FACULTAD DE INGENIERÍA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TEXTOS UNIVERSITARIOS

EDICIONES UC

Teoría de la Medida e Integración

Volumen I

Rolando Rebolledo Berroeta

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Teoría de la Medida e Integración

Volumen I

EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Vicerrectoría de Comunicaciones
Av. Libertador Bernardo O'Higgins 390, Santiago, Chile

editorialedicionesuc@uc.cl
www.ediciones.uc.cl

TEORÍA DE LA MEDIDA E INTEGRACIÓN
Volumen I

Rolando Rebolledo Berroeta

© Inscripción N° 270.153
Derechos reservados
Septiembre 2016
Reimpresión 2017
ISBN edición impresa 978-956-14-1964-3
ISBN edición digtial 978-956-14-2648-1

Diseño:
versión | producciones gráficas Ltda.

Diagramación digital: ebooks Patagonia
info@ebookspatagonia.com
www.ebookspatagonia.com

CIP - Pontificia Universidad Católica de Chile

Rebolledo, Rolando
Teoría de la medida e integración / Rolando Rebolledo Berroeta. –
Incluye bibliografía

1. Teoría de la medida.
2. Integrales
I. t.

2016 515.42 + dc 23 RCAA2

FACULTAD DE INGENIERÍA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Teoría de la Medida e Integración

Volumen I

Rolando Rebolledo Berroeta

EDICIONES UC

A Loreto y nuestro gran conglomerado familiar.

ÍNDICE GENERAL

PREFACIO

Esta obra está concebida como un libro de texto para estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas o de la carrera de Ingeniería Matemática. El texto del primer volumen enseña las bases, métodos y resultados más importantes de la Teoría de la Medida e Integración, rama fundamental de la Matemática contemporánea que es prerrequisito para estudiar una variada gama de otras disciplinas como el Análisis Funcional, cursos avanzados sobre Ecuaciones Diferenciales, la Teoría de Sistemas Dinámicos, la Teoría de Probabilidades, la Estadística, Métodos de la Física Matemática, Análisis Estocástico, entre muchas otras. El segundo volumen, en preparación, se concentrará en las topologías débiles de medidas, el Análisis de Fourier, la versión funcional de la integral y elementos de la teoría no conmutativa, temas todos que corresponden más bien a cursos de postgrado.

La elección de los temas de este primer volumen ha seguido los diseños curriculares de los cursos de formación de matemáticos según estándares internacionales. Las primeras versiones de este texto remontan a la época en que enseñaba la Teoría de la Integración primero en Niza y luego en París, con un programa un poco más extenso. Luego, fue adaptado al programa del curso que se enseña en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Católica y devino un apunte en Castellano, manuscrito y fotocopiado para los estudiantes hasta que la aparición de LATEX permitió hacer una primera versión mecanografiada allá por la segunda mitad de la década de los 80. Desde entonces el texto, modificado sin cesar, ha circulado de manera supuestamente restringida al uso exclusivo de mis alumnos, si bien he sabido que algunas versiones han trascendido esa frontera y me ocurre recibir mensajes de estudiantes de otros lugares que piden acceder a los archivos de pruebas resueltas para ejercitar su aprendizaje.

Es muy importante en todo estudio científico considerar que no podemos conocer un objeto si no lo transformamos, y eso tiene una expresión muy clara en Matemáticas. No podemos aprender un tema nuevo si no intentamos probar los principales resultados nosotros mismos, y para ello los ejercicios son fundamentales. A través de ellos se puede entender mejor la historia de las ideas que llevaron al estado actual de una teoría; ellos constituyen para los matemáticos su laboratorio natural. En este volumen me he preocupado de proponer al final de cada capítulo listas de ejercicios que permitan al estudiante poner a prueba su comprensión de la teoría.

Asimismo, hay que tener en cuenta que todo aprendizaje es tributario de la cultura, del conocimiento global de su época, es un proceso inagotable que va determinando los márgenes de vigencia de los textos. En Matemáticas manejamos escalas temporales más largas que en otras disciplinas, pero no escapa a nuestra comprensión que la expresión de sus resultados principales cambia mucho a lo largo de los años. Por ejemplo, la forma en que explicamos la geometría euclidiana de nuestros días no coincide con aquella que usó su descubridor o incluso como se enseñó más tarde, por ejemplo en el siglo XII. Hay una historicidad profunda de todas las ciencias que no puede ser despreciada. Nótese que, siguiendo con el ejemplo de la geometría, el descubrimiento de América en 1492 generó un cambio en la concepción de mundo de la época que incidió en la necesidad de que la humanidad se planteara una geometría diferente que vio la luz más tarde en el siglo XIX, una teoría no euclidiana que absorbió la euclidiana como un caso particular, y la extendió a dominios que la de su griego autor nunca cubrió, como la geometría esférica.

En el caso de la integración, tema fundamental de este libro, hay también una larga historia. Este modesto texto no se propone más que mostrar la forma en que de nuestros días se ha sintetizado su teoría para ser enseñada en las aulas universitarias. Hemos escogido una forma sucinta de presentar los principales hitos, sus consecuencias y aperturas, para que los estudiantes dispongan de una referencia rápida, con algunos guiños para aquellos que quieran explorar temas relacionados que escapan a los contenidos programáticos.

Y la síntesis que hoy enseñamos se basa en el rico debate sobre los fundamentos de la integración que comenzó en las postrimerías del siglo XIX, continuando en el siglo XX. Son muchos los nombres que habría que citar en esa génesis: desde Cauchy, Riemann, pasando por Borel, un Weierstrass siempre presente, Stieltjes, Volterra, Cantor y sus indagaciones en la Teoría de Conjuntos, para culminar en los trabajos de Henri Lebesgue y Percy J. Daniell, además de los aportes posteriores de Beppo-Levi, Fubini y Kolmogorov, entre muchos otros a quienes pido excusas por omisión involuntaria. El lector interesado en el recuento histórico de los avances en esta teoría, puede consultar a este respecto el excelente libro de Iván Pesin [39] que rinde justicia a todos los creadores involucrados en este proceso hasta mediados del siglo XX.

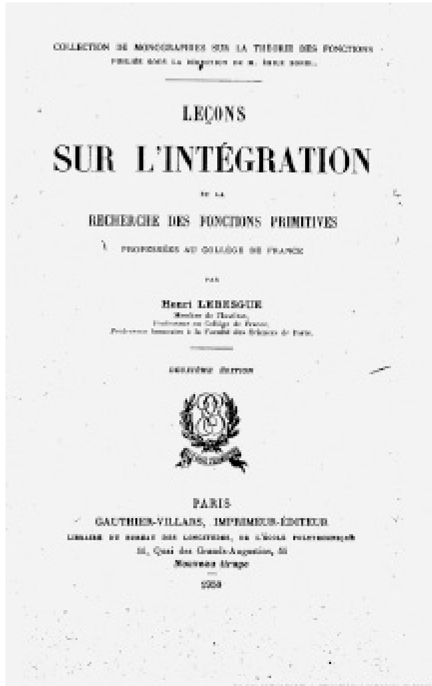
Henri Lebesgue (1875-1941).

El francés Henri Lebesgue (1S75-1941), construyó las bases de la llamada Teoría de la Medida, a través de la cual se asigna un número a un conjunto y de ahí se construye luego la integral de una función (cf. [29], [30], [28], [31]). Es el punto de vista que permitió posteriormente el desarrollo de la llamada *medida abstracta,* que inspira estas notas de curso.

El británico, nacido en Chile, Percy John Daniell (1889-1946), desarrolló la integración desde una óptica distinta en sus trabajos de los años 1918-1919 ([6], [7], [8]). Daniell define primero la integral como un funcional sobre un espacio de funciones y la medida aparece luego como dicho funcional aplicado a la función característica de un conjunto. Es el llamado *punto de vista funcional* de la teoría, que será explicado en un futuro segundo volumen sobre el tema.

Percy-John Daniell (1889-1946).

A ambos fundadores del actual estado de la teoría que expongo en las páginas siguientes, les correspondió vivir una época marcada por guerras destructoras, por una parte, contrastadas por revoluciones científicas y artísticas creadoras: nacimiento de nuevas teorías en física (relatividad, mecánica cuántica), derrumbe del programa de Hilbert provocado por el Teorema de Godel, en medio de la eclosión del impresionismo del siglo XIX y sus derivados del siglo XX. Una época de comunicaciones aún difíciles, de mucho tren, barcos e incipientes vuelos. Invito al lector a seguir ahora el hilo de sus ideas en nuestra ciencia.



COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

LEÇONS

SUR L'INTÉGRATION

ET LA

RECHERCHE DES FONCTIONS PRIMITIVES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

Henri LEBESGUE

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

55, Quai des Grands-Augustins, 55

Nouveau tirage

Portada de la primera edición del libro de Henri Lebesgue.

Agradezco el apoyo otorgado por la Vicerrectoría de Comunicaciones de la Pontificia Universidad Católica y Ediciones UC para la publicación de esta obra que durante largos años permaneció en calidad de manuscrito. Manuscrito enriquecido en cada nueva versión del curso magistral, en el diálogo con los alumnos y en la práctica de la investigación. Mi mensaje de gratitud no podría estar completo sin el recuerdo de quien tomó a cargo la mecanografía de algunos capítulos de la primera versión. El cáncer nos privó de la presencia de Virginia Farías, pero su recuerdo vive en quienes la conocimos y en estas páginas.

Capítulo 1

Del arte de medir

1. Asociando un número a un conjunto

La teoría de la integración encuentra su base en ideas muy elementales. Usamos el término “elemental” en su acepción original, vale decir, referido a los *elementos* primigenios, de los cuales la matemática toda se impregna. La observación de la naturaleza llevó al hombre a descubrir los números y a asociarlos de manera natural con sus objetos más simples. De este modo el propio concepto de número llevaba en sí la idea de medir. El hombre midió longitudes, superficies, volúmenes, temperaturas, pesantez. Supo de la diferencia entre lo pequeño y lo grande, lo liviano y lo pesado.

La Geometría recogió primero esta inquietud. Euclides enseñó cómo calcular áreas de figuras simples. Luego se buscó cómo aproximar las figuras más complejas por varias simples. Fue necesario sumar. La Aritmética también se asociaba a la tarea: la suma es una forma de medición.

Asociar un número a un conjunto: es la idea fundamental que traduce en matemáticas el acto de medir. Así, si nos dan un triángulo, calculando su área, le asociamos un número; si nos dan un conjunto de números $\{a_1,\dots, a_n\}$ una forma de asociarle un número es considerar la suma $a_1 + \dots + a_n$. Algunas fórmulas se hicieron célebres, por ejemplo, aquella que nos da la suma de los n primeros números naturales:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

que ya se conocía en el medioevo chino, según consta en las obras de Chon Huo (siglo XI) y Yang Hui (siglo XIII).

Poco a poco se fue estudiando procesos más complejos de medición. Al llegar al siglo XVII el hombre comenzó a manejar “sumas infinitas”. Estas estaban presentes en la Filosofía desde la época de Zenón de Elea (siglo V A.C.), autor de la famosa paradoja de Aquiles y la tortuga. Según Zenón, si en el instante inicial, Aquiles se encuentra en 0 y la tortuga en una posición $a_0 > 0$, el héroe griego debe correr tras la tortuga que avanza en el sentido positivo del eje de coordenadas, pero cuando llega a la posición a_0 la tortuga se ha movido a una nueva posición a_1; enseguida, cuando Aquiles llega a esta última posición, la tortuga está en a_2 y así sucesivamente... En suma, mientras Aquiles corre para alcanzar el punto desde el cual la tortuga ha partido, ésta avanza, ¡de modo que nuestro héroe jamás podrá anular este avance! Para desmentir a Zenón es necesario hacer algunos cálculos. Supongamos que el movimiento es uniforme, que Aquiles se desplaza a una velocidad $V = 10m/s$ en tanto que la tortuga lo hace según $\nu = 1m/s$ con $\nu < V$. Llamemos t_n el tiempo (medido en segundos) que Aquiles emplea en alcanzar la posición a_n (medida en metros). Entonces,

$$\begin{aligned}
t_0 &= 1 \\
t_1 &= 1 + \frac{1}{10} \\
t_2 &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} \\
\ldots \\
t_n &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^n} \\
\ldots
\end{aligned}$$

y aprovechando nuestros conocimientos sobre series podemos enfrentar el argumento falaz de Zenón.

La teoría de series comenzó a desarrollarse a fines del siglo XVII y principios del XVIII, sin contar con un adecuado concepto de *límite.* Esto fue causa de muchas paradojas. Por ejemplo, aquellas sobre la suma de la serie

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \tag{1.2}$$

Esta "suma infinita" se puede escribir

$$\begin{aligned} S &= (1-1) + (1-1) + \dots \\ &= 0 + 0 + \dots \end{aligned}$$

de modo que S = 0. Pero, agrupando los términos de otro modo, se tiene

$$S = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) \dots \tag{1.3}$$

$$= 1 - 0 - 0 - \dots$$

luego S = 1, o incluso, según (1.3), S = 1 – S, ¡y en consecuencia S = 1/2!

Sin embargo, la teoría de series permitía abordar de manera "primaria" la Mecánica de Newton que entonces daba sus primeros pasos. Veamos cómo.

Nos interesa estudiar el movimiento de un punto material de masa m sobre la recta real $\in \mathbb{R}$. Llamemos X_t la posición del móvil en el instante t. Suponemos que el tiempo se mide sobre los enteros positivos. Supongamos que el móvil parte desde un punto inicial $x \in \mathbb{R}$, en presencia de una fuerza constante F en el sentido positivo del eje de coordenadas espaciales. Para simplificar aún más, despreciamos primero toda fuerza de roce. Según la segunda Ley de Newton, la fuerza es proporcional a la aceleración A_t que alcanzará el punto material en su movimiento. En este caso entonces,

$A_t = const. = \frac{F}{m}$. Llamemos V_t la velocidad del móvil, e introduzcamos el símbolo Δ para indicar diferencias, vale decir $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. Se tiene entonces que $V_t = \frac{\Delta X_t}{\Delta t}$ y $A_t = \frac{\Delta V_t}{\Delta t}$, donde Δt es, por supuesto, igual a 1. Ahora bien, ya que la aceleración es constante, se tiene que X_t satisface la ecuación

$$X_t = X_0 + V_0 t + \sum_{s=0}^{t-1} A_0 s \tag{1.4}$$

En este caso, es muy sencillo calcular la expresión que tiene la solución de (1.4). En efecto, basta aplicar la fórmula (1.1):

$$X_t = X_0 + V_0 t + A_0 \frac{t(t+1)}{2} \tag{1.5}$$

El lector reconocerá la versión en tiempo discreto de la clásica fórmula

$$X_t = X_0 + V_0 t + A_0 \frac{t^2}{2} \tag{1.6}$$

que se obtiene en Mecánica Clásica resolviendo una *ecuación diferencial*. En efecto, toda esta coincidencia es absolutamente natural, tanto (1.5) como (1.6) expresan la acción de medir: en el primer caso, se mide mediante una *suma;* en el segundo, mediante una *integral.*

2. Superficies en el plano

El cálculo de superficies en el plano es quizás una de las formas más intuitivas del arte de medir. Aprovecharemos esa intuición para construir un modelo matemático de la noción de superficie.

2.1. Noción de superficie. Nuestro propósito es definir una noción de superficie (o área) de una parte del plano.

Con este fin se provee al plano de ejes de coordenadas ortogonales y se atribuye la superficie 1 al cuadrado de lado unitario. Las hipótesis siguientes traducen nuestras intuiciones básicas sobre superficies:

(S1) *Hipótesis 1:* La superficie $\mathbb{S}(\Gamma)$ de una parte Γ del plano es, si ella existe, un número positivo.

(S2) *Hipótesis* 2: Si Γ y Γ′ son partes del plano que poseen superficie, entonces también es así para $\Gamma \cap \Gamma'$ y $\Gamma \cup \Gamma'$. Si además Γ y Γ′ son disjuntos, se tiene

$$\mathbb{S}(\Gamma \cup \Gamma') = \mathbb{S}(\Gamma) + \mathbb{S}(\Gamma'). \tag{1.7}$$

Si Γ contiene a Γ′, entonces su diferencia $\Gamma \backslash \Gamma'$ tiene una superficie que vale $\mathbb{S}(\Gamma) - \mathbb{S}(\Gamma')$.

(S3) *Hipótesis 3:* Si r tiene una superficie nula, entonces todo subconjunto de r posee también una superficie (que además es nula a causa de lo que se vio en (S2)).

Ejercicio 1.1. Probar que si Γ y Γ_2 son dos conjuntos que poseen una superficie, entonces por (S2) siempre se tiene

$$\mathbb{S}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \mathbb{S}(\Gamma_1) + \mathbb{S}(\Gamma_2) - \mathbb{S}(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \tag{1.8}$$

Ahora bien, recordemos la forma en que los griegos aproximaban la superficie de un círculo: se daban una sucesión de polígonos regulares inscritos en él, calculaban las respectivas superficies y luego “pasaban al límite”. Expresemos esta idea en una nueva hipótesis, introduciendo sobre los conjuntos el orden parcial asociado a la inclusión.

(S4) *Hipótesis 4:* Si $(\Gamma_n)_n$ es una sucesión creciente de conjuntos que tienen superficie, entonces su reunión $\cup_n \Gamma_n$ (que también escribimos $\lim \uparrow \Gamma_n$) tiene una superficie si y sólo si la sucesión $(\mathbb{s}(\Gamma_n))_n$ es acotada y en tal caso se tiene

$$\mathbb{S}(\lim_n \uparrow \Gamma_n) = \lim_n \uparrow \mathbb{S}(\Gamma_n), \tag{1.9}$$

Ejercicio 1.2. Probar que (S4) es equivalente a la propiedad siguiente (S4’) Si $(\Gamma_n)_n$ es una sucesión de conjuntos que poseen superficie, disjuntos dos a dos, entonces su reunión Γ (que escribimos $\Gamma = \sum_n \Gamma_n$), tiene superficie si y sólo si la serie $\sum_n \mathbb{s}(\Gamma_n)$ converge; y se tiene:

$$\mathbb{S}(\sum_n \Gamma_n) = \sum_n \mathbb{S}(\Gamma_n). \tag{1.10}$$

Ejercicio 1.3. Sea $(\Gamma_n)_n$ una sucesión decreciente de conjuntos que poseen superficie y sea $\Gamma = \cap_n \Gamma_n$ (que también escribimos $\lim_n \downarrow \Gamma_n$). Probar que $(\Gamma_0 \backslash \Gamma_n)_n$ crece hacia $\Gamma_0 \backslash \Gamma$. Deducir que r tiene superficie y verificar que

$$\mathbb{S}(\lim_n \downarrow \Gamma) = \lim_n \downarrow \mathbb{S}(\Gamma_n). \tag{1.11}$$

Ejercicio 1.4. Consideremos ahora un conjunto Γ para el cual existen dos sucesiones de conjuntos que poseen superficie, $(\overline{\Gamma}_n)_n$ y $(\underline{\Gamma}_n)_n$ tales que

$$\underline{\Gamma}_n \subset \Gamma \subset \overline{\Gamma}_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si la sucesión $(\mathbb{S}(\overline{\Gamma}_n \backslash \underline{\Gamma}_n))_n$ tiende a cero, entonces Γ tiene superficie y se cumple

$$\mathbb{S}(\Gamma) = \lim_n \mathbb{S}(\overline{\Gamma}_n) = \lim_n \mathbb{S}(\underline{\Gamma}_n). \tag{1.12}$$

(Se recomienda considerar las sucesiones monótonas $\cup_{k \leq n} \overline{\Gamma}_k$ (decreciente) y $\cap_{k \leq n} \underline{\Gamma}_k$ (creciente) de límites $\overline{\Gamma}$ y $\underline{\Gamma}$, respectivamente, que tienen la misma superficie. Luego, observar que $\Gamma \setminus \underline{\Gamma}$ está contenido en el conjunto de superficie nula $\overline{\Gamma} \setminus \underline{\Gamma}$).

En el ejercicio siguiente pasamos en revista lo aprendido en los cursos de Geometría elemental.

EJERCICIO 1.5.

1. Probar que la superficie de un rectángulo es el producto de sus lados.
2. Probar que un segmento de recta tiene superficie nula. Asimismo, demostrar que una recta tiene superficie nula.
3. Probar que una banda de plano limitada por dos rectas paralelas no tiene superficie.
4. Probar que un conjunto numerable de puntos del plano tiene superficie nula.
5. calcular la superficie de un triángulo rectángulo usando el ejercicio 1.4 y la pregunta 1 aquí arriba.
6. Calcular la superficie de un paralelógramo en el plano, ubicado de modo que uno de sus vértices se encuentre en el origen de coordenadas, pero sin lados paralelos a los ejes.
7. Obtener la superficie de un círculo como límite de las superficies de polígonos regulares inscritos y exinscritos de *n* lados.

3. La integral de Riemann

Demos una rápida mirada a la forma en que se define la integral de Riemann en los cursos elementales de cálculo, buscando extraer de esa construcción los elementos comunes con el cálculo de superficies en el plano y con el arte de sumar.

DEFINICIÓN 1.1. Designamos por $\varepsilon(I)$ el conjunto de las funciones escalonadas definidas sobre un intervalo $I = [a, b]$ ($a < b$) de la recta real. Una función f es *escalonada* si existe una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ tal que f restringida a cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}[$, $k = 0, \ldots, n - 2$; $[x_{n-1}, x_n]$ sea constante.

Consideremos una función $f \in \varepsilon(I)$ y la figura Γ delimitada por los segmentos de rectas $\overline{x_k x_{k+1}}, \overline{f(x_k) f(x_{k+1})}, \overline{0 f(x_0)}, \overline{0 f(x_n)}$, $k = 1, \ldots, n - 1$. Γ es una unión de rectángulos no traslapados. Podemos entonces definir su área como la suma de las áreas de tales rectángulos elementales, de modo que:

$$\mathbb{S}(\Gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i). \tag{1.13}$$

Llamemos a esta cantidad, *integral de la función escalonada f sobre el intervalo I* = $[a, b]$. La denotamos $\int_I f(x)dx$ o $\int_a^b f(x)dx$.

EJERCICIO 1.6. Probar que para todo par de funciones $f, g \in \varepsilon(I)$ se tiene que $\alpha f + \beta g \in \varepsilon(I)$ para todo par de reales α, β y que se cumple

$$\int_I (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_I f(x)dx + \beta \int_I g(x)dx \tag{1.14}$$

Resumimos lo anterior diciendo que $\varepsilon(I)$ es un espacio vectorial real y que la aplicación $f \mapsto \int_I f(x)dx$ es una forma lineal sobre este espacio.

OBSERVACIÓN 1.1. Sean f y g dos funciones reales definidas sobre un intervalo $[a, b]$ de $\in \mathbb{R}$ y tales que en todo punto $x \in [a, b]$ se tenga $f(x) \leq g(x)$. Definimos:

$$\Gamma_{f,g} = [[f, g]] = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq g(x)\} \tag{1.15}$$

La notación [[f, g]] sugiere una analogía con los intervalos de $\in \mathbb{R}$. En particular se puede notar que si una sucesión de funciones *positivas* $(f_n)_n$ definidas en [a, b] es tal que en cada punto x del dominio $f_n(x)$ crece o decrece hacia $f(x)$, entonces [[0, f_n]] tiene como límite [[0, f]]. Dicho de otro modo,

$$\begin{aligned} \Gamma_{0,\text{lím}\uparrow f_n} &= \text{lím}\uparrow \Gamma_{0,f_n} \\ \Gamma_{0,\text{lím}\downarrow f_n} &= \text{lím}\downarrow \Gamma_{0,f_n}. \end{aligned}$$

Notar que si f es una función escalonada positiva, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \mathbb{S}(\Gamma_{0,f}). \tag{1.16}$$

Si f es una función real de signo cualquiera, introduzcamos las siguientes funciones asociadas:

$$f^+(x) = \sup(f(x), 0), \tag{1.17}$$

$$f^-(x) = \sup(-f(x), 0), \tag{1.18}$$

para todo x en el respectivo dominio de definición. Se puede observar que

$$f = f^+ - f^- \text{ y } |f| = f^+ + f^-.$$

Para una función escalonada f cualquiera se verifica entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathbb{S}([[0, f^+]]) - \mathbb{S}([0, f^-[[). \tag{1.19}$$

Y si g es otra función escalonada tal que $f \leq g$, entonces:

$$\mathbb{S}([[f, g]]) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx. \tag{1.20}$$

DEFINICIÓN 1.2. Sea *f* una función de [*a*, *b*] en $\in \mathbb{R}$. Decimos que ella es *integrable en el sentido de Riemann* si existe

- una sucesión decreciente $(\overline{f}_n)_n$ de funciones escalonadas en [*a*, *b*] minoradas por *f*,
- una sucesión creciente $(\underline{f}_n)_n$ de funciones escalonadas mayoradas por *f*, tales que

$$\int_a^b \overline{f}_n(x)dx - \int_a^b \underline{f}_n(x)dx \to 0 \text{ si } n \to \infty. \tag{1.21}$$

En tal caso, el límite común de las sucesiones $(\int_a^b \overline{f}_n(x)dx)_n$ y $(\int_a^b \underline{f}_n(x)dx)_n$ se escribe $\int_a^b f(x)dx$, recibiendo el nombre de *integral* de *f* sobre [*a*, *b*].

Notar que si *f* es positiva y si escribimos $\overline{\Gamma}_n = [[0, \overline{f}_n]]$, $\underline{\Gamma}_n = [[0, \underline{f}_n]]$, entonces la condición (1.21) equivale a la planteada en el ejercicio 1.4.

Puesto que las funciones escalonadas son acotadas sobre todo intervalo acotado [*a*, *b*], las funciones integrables en ese intervalo también lo son. Una elección posible de las sucesiones $(\underline{f}_n)_n$ y $(\overline{f}_n)_n$ es la propuesta por Darboux que explicamos a continuación. Sea $(\pi(n))_n$ una sucesión de particiones de [*a*, *b*], $\pi(n)$: $a = x_0^n < x_1^n < \ldots < x_{k(n)}^n = b$, llamamos $M_j^n = \sup_{x \in [x_{j-1}^n, x_j^n]} f(x)$, $m_j^n = \inf_{x \in [x_{j-1}^n, x_j^n]} f(x)$ para cada $j = 1,\ldots, k(n)$. Definimos entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{f}_n(x) = \begin{cases} M_j^n & \text{si } x \in [x_{j-1}^n, x_j^n[,\ 1 \le j \le k(n)-1, \\ M_{k(n)}^n & \text{si } x \in [x_{k(n)-1}^n, x_{k(n)}^n]. \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\underline{f}_n(x) = \begin{cases} m_j^n & \text{si } x \in [x_{j-1}^n, x_j^n[,\ 1 \le j \le k(n)-1, \\ m_{k(n)}^n & \text{si } x \in [x_{k(n)-1}^n, x_{k(n)}^n]. \end{cases} \tag{1.23}$$

De este modo se tiene

$$(1.24) \qquad \int_a^b \overline{f}_n(x)dx - \int_a^b \underline{f}_n(x)dx = \sum_{j=1}^{k(n)} (M_j^n - m_j^n)(x_j^n - x_{j-1}^n).$$

De (1.22), (1.23), (1.24), resulta una forma equivalente de definir la integrabilidad en el sentido de Riemann: una función *f* acotada es integrable si y sólo si las sumas del miembro derecho de (1.24) convergen a 0 si $n \to \infty$.

EJERCICIO 1.7. Probar que toda función real continua es integrable sobre todo intervalo acotado contenido en su dominio de definición.

EJERCICIO 1.8. Sea *f* una función real integrable en el sentido de Riemann sobre [*a*, *b*] y sea *g* otra función real, que es igual a *f* salvo en un número finito de puntos. Probar que *g* es también integrable en el sentido de Riemann y que su integral coincide con la de *f*.

Deducir en particular que toda función continua, salvo en un número finito de puntos sobre [*a*, *b*], es integrable.

EJERCICIO 1.9. Probar que la función *f* definida sobre [0,1], que vale 1 sobre los puntos racionales y 0 en todos los otros, no es integrable en el sentido de Riemann. Sin embargo, el conjunto [[0, *f*]] tiene superficie nula.

En el teorema siguiente resumimos las propiedades esenciales de la Integral de Riemann estudiadas en los cursos elementales de Cálculo.

TEOREMA 1.1. *Dado un intervalo I* = [*a*, *b*] *de la recta real, designemos por R*(*I*) *el conjunto de las funciones reales que son integrables en el sentido de Riemann sobre I*.

1. *$R(I)$ es un espacio vectorial real y la aplicación $f \mapsto \int_I f(x)dx$ es una forma lineal definida sobre este espacio.*
2. *La forma lineal anterior es también creciente sobre $R(I)$, vale decir: $f \leq g$ implica $\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$.*
3. *$R(I)$ es también estable para el producto de funciones y para las operaciones* $(f, g) \mapsto \sup(f, g)$, $(f, g) \mapsto \inf(f, g)$.
4. *$f \in R(I)$ si y sólo si $f^+ \in R(I)$ y $f^- \in R(I)$. En tal caso se tiene:*

$$\int_I f(x)dx = \int_I f^+(x)dx - \int_I f^-(x)dx. \tag{1.25}$$

5. *$f \in R(I)$ si y sólo si $|f| \in R(I)$ y se cumple:*

$$|\int_I f(x)dx| \leq \int_I |f(x)|dx. \tag{1.26}$$

6. *Si $a < c < b$,* entonces *$f \in R([a, b])$ si y sólo si f es a la vez integrable sobre $[a, c]$ y $[c, b]$. En ese caso se tiene:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{1.27}$$

7. *(Cambio de variables). Sea φ unafunción biyectiva del intervalo $[a, b]$ sobre $[\alpha, \beta]$, de clase C^1 sobre $]a, b[$. Para toda función f integrable en el sentido de Riemann sobre $[\alpha, \beta]$, la función $t \mapsto f(\varphi(t))|\varphi'(t)|$ es integrable y se tiene la igualdad1*

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt. \tag{1.28}$$

8. *Sean $f, g \in R([a, b])$, tales que g mayore a f. Entonces $[[f, g]]$ tiene superficie y*

$$\mathbb{S}([[f,g]]) = \int_a^b (g-f)(x)dx. \tag{1.29}$$

Demostración. Proponemos al lector que escriba completamente la demostración del teorema a título de ejercicio: a continuación le entregamos una rápida guía para hacerlo.

Se verifica fácilmente que las funciones escalonadas cumplen las distintas propiedades enunciadas en el teorema. Enseguida se trata de extender éstas a funciones arbitrarias, integrables en el sentido de Riemann. Esta extensión no presenta dificultades en el caso de las dos primeras propiedades. Para probar la tercera, observar en primer lugar que si α, α', β, β', son cuatro números reales, tales que $\alpha < \alpha'$, $\beta < \beta'$, entonces se cumplen las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} \sup(\alpha', \beta') - \sup(\alpha, \beta) &\leq \sup(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta), \\ \text{ínf}(\alpha', \beta') - \text{ínf}(\alpha, \beta) &\leq \sup(\alpha' - \alpha, \beta' - \beta), \\ \alpha'\beta' - \alpha\beta &\leq |\alpha|(\beta' - \beta) + |\beta'|(\alpha' - \alpha). \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta además que si $f \in R(I)$ es mayorada en valor absoluto por una constante positiva M entonces se puede escoger las sucesiones aproximantes $(\overline{f}_n)_n$ y $(\underline{f}_n)_n$ de modo que

$$-M \leq \underline{f}_n \leq f \leq \overline{f}_n \leq M$$

De este modo se puede entonces probar la tercera propiedad del enunciado. La cuarta es un caso particular de la tercera y de la linealidad de la integral; la quinta, resulta de la cuarta y de la igualdad:

$$\int_I |f(x)|dx = \int_I f^+(x)dx + \int_I f^-(x)dx. \tag{1.30}$$