isaev
Institut für Mathematik, Universität Kassel
Kassel, Hessen, Deutschland

Andreas Eichler
Institut für Mathematik, Universität Kassel
Kassel, Hessen, Deutschland

Frank Loose
Mathematisches Institut, Universität Tübingen
Tübingen, Baden-Württemberg, Deutschland

ISSN 2197-8751 ISSN 2197-876X (electronic)
Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik
ISBN 978-3-662-63947-4 ISBN 978-3-662-63948-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63948-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.



Planung/Lektorat: Annika Denkert
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

# Inhaltsverzeichnis

# Herausgeber- und Autorenverzeichnis

## Über die Herausgeber

**Viktor Isaev** Institut für Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Hessen, Deutschland

**Prof. Dr. Andreas Eichler** Institut für Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Hessen, Deutschland

**Prof. Dr. Frank Loose** Mathematisches Institut, Universität Tübingen, Tübingen, Baden-Württemberg, Deutschland

## Autorenverzeichnis

**Prof. Dr. Thomas Bauer** Fachbereich Mathematik und Informatik; Mathematik und ihre Didaktik, Philipps-Universität Marburg, Marburg, Deutschland

**Prof. Dr. Rolf Biehler** Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik; Didaktik der Mathematik, Universität Paderborn, Paderborn, Deutschland

**Prof. Dr. Carla Cederbaum** Eberhard Karls Universität Tübingen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Geometrische Analysis, Differentialgeometrie und Relativitätstheorie, Tübingen, Deutschland

**Prof. Dr. Andreas Eichler** Institut für Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Hessen, Deutschland; Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften; Didaktik der Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Deutschland

**Prof. Dr. Johanna Heitzer** Fachgruppe Mathematik, Didaktik der Mathematik, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Aachen, Deutschland

**Lisa Hilken** Eberhard Karls Universität Tübingen, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Geometrische Analysis, Differentialgeometrie und Relativitätstheorie, Tübingen, Deutschland

**Max Hoffmann** Fakultät für Elektrotechnik, Informatik, Mathematik; Didaktik der Mathematik, Universität Paderborn, Paderborn, Deutschland

**Viktor Isaev** Institut für Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Hessen, Deutschland; Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften; Didaktik der Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Deutschland

**Dr. Regula Krapf** Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät; Mathematisches Institut, Universität Bonn, Bonn, Deutschland

**Prof. Dr. Anke Lindmeier** Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung Didaktik, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Jena, Deutschland

**Prof. Dr. Frank Loose** Mathematisches Institut, Universität Tübingen, Tübingen, Baden-Württemberg, Deutschland

**Prof. Dr. Reinhard Oldenburg** Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät; Didaktik der Mathematik, Universität Augsburg, Augsburg, Deutschland

**Dr. Kolja Pustelnik** Fakultät für Mathematik und Informatik; Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen, Göttingen, Deutschland

**Prof. Dr. Stefanie Rach** Institut für Algebra und Geometrie, Didaktik der Mathematik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Deutschland

**Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer** Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften; Didaktik der Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Deutschland

**Adrian Schlotterer** Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät; Didaktik der Mathematik, Universität Augsburg, Augsburg, Deutschland

**Dr. Marvin Titz** Fachgruppe Mathematik, Didaktik der Mathematik, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Aachen, Deutschland

**Birke-Johanna Weber** Didaktik der Mathematik, IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Kiel, Deutschland

**Thorsten Weber** Fachbereich Mathematik und Naturwissenschaften; Didaktik der Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Deutschland

# Einleitung

1

Viktor Isaev, Andreas Eichler und Frank Loose

Substantielles fachliches Wissen ist eine notwendige Grundlage dafür, dass Lehrerinnen und Lehrer einen attraktiven und erfolgreichen Mathematikunterricht gestalten können. Das ist allgemeiner Konsens. Wie aber muss dieses fachliche Wissen genau aussehen? Auf welche Weise wird es bei der Planung und Durchführung von Unterricht genutzt? Wie kann man es im Studium auf eine Weise erwerben, dass es für didaktisches Handeln anschlussfähig wird?

In dem vorliegenden Band sollen zu diesen Fragen theoretisch fundierte Gesamtkonzepte diskutiert werden, die bereits in der Hochschullehre erprobt wurden und zu denen systematische Forschungsansätze existieren. Der vorgeschlagene Band basiert auf der 5. Fachtagung der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung der GDM, DMV, MNU am 27. und 28. Februar 2020 an der Universität Kassel. Hier wurden von verschiedenen Akteuren im Bereich der Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik Lehransätze und deren Beforschung diskutiert.

Das Konzept des Herausgeberbandes sieht eine Strukturierung der Beiträge in drei Teile vor, die unter dem Titel „Professionsorientierte Fachwissenschaft – Kohärenzstiftende Lerngelegenheiten für das Lehramtsstudium" Konzepte und Studien zur

V. Isaev (✉) · A. Eichler
Institut für Mathematik, Universität Kassel, Kassel, Hessen, Deutschland
E-Mail: isaev@mathematik.uni-kassel.de

A. Eichler
E-Mail: eichler@mathematik.uni-kassel.de

F. Loose
Mathematisches Institut, Universität Tübingen, Tübingen, Baden-Württemberg, Deutschland
E-Mail: frank.loose@uni-tuebingen.de



V. Isaev et al. (Hrsg.), *Professionsorientierte Fachwissenschaft,* Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63948-1_1

Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik vorstellen, die eine der folgenden Perspektiven einnehmen:

I. Professionsorientierung in Vorlesungen
II. Professionsorientierung in Übungen
III. Professionsorientierung in Seminaren

Mit dieser Einteilung wird nicht nur die Zuordnung der Beiträge zu dem jeweiligen zugrunde liegenden Veranstaltungsformat und somit der primäre Wirkungsradius der vorgestellten Ideen und Maßnahmen gekennzeichnet, sondern auch die Bandbreite der universitären Lehramtsausbildung in einem kleinen Rahmen abgebildet. Im Sinne der Gesamtkonzeption des Bandes gehen wir weiterhin davon aus, dass sich die theoretische Perspektive auf das Lehren und Lernen von Mathematik in den Veranstaltungsformen unterscheidet. Als weiteres strukturgebendes Element wird zur Reihenfolge der Beiträge der Fokus auf die Beforschung der theoretisch begründeten Lehrkonzepte verwendet.

**Auflistung der Teile mit den Beiträgen**
I. Professionsorientierung in Vorlesungen
Im ersten Beitrag nähert sich **Thomas Bauer** (Philipps-Universität Marburg) der Bedeutung des mathematischen Fachwissens für das professionelle Handeln von Lehrkräften unter der Fragestellung, wie das Fachwissen einer Lehrkraft beschaffen sein muss, um unterrichtlich wirksam werden zu können. Hierzu werden im Beitrag zwei Fallstudien vorgestellt, die auf Basis eines Literacy-Modells Einblicke in mathematische Wissensarten geben. Einen ebenfalls theoriegeleiteten Zugang zu der Frage nach einer fachmathematischen (Analysis)-Ausbildung von angehenden Lehrkräften, die den Anforderungen des Berufsalltags gerecht wird, wählen **Reinhard Oldenburg & Adrian Schlotterer** (Universität Augsburg). Dabei nehmen sie exemplarisch einige Themen der Analysis in den Fokus und beleuchten diese unter einer fachlichen und didaktischen Perspektive. In dem Beitrag von **Rolf Biehler & Max Hoffmann** (Universität Paderborn) geht es übergeordnet um das mathematische Fachwissen als Grundlage fachdidaktischer Urteilskompetenz von Lehramtsstudierenden. Hierzu werden aus zwei komplementären Perspektiven Beispiele für die Herstellung konzeptueller Bezüge zwischen fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Lehre im gymnasialen Lehramtsstudium gegeben und Bearbeitungen von Studierenden analysiert. Über eine Untersuchung zum Affekt von Lehramtsstudierenden berichten **Andreas Eichler, Elisabeth Rathgeb-Schnierer und Thorsten Weber** (Universität Kassel). In dem Beitrag gehen die Autoren auf ein Veranstaltungskonzept zu mathematischen Erkundungen in der Primarstufe ein und zeigen auf, welche Auswirkungen solch ein fachliches Modul auf die Wahrnehmungen der Studierenden zur doppelten Diskontinuität haben kann.

II. Professionsorientierung in Übungen

Einen Fokus auf Übungsaufgaben nimmt der Beitrag von **Birke Weber & Anke Lindmeier** (Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik Kiel) zu einer Typisierung von Aufgaben zur Verbindung zwischen schulischer und akademischer Mathematik ein. Neben einer Klassifikation von Aufgaben verschiedener Standorte werden exemplarisch auch Bearbeitungen von Aufgaben vorgestellt. Der darauffolgende Beitrag von **Kolja Pustelnik** (Georg-August-Universität Göttingen) beschäftigt sich mit Schwierigkeiten von Studierenden beim Bearbeiten von Übungsaufgaben. Hierzu wird vor dem Hintergrund von Problemlösestrategien eine Unterstützungsmaßnahme für Lehramtsstudierende beschrieben und der Umgang mit Aufgabenbeispielen anhand von Transkripten analysiert. In dem Beitrag von **Viktor Isaev, Andreas Eichler & Thomas Bauer** (Universität Kassel; Philipps-Universität Marburg) werden aus zwei Perspektiven Aufgaben zur Vernetzung von Schul- und Hochschulmathematik vorgestellt und auf ihre intendierte Wirkung auf die Wahrnehmung von Studierenden untersucht. Dabei geht es um ein Fragebogeninstrument, das an den beiden Universitäten jeweils im Längsschnitt quantitativ in einer Grundlagenveranstaltung zur Analysis eingesetzt wurde. Dann stellt **Regula Krapf** (Universität Koblenz-Landau) mit den Koblenzern Methodenblättern ein Übungskonzept vor, das Lehramtsstudierenden im ersten Semester den Einstieg in das wissenschaftliche Arbeiten der Hochschulmathematik erleichtern soll. Hierzu werden erste Ergebnisse einer Evaluierung mithilfe der Bielefelder Lernzielorientierten Evaluation präsentiert. Schließlich widmet sich **Stefanie Rach** (Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg) der Fragestellung, ob Aufgaben zur Verknüpfung von Schul- und akademischer Mathematik Auswirkungen auf das Interesse von Lehramtsstudierenden haben. In dem Beitrag werden hierzu aus dem Bereich der Zahlentheorie und der Analysis zwei Aufgabentypen miteinander verglichen und auf eine quantitative Befragung von Studierenden eingegangen.

III. Professionsorientierung in Seminaren

**Marvin Titz & Johanna Heitzer** (Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen) stellen ein Master-Modul zur Stärkung der Werkzeug- und Beurteilungskompetenz für Studierende des Lehramts vor, das den Fokus auf die die Gestaltung einer Präsenzveranstaltung mit aktiven Arbeitsphasen und einer Prüfungsleistung im Peer-Review-Verfahren stellt. Im Ergebnisteil wird auf qualitative Analysen von Lernpfaden sowie des zugehörigen Begleitmaterials und der verfassten Reviews der Studierenden eingegangen. Der Beitrag von **Carla Cederbaum & Lisa Hilken** (Eberhard Karls Universität Tübingen) geht auf ein Seminar zur Elementaren Differentialgeometrie ein, in dem Lehramtsstudierende sich in Gruppen durch forschungsähnliches Lernen das mathematische Themengebiet der gekrümmten Kurven und Flächen erarbeiten. Die im Beitrag berichtete Begleitforschung widmet sich dabei der mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitserwartung der Seminarteilnehmerinnen und Seminarteilnehmer.

# Teil I
# Professionsorientierung in Vorlesungen

# 2 Mathematisches Fachwissen in unterschiedlichen Literacy-Stufen – zwei Fallstudien

Thomas Bauer

**Zusammenfassung**

Wie das mathematische Fachwissen von Lehrkräften beschaffen sein muss, um unterrichtlich wirksam werden zu können, ist eine drängende und intensiv diskutierte Frage der gymnasialen Lehramtsausbildung. Um für die Bearbeitung dieser Frage ein möglichst differenziertes Bild der in der universitären Mathematik relevanten Wissensarten zu erhalten, wurde von Bauer und Hefendehl-Hebeker (Mathematikstudium für das Lehramt an Gymnasien. Anforderungen, Ziele und Ansätze zur Gestaltung, Springer Spektrum, 2019) ein vierstufiges Literacy-Modell entwickelt, das als Orientierungsrahmen dienen kann. Der vorliegende Beitrag leistet einen weiteren Beitrag zur Theorieentwicklung, indem er zum einen die Literacy-Stufen aufgabenbezogen konkretisiert und zum anderen erste Schritte unternimmt, das noch ungeklärte gegenseitige Verhältnis der Stufen zu verstehen. Hierfür werden zwei Fallstudien durchgeführt, in denen durch Aufgabenanalysen das jeweils relevante Fachwissen herauspräpariert und in Bezug gesetzt wird. Die so gewonnenen Erkenntnisse über die Anforderungen werden genutzt, um Folgerungen für die Ausbildung zu ziehen.

## 2.1 Einleitung

Die Bedeutung des Fachwissens für das professionelle Handeln von Mathematiklehrkräften wird in den letzten Jahren mit zunehmender Intensität diskutiert (z. B. Bass & Ball, 2004; Krauss et al., 2008; Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016). Eine der drängenden Fragen ist

T. Bauer (✉)
Fachbereich Mathematik und Informatik; Mathematik und ihre Didaktik, Philipps-Universität Marburg, Marburg, Deutschland
E-mail: tbauer@mathematik.uni-marburg.de



V. Isaev et al. (Hrsg.), *Professionsorientierte Fachwissenschaft,* Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-63948-1_2

es, wie das Fachwissen einer Lehrkraft beschaffen sein muss, um unterrichtlich wirksam werden zu können. Als Schritt in diese Richtung scheint es wichtig, zunächst ein möglichst differenziertes Bild der in der universitären Mathematik relevanten Wissensarten zu gewinnen. Als Beitrag hierzu wurde vom Autor zusammen mit Lisa Hefendehl-Hebeker ein Literacy-Modell vorgeschlagen, das als Orientierungsrahmen dienen kann. Es ist auf Basis des sprachwissenschaftlichen Modells von Macken-Horarik (1998) gebildet und ordnet mathematisches Fachwissen in vier Stufen an: Everyday literacy, applied literacy, theoretical literacy, reflexive literacy (Bauer & Hefendehl-Hebeker, 2019).

Der vorliegende Aufsatz leistet unter zwei Aspekten einen Beitrag zur weiteren Theorieentwicklung: Zum einen werden die Literacy-Stufen aufgabenbezogen konkretisiert und zum anderen wird das Verhältnis der Stufen zueinander untersucht. Methodisch geschieht dies anhand von zwei Aufgabenanalysen, in denen relevantes Fachwissen auf den unterschiedlichen Stufen herauspräpariert und in Bezug gesetzt wird. Die Ergebnisse beider Fallstudien werden genutzt, um auf Basis des Literacy-Modells Folgerungen für die Fachausbildung von Lehramtsstudierenden zu ziehen.

Die erste Fallstudie analysiert eine hypothetische Situation im Geometrieunterricht der Sekundarstufe 1 aus drei Perspektiven (Experte, Lehramtsabsolvent, Lehrkraft): Es wird herausgearbeitet, welcher fachliche Gehalt sich aus der jeweiligen Perspektive in der gegebenen Situation erkennen lässt. Um dies zunächst in prinzipieller Hinsicht auszuloten, wird untersucht, wie ein fachmathematischer Experte (etwa ein Mathematikprofessor) die Situation auf Basis seines Wissens deuten könnte. Sodann wird die Perspektive eines (modellhaften) Lehramtsabsolventen eingenommen, um einzuschätzen, welche Deutungsmöglichkeiten als Ergebnis der universitären Fachausbildung prinzipiell erreichbar sind. Schließlich wird betrachtet, was eine (fachlich modellhaft ausgebildete) Lehrkraft situativ erkennen könnte. Hieraus lässt sich eine Einschätzung gewinnen, wie in diesem Fallbeispiel fachliches Wissen in der Praxis wirksam werden könnte.

Die zweite Fallstudie geht der Frage nach, ob – ähnlich, wie es im sprachwissenschaftlichen Kontext angenommen wird – eine „linear and progressive relationship“ (Brabazon, 2011) zwischen den Literacy-Stufen besteht. Hierbei geht es um die Frage, ob Lernen auf allen Stufen gleichzeitig möglich ist oder ob (und ggf. inwiefern) die Stufen im Wissenserwerb aufeinander aufbauen. Das analysierte Beispiel betrifft einen Arbeitsauftrag aus einer Veranstaltung zur Didaktik der Geometrie: Beim Vergleich der Arbeitsweisen von synthetischer und analytischer Geometrie wurde in der Veranstaltung exemplarisch untersucht, wie in Schulbüchern der Oberstufe elementargeometrische Aussagen mit Mitteln der linearen Algebra bearbeitet werden. Konkret wurde eine Schulbuchaufgabe betrachtet, die unter der Überschrift „Satz von Pythagoras“ den Auftrag enthält, für zwei orthogonale Vektoren $a$, $b$ in der euklidischen Ebene die Gleichung $\|a\|^2 + \|b\|^2 = \|a + b\|^2$ mit Hilfe des (kanonischen) Skalarprodukts zu beweisen (vgl. Bigalke & Köhler, 2012). In der universitären Veranstaltung war es das Ziel, die Situation aus epistemologischem Blickwinkel zu analysieren: Von welcher Art ist das Wissen über den Satz von Pythagoras, das die in der Aufgabe verlangte Rechnung hervorbringen kann? Kann die Rechnung als Beweis für den elementargeometrischen Satz aufgefasst werden? Es wird herausgearbeitet, welche Anforderungen an das Wissen der Studierenden gestellt werden, wenn sie diese Fragen beantworten sollen. Die Analyse gibt Aufschluss über die beteiligten Wissensstufen und ihr gegenseitiges Verhältnis.

## 2.2 Hintergrund und Fragestellung

**Fachwissen für Lehrkräfte** Dass Fachwissen eine wichtige Grundlage für das professionelle Handeln von Lehrkräften ist und wie dieses Wissen beschaffen sein müsse, ist seit langem in der Diskussion. So betont etwa Shulman (1986), dass Lehrkräfte den Fachinhalt *mindestens* so verstehen müssten wie Fachstudierende: Dazu gehörten nicht nur die Sachverhalte, sondern auch deren Begründung sowie ein Verständnis dafür, ob und ggf. wie zentral der Gegenstand für das Fach ist. Bass und Ball (2004) verfolgen das Ziel, genauer zu spezifizieren, welches mathematische Wissen beim Unterrichten erforderlich ist und wie es im Unterricht zum Einsatz kommt. In der COACTIV-Studie (Kunter et al., 2011; Krauss et al., 2008) wurde mathematisches Fachwissen dann insbesondere in seinem Bezug zum fachdidaktischem Wissen untersucht. Hierbei wird allerdings mathematisches Fachwissen nicht im vollen Umfang eines Universitätsstudiums berücksichtigt. Stattdessen konzentriert sich die Studie auf Wissen, das „tieferes Verständnis der Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufe“ (z. B. in Bezug auf Elementarmathematik) beinhaltet, während „reines Universitätswissen“ ausgeklammert wurde (Krauss et al., 2008, S. 237). Demgegenüber nehmen Laging et al. (2015) die Fachausbildung von Lehramtsstudierenden im Ganzen in den Blick und stellen ein Modellkonzept vor, das in der Lehramtsausbildung das Ziel verfolgt, die Fachausbildung mit unterrichtlichem Handeln in Praxisphasen zu vernetzen. (Das Konzept ist nicht nur bezogen auf Mathematik, sondern auf alle Fächer.) Das Modell basiert auf einem sogenannten *doppelten Praxisverständnis*: Hierbei wird es als *erste Praxis* verstanden, wenn Studierende sich selbst authentisch als Mathematik-Ausübende erleben und ihre Praxis des Mathematiktreibens reflektieren, sowohl in Bezug auf die Arbeitsweisen und Erkenntnisinteressen des Fachs als auch auf die Rolle des Fachverständnisses für das Unterrichten des Fachs. Dieser reflektive Umgang mit dem eigenen Fach wird als Schlüssel zur *zweiten Praxis* gesehen, der eigenen Unterrichtspraxis im Rahmen eines anschließenden Praxissemesters.

**Mathematisches Fachwissen in einem vierstufigen Literacy-Modell** Als Voraussetzung dafür, um erfolgreich fachliche Lerngelegenheiten für Lehramtsstudierende zu schaffen, scheint es wichtig, ein möglichst differenziertes Bild der in der universitären Mathematik relevanten Wissensarten zu gewinnen, auch über elementarmathematische Veranstaltungen hinaus. Vom Autor wurde zusammen mit Lisa Hefendehl-Hebeker hierfür ein Modell vorgeschlagen. Den Ausgangspunkt bildet ein Literacy-Modell aus der Sprachwissenschaft von Macken-Horarik (1998). In diesem Modell wird Wissen in vier Stufen angeordnet: Everyday literacy, applied literacy, theoretical literacy, reflexive literacy. In Bauer und Hefendehl-Hebeker (2019) wurde gezeigt, dass sich eine mathematikbezogene Interpretation dieses

Modells bilden lässt, die sich als Orientierungsrahmen eignet, um sowohl die von Toeplitz (1928) herausgehobene Spannung zwischen „Stoff" und „Methode" als auch aktuelle verfeinerte Konzepte wie *mathematical sophistication* (Seaman & Szydlik, 2007) einzuordnen. Auf unterster Stufe des Modells *(everyday literacy)* liegen diejenigen Elemente der Mathematik, die im Alltag sichtbar vorkommen und deren Beherrschung für eine gesellschaftliche Teilhabe wichtig ist. Hierzu gehören zum Beispiel elementare Fähigkeiten im Rechnen und im logischen Schließen, wie auch ein Verständnis für Wahrscheinlichkeiten und die Fähigkeit zum Deuten mathematikhaltiger Darstellungen. Wissen auf der zweiten Stufe *(applied literacy)* ist an eine bestimmte Verwendung gebunden – beispielsweise soll ein lineares Gleichungssystem gelöst werden oder das Monotonieverhalten einer Funktion geklärt werden. Es werden bestimmte Informationen über ein mathematisches Objekt ermittelt oder verarbeitet, während die zur Rechtfertigung und Erklärung benötigte Theorie im Hintergrund bleibt. Diese wird erst auf der dritten Stufe *(theoretical literacy)* als Wissensart explizit gemacht. Die in der Mathematik publizierten Forschungsergebnisse sowie das in Lehrbüchern und in Lehrveranstaltungen für Mathematikstudierende Präsentierte haben ihren Schwerpunkt auf dieser Stufe: Es geht um die mathematischen Objekte selbst, um ihre Eigenschaften und die Zusammenhänge, die es zu verstehen gilt. Die Denk- und Arbeitsweisen sowie die Gepflogenheiten der Disziplin, die im Prozess der Entwicklung solcher Ergebnisse zum Tragen kommen, liegen auf der vierten Stufe *(reflexive literacy)*. Das Wissen auf dieser Stufe wird im Fach weit weniger expliziert als das Wissen auf den unteren Stufen – vieles bleibt implizit und wird in der Fachgemeinschaft mündlich an die nächste Generation weitergegeben oder von dieser durch Beobachten gelernt.

**Fragestellung** Wie beschrieben wurde in Bauer und Hefendehl-Hebeker (2019) gezeigt, dass sich die im sprachwissenschaftlichen Modell von Macken-Horarik gebildeten vier Stufen in angepasster Form auch im Fach Mathematik unterscheiden lassen. Damit ist freilich noch nicht geklärt, wie sich das Wissen, das in in konkreten Anforderungssituationen wirksam werden kann, auf den verschiedenen Literacy-Stufen beschreiben lässt. Ferner ist offen, in welchem gegenseitigen Verhältnis die Literacy-Stufen stehen. Der vorliegende Aufsatz möchte durch Arbeit an zwei Fragestellungen einen Beitrag zur weiteren Theorieentwicklung leisten.

(F1) Wie lassen sich die Literacy-Stufen in unterrichtsbezogenen Anforderungssituationen konkretisieren? Wie sehen Situationen aus, in denen Anforderungen auf mehreren Literacy-Stufen liegen?

Im sprachwissenschaftlichen Kontext spricht Brabazon (2011) von einer „linear and progressive relationship", das zwischen den Literacy-Stufen besteht. Dies lässt sich so interpretieren, dass man davon ausgeht, dass Lernen nicht auf allen Stufen gleichzeitig möglich ist, sondern die Stufen im Wissenserwerb aufeinander aufbauen. Dass es auch im Fach Mathematik Abhängigkeiten zwischen den Literacy-Stufen geben wird, erscheint sicherlich plausibel.

Allerdings wird man nicht eine einfache Relation der Art „Stufe $n-1$ (in vollem Umfang) ist Voraussetzung für Stufe $n$" erwarten können. So sind durchaus etwa Fähigkeiten auf der theoretischen Stufe vorstellbar, die nicht auf umfangreichen Fähigkeiten auf der angewandten Stufe fußen. Ebenso ist nicht a priori klar, inwieweit Wissen auf reflexiver Stufe von Wissen auf den darunter liegenden Stufen abhängt. Die eigentliche, vermutlich aber sehr schwierige Frage besteht also eher darin, welches spezifische Verhältnis zwischen den Stufen vorliegt. Wir gehen diesbezüglich folgender Frage nach:

(F2) Welches Verhältnis lässt sich in konkreten fachlichen Anforderungssituationen zwischen dem Wissen auf den Stufen applied, theoretical und reflexive finden?

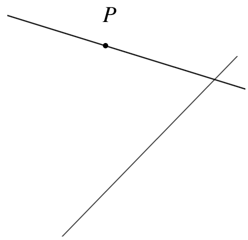
Die beiden Fragen (F1) und (F2) sind sehr weitreichend und entziehen sich daher gewiss einer einfachen Beantwortung. Der vorliegende Aufsatz möchte hier erste Schritte unternehmen. Dazu soll untersucht werden, welche Antworten sich in konkreten Fallsituationen geben lassen. Wir werden zwei Fallstudien durchführen, in denen jeweils eine fachliche Anforderung für Studierende bzw. Lehrkräfte vorliegt. Mit Hilfe von Aufgabenanalysen wird das jeweils relevante Fachwissen auf den unterschiedlichen Stufen herauspräpariert und in Bezug gesetzt, um einerseits Konkretisierungen der Literacy-Stufen zu erarbeiten und andererseits ihr gegenseitiges Verhältnis aufzuklären. Die Ergebnisse beider Fallstudien werden genutzt, um auf Basis des Literacy-Modells Folgerungen für die Fachausbildung von Lehramtsstudierenden zu ziehen. Angesichts der Beschränkung auf zwei Fallstudien muss dies selbstverständlich mit der gebotenen Zurückhaltung erfolgen.

## 2.3 Fallstudie: Literacy-Stufen im Umgang mit der Schülerlösung zu einer Geometrieaufgabe

Die erste Fallstudie, die in diesem Beitrag ausgeführt werden soll, betrachtet eine hypothetische Situation im Geometrieunterricht. Das Ziel ist es, zu untersuchen, welches fachliche Wissen im Umgang mit der Situation relevant ist, und welchen Literacy-Stufen sich dieses Wissen zuordnen lässt. Hierfür wird nach einer Beschreibung der Anforderungssituation in Abschn. 2.3.1 die Situation aus verschiedenen Perspektiven analysiert (Abschn. 2.3.2), um die fachlichen Wissenselemente herauszuarbeiten und in das Literacy-Modell einzuordnen. In Abschn. 2.3.3 werden mögliche Folgerungen für die Lehramtsausbildung diskutiert.

### 2.3.1 Fallbeschreibung und methodisches Vorgehen

**Fallbeschreibung** Ausgangspunkt unserer Untersuchung ist die in Abb. 2.1 dargestellte *Berührkreisaufgabe* (vgl. Schoenfeld, 1985, S. 15). In der Version bei Schoenfeld wird speziell eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal verlangt, während die hier verwendete Auf-




*Aufgabe:* Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden und ein Punkt $P$, der auf einer der beiden Geraden liegt, wie in der nebenstehenden Zeichnung. Beweise, dass es einen Kreis gibt, der durch $P$ geht und beide Geraden als Tangenten hat.

**Abb. 2.1** Berührkreisaufgabe nach (Schoenfeld, 1985, S. 15)

gabenstellung insofern weiter gefasst ist, als sie nach einer Begründung für die *Existenz* des Kreises fragt (diese kann beispielsweise durch eine Konstruktion erbracht werden, aber auch auf andere Art). Für die Zwecke dieser Untersuchung stellen wir uns ihren Einsatz im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I vor. Im Theorierahmen der ebenen euklidischen Geometrie arbeitet die erwartete Lösung mit den Begriffen *Winkelhalbierende* und *Lot,* um den gesuchten Kreis zu erhalten (Abb. 2.2, oberes Bild). In der hypothetischen Situation, die wir hier als Fallbeispiel untersuchen, formuliert Schülerin Claudia eine Lösungsidee (Abb. 2.2, unteres Bild), die von einem kleinen Kreis ausgeht, aus dem durch dynamische Veränderung der gesuchte Kreis hergestellt wird (vgl. Bauer, 2017). Dass eine derartige Situation nicht ganz unrealistisch ist, zeigt eine Studie von Boero und Turiano (2019), in der ein Schüler – in einer anderen geometrischen Situation – ebenfalls mit dynamischer Veränderung argumentiert. Im Sinne der Unterscheidung von prädikativem und funktionalem Denken nach Schwank (2003) ließe sich die erwartete Lösung als prädikativ interpretieren, während sich Claudias Vorschlag als Ausdruck von funktionalem Denken verstehen lässt.

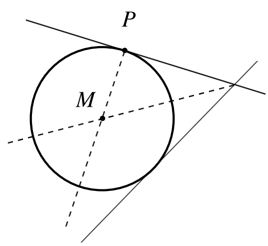
Bei einer Lehrkraft, die im Unterricht mit Claudias Lösungsidee konfrontiert ist, spricht die Situation verschiedene Bereiche des Professionswissens an. (Die *Bereiche* sollen hier im Sinne von Shulman (1986, 1987) und Bromme (1997) verstanden werden.)

- In *pädagogischer* Hinsicht wird die Lehrkraft Claudias Beitrag insofern begrüßen, als eine Vielfalt von Antworten im Unterricht generell erwünscht ist. Falls sich Claudias Ansatz als fehlerhaft erweisen sollte, würde dem mit Verständnis begegnet.
- In *mathematikdidaktischer* Hinsicht geht es darum, verschiedene Lösungsansätze nicht nur zuzulassen, sondern auch darum, sie zu vergleichen und die Beziehungen zwischen ihnen zu verstehen. Es würde versucht werden, eventuelle Fehler als Ausgangspunkt für neues Lernen zu nutzen. Die Unterscheidung zur pädagogischen Sicht liegt hier im Unterschied zwischen sozialen Normen und soziomathematischen Normen (Yackel & Cobb, 1996).
- In *fachlicher* Hinsicht stellt sich die Frage, wie tragfähig Claudias Idee ist, d. h. wie nahe oder fern sie einer korrekten Lösung der Aufgabe steht. Für die Lehrkraft liegt daher die fachliche Herausforderung darin, Claudias Äußerung in ein Spektrum einzuordnen,

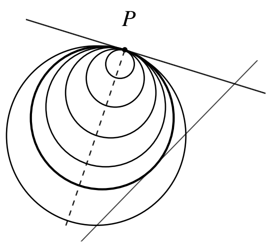
das sich zwischen einem Denkfehler und einer korrekten Beweisidee aufspannen lässt (Abb. 2.3).

Das Bewältigen der beschriebenen fachlichen Herausforderung stellt eine Voraussetzung dar, um mathematikdidaktisch adäquat reagieren zu können – so etwa beim erwünschten Vergleich der Lösungen und beim Herstellen von Beziehungen zwischen verschiedenen Ansätzen. Wir zielen darauf ab, das hier relevante fachliche Wissen genau zu spezifizieren, und zu untersuchen, welchen welchen Literacy-Stufen es sich zuordnen lässt.

**Methodisches Vorgehen** Wir werden die beschriebene Anforderungssituation aus drei verschiedenen Perspektiven analysieren. Dabei arbeiten wir jeweils heraus, welcher fachliche Gehalt sich aus der jeweiligen Perspektive in der gegebenen Situation erkennen lässt und worin das Spezifische der jeweiligen Perspektive besteht.




*Erwartete Lösung:* Man errichte das Lot in $P$ an die obere Gerade und schneide es mit der Winkelhalbierenden der beiden Geraden. Sei $M$ der Schnittpunkt. Der Kreis mit Mittelpunkt $M$ und Radius $|MP|$ leistet das Verlangte.




*Claudia:* Ich denke mir das so: Ich nehme erstmal einen kleinen Kreis, der die obere Gerade in $P$ berührt. Den mache ich immer größer und größer, aber immer so, dass er in $P$ berührt. Irgendwann berührt er dann halt auch die untere Gerade.

**Abb. 2.2** Zwei Lösungen der Berührkreisaufgabe (nach Bauer, 2017): Oben die antizipierte Lösung im Theorierahmen der euklidischen Geometrie; darunter der Lösungsansatz einer Schülerin

| Denkfehler | ⟷ | Heuristische Vorstellung | ⟷ | Beweisidee |
|---|---|---|---|---|
| Der Lösungsansatz basiert auf einer falschen Argumentation. | | Der Lösungsansatz ist intuitiv treffend, aber nicht beweiskräftig. | | Der Lösungsansatz enthält den Kern eines korrekten Arguments. |

**Abb. 2.3** Spektrum bei der fachlichen Beurteilung von Claudias Lösungsansatz

1. **Expertenperspektive.** Um zunächst in prinzipieller Hinsicht auszuloten, welcher fachlicher Gehalt sich in der Situation erkennen lässt, wird die Perspektive eines fachmathematischen Experten (etwa eines Mathematikprofessors) eingenommen.
2. **Perspektive eines Lehramtsabsolventen.** Um einzuschätzen, welche Deutungsmöglichkeiten auf Basis der universitären Fachausbildung eines gymnasialen Lehramtsstudiengangs prinzipiell erreichbar sind, wird die Situation aus Perspektive eines modellhaft ausgebildeten Lehramtsstudierenden untersucht. Als *modellhaft ausgebildet* sollen Studierende hierbei bezeichnet werden, wenn sie über das durch die Lehramtsausbildung prinzipiell erreichbare fachmathematische Wissen verfügen. Insbesondere wird für diese Betrachtung keine über ein übliches Lehramtsstudium hinausgehende mathematische Bildung unterstellt.
3. **Perspektive einer Lehrkraft im Unterricht.** Schließlich wird die Perspektive einer (fachlich modellhaft ausgebildeten) Lehrkraft eingenommen, die im Unterricht mit der Situation konfrontiert wird. Hierdurch soll eine Einschätzung gewonnen werden, was eine Lehrkraft in fachlicher Hinsicht situativ, ohne langes Nachdenken, erkennen könnte, und wie fachliches Wissen somit in der Praxis wirksam werden könnte.

Diese drei Perspektiven wurden für die vorliegende Untersuchung gewählt, da sie sich in spezifischer Weise unterscheiden und daher Aufschluss über das jeweils genutzte Fachwissen und die zugehörigen Literacy-Stufen erwarten lassen. So unterscheiden sich Perspektive 1 und 2 offensichtlich im Grad der fachlichen Expertise – man kann von einem Unterschied sowohl in Breite als auch in Tiefe des Fachwissens ausgehen. Zudem ist zu erwarten, dass der Experte eine größere Flexibilität im Umfang mit unbekannten fachlichen Situationen zeigen wird. Ein augenfälliger Unterschied zwischen den Perspektiven 2 und 3 liegt darin, dass es aus Perspektive 2 um eine nachträgliche oder hypothetische Sicht geht, während mit Perspektive 3 der Blick inmitten einer Unterrichtssituation gemeint ist.

### 2.3.2 Analyse aus verschiedenen Perspektiven

#### 2.3.2.1 Expertenperspektive

**Analyse der Situation** Aus Sicht des Experten ($E$) stellt sich die Situation zunächst als mathematische Problemlöseaufgabe dar: *Untersuche, ob (und wenn ja, wie) die Existenz des gesuchten Kreises durch Argumentation mit der von Claudia beschriebenen Schar von Kreisen gezeigt werden kann.* Die fachliche Beurteilung von Claudias Ansatz basiert dann auf der Lösung dieses Problems. In seinem Problemlöseprozess könnte $E$ in der im Folgenden beschriebenen Weise Kenntnisse aus verschiedenen Gebieten kombinieren:

- *Elementargeometrie:* In Claudias Ansatz wird eine Familie von Kreisen $(K_t)$ betrachtet, die wir durch quadratische Gleichungen der Form $(x - a(t))^2 + (y - b(t))^2 = r(t)^2$

beschreiben können. Die konkreten Gleichungen, d. h., die Funktionen $a$, $b$ und $r$, hängen von den Ausgangsdaten ab (d. h., von der die Lage der oberen Gerade und der Lage des Punkts $P$). Im Moment ist für $E$ allerdings nicht eine möglichst konkrete Beschreibung von Interesse, sondern nur die Tatsache, dass es *quadratische* Gleichungen sind.

- *Algebra:* Für jeden der Kreise $K_t$ werden die Schnittpunkte mit der unteren Geraden durch ein Gleichungssystem beschrieben, das aus einer quadratischen und einer linearen Gleichung in $x$ und $y$ besteht. Nach Elimination einer der Unbekannten $x$ oder $y$ verbleibt eine quadratische Gleichung in der anderen Unbekannten (die zudem vom Parameter $t$ abhängt). Die Diskriminante $\Delta(t)$ dieser quadratischen Gleichung entscheidet über die Anzahl der Lösungen. Im Fall $\Delta(t) = 0$ liegt nur ein einziger Schnittpunkt vor, Kreis und Gerade berühren sich.
- *Analysis:* Für die Diskriminantenfunktion $t \mapsto \Delta(t)$ liegt eine „Zwischenwertsatz-Situation" vor: Es gibt offenbar sowohl Kreise, die mit der unteren Geraden keinen Schnittpunkt haben, als auch Kreise, die mit ihr zwei Schnittpunkte haben (Kreise mit sehr kleinem Radius bzw. Kreise mit sehr großem Radius erfüllen dies). Algebraisch bedeutet dies, dass $\Delta$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Da $\Delta(t)$ stetig von $t$ abhängt, muss es einen Parameter $t_0$ geben, für den $\Delta(t_0) = 0$ gilt. Der Kreis $K_{t_0}$ berührt dann die untere Gerade, wie es in der Aufgabenstellung verlangt ist.

Als Ergebnis dieser Überlegungen ist ein Entwurf eines Beweises entstanden, der auf Claudias Ansatz beruht. Wir sprechen hier von einem *Entwurf* im Sinne der *Levels of Proofness* nach Manin (1977, S. 49): Es liegt noch kein vollständig ausgeführter Beweis vor, aber es besteht für $E$ kein Zweifel, dass die Überlegung zu einem Beweis von größerem Detailgrad ausgebaut werden *könnte* (dieser würde beispielsweise ein Argument für die Stetigkeit von $\Delta$ enthalten).

Als Fazit kann $E$ in Claudias Antwort den Ausgangspunkt einer fachlich tragfähigen Argumentation erkennen. Angesichts der eingesetzten Werkzeuge wäre diese zwar von Claudia so wohl nicht ausgeführt worden, aber $E$ könnte ihr über intuitiv treffende Vorstellungen hinaus zusprechen, dass sie den Kern eines völlig korrekten Arguments getroffen hat.

**Spezifika der Perspektive** Die hier skizzierte Perspektive des fachlichen Experten zeichnet sich durch folgende Merkmale aus, die auch Hinweise darauf geben, wie die Argumentation entstanden sein kann:

a) Der Experte kann auf Kenntnisse aus verschiedenen mathematischen Gebieten zugreifen und hat dadurch die Chance, bestimmte Werkzeuge in die Situationen *hineinzusehen.* Dabei dienen oft frühere Verwendungssituationen als Ausgangspunkt. So darf man beispielsweise davon ausgehen, dass er Stetigkeitsargumente aus vielen Bereichen der Mathematik kennt.

b) Die eingesetzten Mittel sind Spezialfälle von allgemeineren Strategien und Konzepten. So versteht der Experte die hier vorkommende Diskriminante einer quadratischen Gleichung als Spezialfall des Konzepts *Diskriminante eines Polynoms* (siehe etwa Lang, 2002). Zudem hat der Experte *Übung* in deren Verwendung und wird daher nicht durch Schwierigkeiten bei der technischen Handhabung der Werkzeuge in seinem Problemlöseprozess aufgehalten.

#### 2.3.2.2 Perspektive eines modellhaften Lehramtsabsolventen

**Analyse der Situation** Die Annahme eines modellhaft ausgebildeten Lehramtsabvolventen (S) soll hier so verstanden werden, dass nicht davon ausgegangen wird, dass $S$ die spezielle Aufgabe (oder eine eng verwandte Aufgabe) im Laufe des Studiums kennen gelernt hat. Jedoch kann $S$ sie mit Situationen vergleichen, in denen ein Funktionsgraph mit einer Geraden geschnitten wird. Abb. 2.4 zeigt, wie eine Parabel von verschiedenen Geraden geschnitten wird. Dass die Parabelfunktion einen bestimmten Funktionswert annimmt, bedeutet geometrisch, dass eine waagrechte Gerade auf entsprechender Höhe den Graphen schneidet. Im ersten der drei Bilder könnte solches Schneiden mit dem Zwischenwertsatz begründet werden. Solche „Zwischenwertsatz-Bilder" werden traditionell eingesetzt, wenn in Analysis-Vorlesungen die Aussage des Zwischenwertsatzes geometrisch veranschaulicht werden soll. Schon Cauchy (1821, S. 44) drückt am Beginn seines Beweises des Zwischenwertsatzes aus, dass es genüge zu zeigen, dass „die Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ die Gerade mit der Gleichung $y = b$ ein oder mehrere Male schneidet".

Nun könnte $S$ die Situation umdeuten: Die Progression der drei Schnittsituationen in Abb. 2.4 lässt sich so umdeuten, dass nicht die Gerade sich bewegt, sondern die Parabel

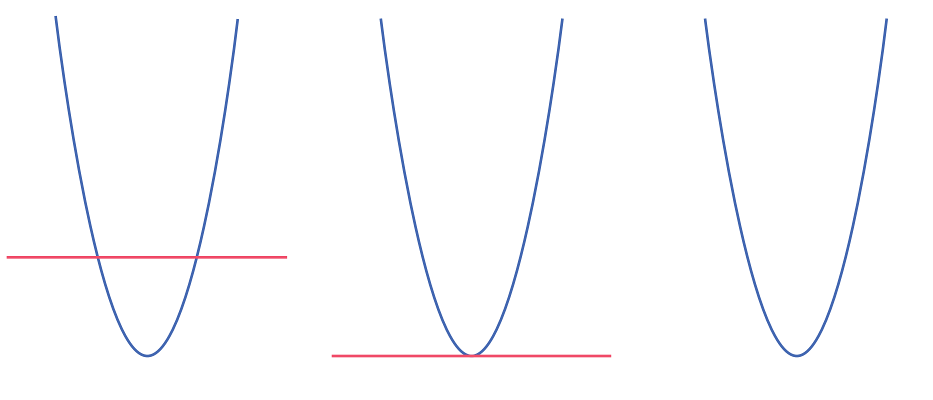


**Abb. 2.4** Schnittsituationen bei der Veranschaulichung des Zwischenwertsatzes