FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TEXTOS UNIVERSITARIOS

EDICIONES UC

Álgebra e Introducción al Cálculo

Irene F. Mikenberg

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

Álgebra e Introducción al Cálculo

EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Vicerrectoría de Comunicaciones y Educación Continua
Alameda 390, Santiago, Chile

editorialedicionesuc@uc.cl
www.ediciones.uc.cl

ÁLGEBRA E INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Irene F. Mikenberg

Septiembre 2015
ISBN edición impresa 978-956-14-1680-2
ISBN edición digital 978-956-14-2645-0

Diseño: versión | producciones gráficas Ltda.

Diagramación digital: ebooks Patagonia

info@ebookspatagonia.com
www.ebookspatagonia.com

CIP - Pontificia Universidad Católica de Chile

Mikenberg, Irene
Álgebra e introducción al cálculo / Irene F. Mikenberg.
Incluye bibliografía.

1. Álgebra
2. Cálculo
I. t.

2015 512 + DC23 RCAA2

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

Álgebra e Introducción al Cálculo

Irene F. Mikenberg

EDICIONES UC

ÍNDICE

PRÓLOGO

El presente texto tiene por objetivo entregar los conocimientos necesarios al alumno para que pueda tomar un primer curso de cálculo en la Pontificia Universidad Católica de Chile abarcando todos los temas de la asignatura “álgebra e introducción al cálculo” que se imparte a diversas carreras y en diferentes formas.

Este volumen se preocupa de los temas más formales, permitiendo al alumno familiarizarse con los lenguajes científicos y con el método deductivo, aspectos fundamentales en la formación de un profesional.

En el primer capítulo se presenta el lenguaje matemático, se introduce el uso de variables y se desarrollan algunos de los principales conceptos lógicos: verdad, consecuencia, equivalencia y demostración. Este capítulo es el eje transversal de todo el texto, pues entrega las herramientas necesarias para hacer demostraciones correctas en matemática.

El segundo capítulo se refiere a los números reales. Aquí se hace una presentación axiomática y en base a ella se estudian ecuaciones e inecuaciones.

En el tercer capítulo se introducen los conceptos de relación, función real, sus propiedades y sus gráficos.

El cuarto capítulo está dedicado a las funciones trigonométricas, sus propiedades, sus gráficos y sus aplicaciones.

En el capítulo 5 se presentan los números naturales, basado en los axiomas de los números reales. Aquí se estudian principalmente los conceptos de inducción y recursión.

En el capítulo 6 se desarrollan las principales aplicaciones de la inducción matemática, destacando las propiedades de sumatorias, progresiones, números combinatorios y el teorema del binomio.

En el séptimo capítulo se introducen los números complejos y los polinomios.

En el capítulo 8 se presentan las funciones exponencial y logaritmo, destacando las propiedades de modelamiento de estas funciones.

En el capítulo 9 se introducen los conceptos básicos de la geometría analítica, estudiando rectas y las cónicas.

Finalmente, en el capítulo 10 se introducen los primeros conceptos del cálculo diferencial, estudiando el concepto de completud de los números reales y el de límites de sucesiones.

Al final de cada capítulo se entrega una prueba de autoevaluación de los conocimientos relevantes de cada capítulo. Esta prueba consta de siete preguntas que el alumno deberá responder y autoevaluar cada pregunta con una nota entre cero y uno. El promedio de las 10 evaluaciones será el 70 por ciento de la nota del curso y el restante 30 por ciento es la nota que se obtenga en el examen final que se encuentra en el capítulo 11.

Con esta nota, el alumno podrá saber si está en condiciones apropiadas para tomar un primer curso de cálculo universitario.

Las respuestas a muchos de los ejercicios propuestos en cada capítulo, a las pruebas de autoevaluación y al examen final se encuentran en el capítulo 12.

Deseo agradecer muy especialmente a mi amiga y colega María Isabel Rauld por sus correcciones, revisión del presente texto y su invaluable cooperación.

1 Lenguaje matemático

1.1 Introducción

La matemática estudia las propiedades de ciertos objetos, tales como números, operaciones, conjuntos, funciones, relaciones, etc., y para ello, es necesario poder contar con un lenguaje apropiado para expresar estas propiedades de manera precisa. Desarrollaremos aquí un lenguaje que cumpla estos requisitos, al cual llamaremos lenguaje matemático.

Aunque algunas de estas propiedades son evidentes, la mayoría de ellas no lo son y necesitan de una cierta argumentación que permita establecer su validez. Es fundamental por lo tanto conocer las principales leyes de la lógica que regulan la corrección de estos argumentos. Desarrollaremos aquí los conceptos de verdad, equivalencia y consecuencia lógica y algunas de sus aplicaciones al razonamiento matemático.

1.2 Lenguaje matemático

El **lenguaje matemático** está formado por una parte del lenguaje natural, al cual se le agregan variables y símbolos lógicos que permiten una interpretación precisa de cada frase.

1.2.1 Proposiciones

Llamaremos **proposiciones** a aquellas frases del lenguaje natural sobre las cuales podamos afirmar que son verdaderas o falsas. Ejemplos de proposiciones son:

"Dos es par".

"Tres es mayor que siete".

"Tres más cuatro es nueve".

"Si dos es mayor que cinco entonces dos es par".

"Dos no es par".

En cambio las siguientes frases no son proposiciones:

"¿Es dos número par?".

" Dos más tres".

"¡Súmale cinco!".

Usamos letras griegas α, β, γ... etc., para denotar proposiciones.

1.2.2 Conectivos

Una proposición puede estar compuesta a su vez por una o varias proposiciones más simples, conectadas por una palabra o frase que se llama **conectivo**.

Los conectivos más usados son:

Negación

Consideremos la proposición

"dos **no** es par".

Ésta está compuesta por la proposición más simple “dos es par” y por la palabra “no”, que constituye el conectivo **negación**.

Si α es una proposición, $\neg \alpha$ denotará la proposición “no es verdad que α”.

Conjunción

Consideremos la proposición

“dos es par **y** tres es impar”,

la cual está compuesta por las proposiciones más simples “dos es par” y “tres es impar”, conectadas por la palabra “y”, que constituye el conectivo **conjunción**.

Si α y β son dos proposiciones, usamos $(\alpha \wedge \beta)$ para denotar la proposición *“α y β”.*

Disyunción

Consideremos la proposición

“dos es mayor que siete **o** siete es mayor que dos”.

Esta está compuesta por las proposiciones más simples “dos es mayor que siete” y “ siete es mayor que dos”, conectadas por la palabra “o”, que constituye el conectivo **disyunción**.

Si α y β son dos proposiciones, usamos $(\alpha \vee \beta)$ para denotar la proposición “α o β”

Implicación

Consideremos la proposición

“**si** dos es par, **entonces** tres es impar”.

Ésta está compuesta por las dos proposiciones más simples “dos es par” y “ tres es impar”, conectadas por las palabras “si... entonces... ”, que constituyen el conectivo **implicación**.

Como notación usamos ($\alpha \rightarrow \beta$) para la proposición “si α, entonces β”.

Bicondicional

Consideremos la proposición

“dos es mayor que siete **si y solo si** siete es menor que dos”.

Ésta está compuesta por las proposiciones más simples “dos es mayor que siete” y “ siete es menor que dos”, conectadas por las palabras “si y solo si”, que constituyen el conectivo **bicondicional**.

Denotamos por ($\alpha \leftrightarrow \alpha$) a la proposición “$\alpha$ si y solo si β”.

Una proposición es **simple** si ninguna parte de ella es a su vez una proposición. Ejemplos de proposiciones simples son:

“Dos es un número par”.

“Tres es mayor que cuatro”.

“Tres más cinco es mayor que cuatro”.

Se usan letras minúsculas *p, q, r, s*..., para denotar proposiciones simples.

Ejemplos

Ejemplo 1.1

Usando símbolos matemáticos conocidos y símbolos para los conectivos, podemos expresar las siguientes proposiciones:

a) *"Si dos es par, entonces tres es impar" como (2 es par → 3 es impar).*

b) *"No es verdad, que dos es par o impar" como ¬ (2 es par ∨ 2 es impar).*

c) *"Si no es verdad que cinco es menor que siete, entonces cinco es mayor que siete o cinco es igual que siete" como* $(\neg (5 < 7) \rightarrow (5 > 7 \vee 5 = 7))$.

Ejemplo 1.2

Usando los siguientes símbolos:

p: "2 *es par,*"	q: "3 *es impar,*"
r: "$5 < 7$",	s: "$5 > 7$",
t: "$5 = 7$",	u: "2 *es impar,*"

podemos expresar:

a) *"Si dos es par entonces tres es impar" como*

$$(p \rightarrow q).$$

b) *"No es verdad que dos es par o impar" como*

$$\neg (p \vee u).$$

c) "Si no es verdad que cinco es menor que siete, entonces cinco es mayor que siete o cinco es igual que siete" como

$$(\neg r \rightarrow (s \vee t)).$$

1.2.3 Predicados

Consideremos proposiciones en las que hemos reemplazado uno o más nombres de objetos por letras como: x, *y*, *z*, *u,* etc. Por ejemplo, las siguientes:

"x es positivo"

"y es par"

"x es mayor que *y*"

"*x* es mayor que *y* más *z*"

"Si x es mayor que 5, entonces x es positivo".

Estas frases se llaman **predicados** o **funciones proposicionales** y las letras usadas se llaman **variables**. Los predicados no son verdaderos ni falsos, pero al reemplazar las variables por nombres de objetos se transforman en proposiciones.

Como en el caso de las proposiciones, los predicados pueden estar compuestos por otros más simples ligados entre sí por conectivos. Por ejemplo, el predicado: "x es par o x es primo" está compuesto por los predicados simples: "x es par" y "x es primo" unidos por el conectivo "o".

Ejemplos

Ejemplo 1.3

Usando símbolos matemáticos conocidos y símbolos para los conectivos, podemos expresar los siguientes predicados:

a) *"Si x es par, entonces x no es impar" como (x es par → ¬ (x es impar)).*

b) *"x es mayor que y si y solo si no es verdad que x es menor que y o que x es igual a y" como* $(x > y \leftrightarrow \neg (x < y \vee x = y))$.

Ejemplo 1.4

Usando además los siguientes símbolos:

$p(x)$: "*x es par*", $q(x)$: "*x es impar*",

$r(x, y)$: "$x > y$", $s(x, y)$: "$x < y$",

t: "$x = y$",

podemos expresar:

a) *"Si x es par, entonces x no es impar" como*

$$(p(x) \rightarrow \neg\, q(x))$$

b) *"x es mayor que y si y solo si no es verdad, que x es menor que y o que x es igual a y como*

$$(r(x, y) \leftrightarrow \neg\, (s(x, y) \vee t(x, y)))$$

1.2.4 Cuantificadores

A partir de un predicado se puede obtener una proposición anteponiendo una frase llamada **cuantificador**. Los cuantificadores más usados son:

Cuantificador universal

Consideremos el predicado

“x es positivo”

al cual le anteponemos la frase

“para todo número x se tiene que”.

Obtenemos la proposición

“para todo número x se tiene que x es positivo”

cuyo significado es equivalente al de la proposición

“todo número es positivo”.

La frase “para todo x” constituye el **cuantificador universal**.

Cuantificador existencial

Si al mismo predicado

“x es positivo”

le anteponemos la frase

“existe un número x tal que”

obtenemos la proposición

“existe un número x tal que x es positivo”

cuyo significado es equivalente al de la proposición

“existen números positivos”.

La frase "existe un x" constituye el **cuantificador existencial**.

Cuantificador "existe un único"

Si anteponemos al mismo predicado

"x es positivo",

la frase

"existe un único número x tal que",

obtenemos la proposición

"existe un único número x tal que x es positivo",

cuyo significado es equivalente al de la proposición

"existe un único número positivo".

La frase "existe un único x" constituye el **cuantificador "existe un único".**

En todo cuantificador se debe especificar el tipo de objetos involucrados en la afirmación, y para hacer esto se usan colecciones o conjuntos de objetos que se denotan por letras mayúsculas: *A, B, C...* etc.

Como notación usamos:

$\forall x \in A\ (\alpha(x)):$	"para todo x elemento de la colección A $\alpha(x)$."
$\exists x \in A\ (\alpha(x)):$	"existe al menos un elemento x de la colección A tal que $\alpha(x)$"
$\exists! x \in A\ (\alpha(x)):$	"existe un único elemento x de la colección A tal que $\alpha(x)$."

$\alpha(a)$ denota la proposición obtenida de $\alpha(x)$ al reemplazar x por a.

Notemos que si se tiene un predicado con dos variables diferentes, es necesario anteponer dos cuantificadores para obtener una proposición. Por ejemplo, a partir del predicado $x < y$ se pueden obtener entre otras:

$$\forall x \in A \forall y \in A (x < y)$$
$$\exists x \in A \forall y \in A (x < y)$$
$$\forall x \in A \exists y \in A (x < y)$$
$$\exists x \in A \exists y \in A (x < y)$$
$$\forall y \in A \exists x \in A (x < y)$$

Ejemplos

Ejemplo 1.5

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales partiendo del 1. Entonces podemos expresar:

a) "Todo número natural impar es primo"

$$\forall x \in \mathbb{N} \ (x \text{ es impar} \rightarrow x \text{ es primo})$$

b) "Existen números naturales impares que no son primos"

$$\exists x \in \mathbb{N} \ (x \text{ es impar} \wedge \neg (x \text{ es primo}))$$

c) "Existe un único número natural primo que no es impar"

$$\exists! x \in \mathbb{N} \ (x \text{ es primo} \wedge \neg (x \text{ es impar}))$$

Ejemplo 1.6

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales. Usando los símbolos matemáticos usuales y los símbolos lógicos, podemos expresar las siguientes proposiciones:

a) *Dos más dos es ocho:*

$$2 + 2 = 8$$

b) *Todo número natural es par:*

$$\forall x \in \mathbb{N}\ (x \text{ es par})$$

c) *Si dos es par, todo número natural es par:*

$$(2 \text{ es par} \rightarrow \forall x \in \mathbb{N}\ (x \text{ es par}))$$

d) *Si uno es par, entonces 3 no es par:*

$$(1 \text{ es par} \rightarrow \neg\ (3 \text{ es par}))$$

e) *Todo número natural mayor que cinco es par:*

$$\forall x \in \mathbb{N}\ (x > 5 \rightarrow x \text{ es par})$$

f) *Hay números naturales pares mayores que cinco:*

$$\exists x \in \mathbb{N}\ (x \text{ es par} \wedge x > 5)$$

g) *El producto de dos números naturales pares, es par:*

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ ((x \text{ es par} \wedge y \text{ es par}) \rightarrow x \cdot y \text{ es par})$$

h) *Existe un único número natural cuyo cuadrado es cuatro:*

$$\exists! x \in \mathbb{N}\ (x^2 = 4)$$

i) *No hay un número natural que sea mayor que todo número natural:*

$$\neg \exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x > y)$$

j) *El cuadrado de la suma de dos números naturales es igual al cuadrado del primero más el doble del producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo*

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ ((x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2)$$

1.3 Las leyes de la lógica

1.3.1 Verdad

La verdad de una proposición simple depende solamente de su contenido. Por ejemplo, las proposiciones “2 < 3”, “2 es par” y “3 es impar” son verdaderas y por el contrario, “4 = 5” y “$(2 \cdot 5 + 1) > (3^2 \cdot 10)$” son falsas.

En cambio, la verdad de una proposición compuesta depende además de la verdad o falsedad de sus componentes más simples y está dada por las siguientes reglas, donde α y β son proposiciones, $\alpha(x)$ es un predicado y A es un conjunto:

1. $\neg\ \alpha$ es verdadera si y solamente si α es falsa.

2. $(\alpha \vee \beta)$ es verdadera si y solamente si al menos una de ellas es verdadera o incluso si ambas son verdaderas.

3. $(\alpha \wedge \beta)$ es verdadera si y solamente si ambas son verdaderas.

4. $(\alpha \to \beta)$ es verdadera si y solamente no puede darse el caso que α sea verdadera y β sea falsa.

5. $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es verdadera si y solamente si ambas son verdaderas o ambas son falsas.

6. $\forall x \in A\ \alpha(x)$ es verdadera si y solamente si para todo elemento a de A se tiene que $\alpha(a)$ es verdadera.

7. $\exists x \in A\ \alpha(x)$ es verdadera si y solamente si existe al menos un elemento a de A tal que $\alpha(a)$ es verdadera.

8. $\exists! x \in A\ \alpha(x)$ es verdadera si y solamente si existe un único elemento a de A tal que $\alpha(a)$ es verdadera.

Observación

Notemos que en el caso de la implicación, si α es falsa, automáticamente (α → β) es verdadera y en este caso se dice que (α → β) es **trivialmente verdadera**.

Ejemplos

Ejemplo 1.7

Sea $\mathbb{N}$ *el conjunto de los números naturales. Entonces,*

a) $(2 < 3 \vee 4 = 5)$ *es verdadera porque* $2 < 3$ *es verdadera.*

b) $(2 < 3 \wedge 4 = 5)$ *es falsa porque* $4 = 5$ *es falsa.*

c) $(2 < 3 \to 4 = 5)$ *es falsa porque* $2 < 3$ *es verdadera y* $4 = 5$ *es falsa.*

d) $(2 < 3 \to 3 < 4)$ *es verdadera porque ambas son verdaderas.*

e) $(2 > 3 \rightarrow 4 = 5)$ *es trivialmente verdadera porque* $2 > 3$ *es falsa.*

f) $(2 < 3 \leftrightarrow 5 > 1)$ *es verdadera porque ambas son verdaderas.*

g) $(2 > 3 \leftrightarrow 4 = 5)$ *es verdadera porque ambas son falsas.*

h) $\forall x \in \mathbb{N}\ (x > 2)$ *es falsa porque* $1 \in \mathbb{N}$ *y no se cumple que* $1 > 2$.

i) $\exists x \in \mathbb{N}\ (x > 2)$ *es verdadera porque por ejemplo,* $3 \in \mathbb{N}$ *y* $3 > 2$.

j) $\forall\ x \in \mathbb{N}\ (x > 2 \vee x \leq 2)$ *es verdadera, porque si* $a \in \mathbb{N}$, *entonces* $(a > 2 \vee a \leq 2)$ *es verdadera y esto último es cierto porque o bien* $a > 2$ *o bien* $a \leq 2$.

k) $\exists! x \in \mathbb{N}\ (x > 2)$ *es falsa, porque por ejemplo,* 3 *y* $4 \in \mathbb{N}$, $3 > 2, 4 > 2$ *y* $4 \neq 3$.

l) $\forall x \in \mathbb{N}\ (x > 4 \rightarrow x + 3 > 7)$ *es verdadera porque si* $a \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $(a > 4 \rightarrow a + 3 > 7)$ *es verdadera, y esto último es cierto porque si* $a > 4$, *sumando tres se obtiene que* $a + 3 > 7$.

m) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ ((x > 1 \wedge y > 1) \rightarrow x \cdot y < 1)$ *es falsa, porque por ejemplo*, $2 \in \mathbb{N}$, $3 \forall \mathbb{N}$ *y* $((2 > 1 \wedge 3 > 1) \rightarrow 2 \cdot 3 < 1)$ *es falsa y esto último se debe a que* $2 > 1$ *y* $3 > 1$ *y no se cumple que* $2 \cdot 3 < 1$.

n) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x < y)$ *es verdadera, pues si* $a \in \mathbb{N}$, *entonces por ejemplo,* $a + 1 \in \mathbb{N}$ *y* $a < a + 1$, *entonces si* $x = a$ *exsite* $y = a + 1$ *tal que* $x < y$.

ñ) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall\ y \in \mathbb{N}\ (y < x)$ *es falsa porque si* $a \in \mathbb{N}$, *entonces por ejemplo,* $a + 1 \in \mathbb{N}$ *y no se cumple que* $a + 1 < a$.

Notemos que para ver que una proposición de la forma $\forall x \in A\ \alpha(x)$ es falsa, basta encontrar un objeto a de A que no cumpla con $\alpha(a)$. Este objeto se llama un contraejemplo de la proposición dada.

Por ejemplo, en (h) del ejemplo anterior, $x = 1$ es un contraejemplo para la proposición $\forall x \in \mathbb{N}(x > 2)$.

1.3.2 Verdad lógica o tautología

Consideremos la proposición

$$((p \wedge q) \rightarrow p)$$

Esta es verdadera, independientemente del valor de verdad de p y de q, como podemos ver al hacer la siguiente tabla llamada **tabla de verdad** que se construye a partir de todas las posibles combinaciones de valores de verdad para las proposiciones simples que contiene la proposición original, tal como se muestra a continuación:

p	q	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tabla 1.1: Verdades lógicas

Este tipo de proposiciones se llaman **verdades lógicas**.

Por el contrario, si consideramos la proposición

$$((p \vee q) \rightarrow p),$$

y hacemos su tabla de verdad: