DK

ALGEBRA IST EINE WISSENSCHAFTLICHE KUNST

GLEICHE SUMME IN ALLE RICHTUNGEN

DAS GANZE IST GRÖSSER ALS EIN TEIL DAVON

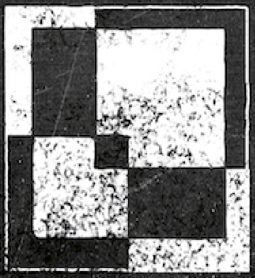
DIE ERFORSCHUNG VON PI IST WIE DIE ERFORSCHUNG DES UNIVERSUMS

DAS MATHEMATIK-BUCH

ENDLOSE VIELFALT UND UNBEGRENZTE KOMPLIZIERTHEIT

UMWANDLUNG DER MULTIPLIKATION IN EINE ADDITION

DIE ALLGEGENWÄRTIGE MUSIK DER SPHÄREN



BIG IDEAS EINFACH ERKLÄRT

INHALT

Das Ganze ist größer als ein Teil davon
Euklids *Elemente*

Zählen ohne Zahlen
Der Abakus

Die Erforschung von Pi ist wie die Erforschung des Universums
Berechnung von Pi

Wir trennen die Zahlen wie mit einem Sieb
Das Sieb des Eratosthenes

Ein geometrischer Gewaltmarsch
Kegelschnitte

Die Kunst, Dreiecke zu messen
Trigonometrie

Zahlen können weniger als nichts sein
Negative Zahlen

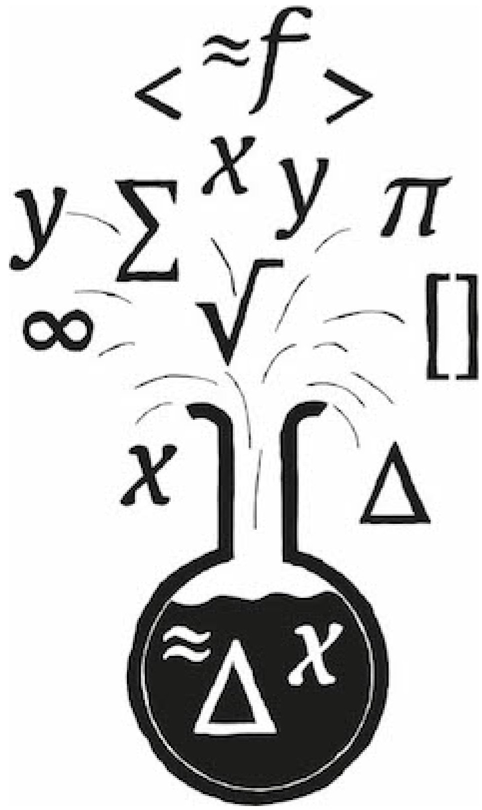
Die Blume der ganzen Arithmetik
Diophantische Gleichungen

Ein unvergleichlicher Stern am Firmament der Weisheit
Hypatia

Der beste Näherungswert für Pi für ein Jahrtausend
Zu Chongzhi

DAS MITTELALTER

500–1500



DIE RENAISSANCE

1500–1680

DIE AUFKLÄRUNG

1680–1800

Die schönste aller Gleichungen
Eulers Identität

Die Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse
Der Satz von Bayes

Einfach eine Frage der Algebra
Die analytische Lösung von Gleichungen

Lasst uns Fakten sammeln
Buffons Nadelexperiment

Die Algebra gibt oft mehr, als man erbeten hatte
Der Fundamentalsatz der Algebra

DAS 19. JAHRHUNDERT

1800–1900

Komplexe Zahlen sind Koordinaten in einer Ebene
Die komplexe Zahlenebene

Die Natur als fruchtbarste Quelle für mathematische Entdeckungen
Fourier-Analyse

Das hypothetische Wesen, das von allen Atomen des Universums weiß, wo sie sich befinden
Der laplacesche Dämon

Wie stehen die Chancen?
Die Poisson-Verteilung

Unersetzbares Werkzeug der angewandten Mathematik
Bessel-Funktionen

Sie wird den zukünftigen Kurs der Wissenschaft steuern
Mechanische Computer

Eine neue Art von Funktionen
Elliptische Funktionen

Ich habe eine neue, andere Welt aus dem Nichts erschaffen
Nichteuklidische Geometrien

Algebraische Strukturen haben Symmetrien
Gruppentheorie

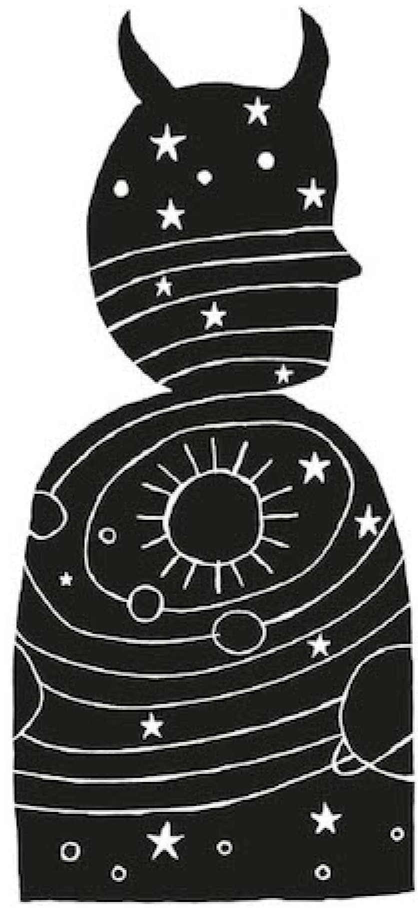
Geradezu wie ein Taschenatlas
Quaternionen

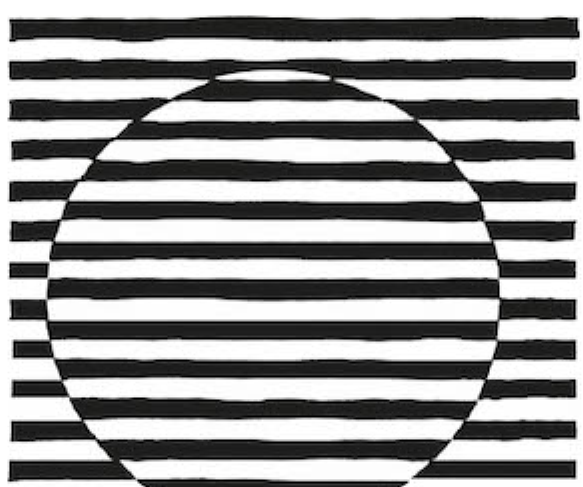
Zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen außer 8 und 9 können keine exakten Potenzen sein
Die catalansche Vermutung

Die Matrix ist überall
Matrizen

Eine Untersuchung der Gesetze des Denkens
Boolesche Algebra

Eine Fläche mit nur einer Seite





MODERNE MATHEMATIK

1900–HEUTE

Logisch können Dinge nur teilweise wahr sein
Fuzzy-Logik

Eine große vereinheitlichte Theorie der Mathematik
Das Langlands-Programm

Ein neues Dach, ein neuer Beweis
Mathematische Kollaboration

Fünfecke sehen einfach nett aus
Penrose-Kacheln

Endlose Vielfalt und unbegrenzte Kompliziertheit
Fraktale

Vier Farben, aber nicht mehr
Der Vier-Farben-Satz

Verschlüsselung von Daten mit einer Einwegfunktion
Kryptografie

Juwelen auf einem noch unsichtbaren Faden
Endliche einfache Gruppen

Ein wahrhaft wunderbarer Beweis
Beweis des Satzes von Fermat

Keine andere Anerkennung ist nötig
Beweis der Poincaré-Vermutung

ANHANG

VORWORT

Die ganze Mathematik in einem Buch – das ist unvorstellbar, denn es gibt einfach zu viel Mathematik. In der Tat existiert Mathematik seit mindestens 5000 Jahren. Während dieser langen Zeit haben Mathematikerinnen und Mathematiker unablässig mathematische Erkenntnisse erzielt und veröffentlicht. Heute ist Mathematik produktiver denn je: Täglich, ja stündlich werden neue Ergebnisse publiziert. Wie soll man das zusammenfassen?

Die Autoren dieses Buches schaffen es jedoch, den Dschungel zu lichten. Dazu schlagen sie große Schneisen und ermöglichen so Blicke in die Welt der Mathematik, die Einsichten eröffnen. Was das Buch wirklich einzigartig macht, ist, dass es nicht in der Vergangenheit stehen bleibt, sondern durchgängig die Verbindung zu moderner Mathematik sucht.

Die ganze Mathematik in einem Buch – das kann nicht funktionieren, weil das viel zu kompliziert ist. In der Tat hat die Mathematik in den letzten 500 Jahren eine Sprache voller Symbole, Spezialausdrücke und Zeichen entwickelt. Die Mathematikerinnen und Mathematiker sind zu Recht stolz darauf. Denn die mathematische Sprache ist ein Präzisionsinstrument, mit dem man auch noch die kühnsten Expeditionen menschlichen Denkens ermöglichen und absichern kann. Aber wer soll das verstehen?

Doch, es geht. Das Buch schlägt einen klugen Mittelweg ein: Es vermeidet einerseits, so zu tun, als ob die mathematische Sprache im Grunde nur eine Art Zuckerguss sei, auf den man auch verzichten kann, und es vermeidet andererseits, ein mathematisches Lehrbuch zu sein, bei dem die mathematische Sprache ganz selbstverständlich benutzt wird. So werden an vielen Stellen der Nutzen und der Vorteil einer symbolischen Darstellung klar.

Die ganze Mathematik in einem Buch – das interessiert doch niemanden, weil Mathe angeblich langweilig ist. In der Tat haben die wenigsten Menschen eine Vorstellung von der Lebendigkeit der Mathematik. Es ist weitgehend unbekannt, dass Mathematik eine der wichtigsten Wissenschaften für unser Leben und unsere wirtschaftliche Entwicklung ist, dass man über das Leben von Mathematikerinnen und Mathematikern spannende Geschichten erzählen kann, und, nicht zuletzt, dass mathematische Probleme und die Versuche, ihnen auf die Spur zu kommen, unglaublich faszinierend sein können.

Doch auch dies leistet das vorliegende Buch: Es entwirft ein Panorama von kühnen mathematischen Gedanken und ihren Anwendungen, es erzählt von den handelnden Personen und stellt Probleme dar, deren Faszination man sich kaum entziehen kann.

Insgesamt ein Buch mit einem umfassenden Anspruch, das Leserinnen und Leser aber nicht erschlägt. Vielmehr kann man einfach irgendwo anfangen und mal ein Kapitel lesen. Ich bin überzeugt: Aus dem einen Kapitel werden zwei und drei oder noch mehr.

Viel Vergnügen!

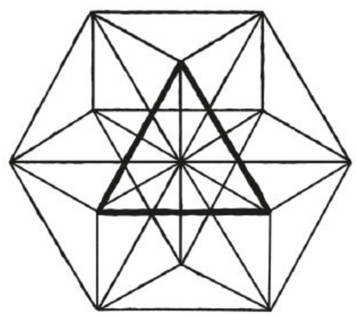
Professor Dr. Albrecht Beutelspacher
Direktor des Mathematikums Gießen

EINLEITUNG

Die Anfänge der Mathematik liegen in der Frühgeschichte, als die Menschen begannen, Dinge zu zählen und zu messen. Dabei erkannten sie Muster und Regeln in den Vorstellungen von Zahlen, Maßen und Formen. Sie entdeckten die Prinzipien der Addition und Subtraktion – wenn man etwa zwei Dinge (ob Steine, Beeren oder Mammuts) zu zwei weiteren hinzufügt, hat man stets vier Dinge. Solche Gedanken erscheinen uns heute offensichtlich, waren damals aber tiefgründige Einsichten. Sie zeigen, dass die Geschichte der Mathematik nicht nur eine Geschichte der Erfindungen, sondern auch der Entdeckungen, ist. Zwar waren es menschliche Neugier und Intuition, die mathematische Grundsätze erkannten, und der Erfindungsreichtum lieferte später Methoden zur Notation (der Beschreibung durch Symbole) sowie Manipulation, aber die Prinzipien selbst sind nicht menschengemacht. $2 + 2 = 4$ ist eine Tatsache, die unabhängig vom Menschen wahr ist. Die Gesetze der Mathematik sind wie die der Physik universell, ewig und unveränderlich. Als Mathematiker erstmals zeigten, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks in der Ebene 180 ° ist, war das nicht ihre Erfindung. Sie hatten lediglich eine Tatsache entdeckt, die immer schon wahr war und ewig wahr bleiben wird.

»Es ist unmöglich, Mathematiker zu sein, ohne die Seele eines Dichters zu haben.«

Karl Weierstraß
Deutscher Mathematiker zitiert von
Sofja Kowalewskaja
Russische Mathematikerin Brief, Herbst 1890


Frühe Anwendungen

Die Entdeckung der Mathematik begann in der Frühgeschichte mit der Notwendigkeit, Dinge zu zählen. Im einfachsten Fall legte man Strichlisten auf Knochen oder Holzstäben an – ein einfacher, aber zuverlässiger Weg, die Anzahl von Dingen festzuhalten. Später wurden den Zahlen Namen und Symbole zugeordnet, und die ersten Zahlensysteme entstanden, die auch Operationen wie hinzufügen oder wegnehmen von Mengen ermöglichten, also die einfachsten Rechenregeln.

Als die Jäger und Sammler Handel trieben, mit dem Ackerbau sesshaft und die Gesellschaften komplexer wurden, stellten Rechenregeln und Zahlensysteme unverzichtbare Hilfsmittel für alle Geschäftsvorgänge dar. Für den Handel, die Inventur und die

Besteuerung von nicht zählbaren Gütern wie Öl, Getreide oder Grundstücken wurden Messsysteme entwickelt, die Größen wie Gewicht oder Länge einen numerischen Wert zuwiesen. Berechnungen wurden komplexer, und das Konzept der Multiplikation und Division wurde aus der Addition und Subtraktion abgeleitet, um damit etwa Grundstücksflächen zu berechnen.

In den frühen Zivilisationen wurden die neuen Entdeckungen, insbesondere die Messung von Objekten im Raum, die Grundlage der Geometrie, in der Architektur und anderen Handwerken anwendbar. Dabei erkannte man einige Muster, die sich als nützlich erwiesen. Braucht ein Baumeister etwa einen rechten Winkel, kann er ihn einfach (aber genau) mit einem Dreieck der Seitenlängen drei, vier und fünf Einheiten erhalten. Ohne derartige genaue Hilfsmittel und Kenntnisse hätte man die Straßen, Kanäle, Zikkurate und Pyramiden Mesopotamiens und Ägyptens nicht bauen können.

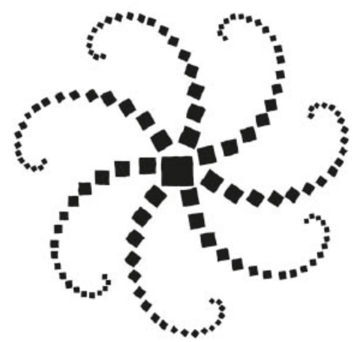
Als man neue Anwendungen der mathematischen Entdeckungen vor allem in der Astronomie, aber auch der Navigation, Buchhaltung, im Steuerwesen und vielen anderen Bereichen fand, tauchten weitere Muster und Ideen auf. Die einzelnen antiken Kulturen trieben die Mathematik durch dieses Wechselspiel zwischen Anwendung und Entdeckung voran, entwickelten aber auch eine Faszination für mathematische Konzepte an sich, die »reine Mathematik«. Ab Mitte des ersten Jahrtausends v. Chr. kam die reine Mathematik in Griechenland und etwas später in Indien und China auf. Sie beruht auf dem Erbe praktischer Pioniere: den Baumeistern, Astronomen und Entdeckern einstiger Kulturen.

Zwar waren diese frühen »reinen« Mathematiker weniger an den praktischen Anwendungen interessiert, dennoch beschränkten sie sich nicht auf Mathematik. Bei der Erforschung der Eigenschaften von Zahlen, Formen und Methoden entdeckten sie allgemeingültige Regeln und Muster, die metaphysische Fragen über die Natur des Kosmos aufwarfen oder sogar vermuten ließen, dass diese Muster mystische Eigenschaften hätten. Daher wurde die Mathematik oft als ergänzende Disziplin zur Philosophie gesehen. Viele der großen Mathematiker waren auch Philosophen, und umgekehrt. Die Verbindung der beiden Disziplinen besteht auch heute noch.

»Geometrie ist Erkenntnis des immer unveränderlichen Seins.«

Platon
Antiker griechischer Philosoph *Politeia* (»Der Staat«), Buch VII





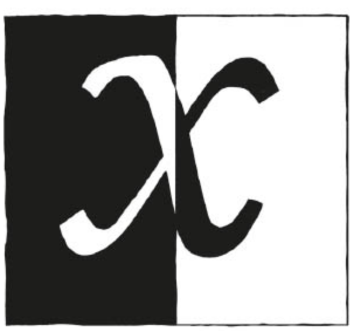
Arithmetik und Algebra

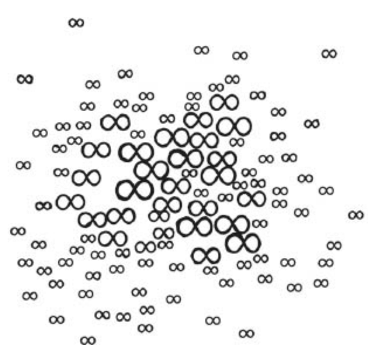
Damit begann die Geschichte der Mathematik, wie wir sie heute kennen. Diese Entdeckungen, Vermutungen und Einsichten von Mathematikern bilden einen Großteil dieses Buchs. Neben einzelnen Denkern und deren Ideen beschreibt es einen sich stetig fortentwickelnden Gedankengang in der Geschichte der Gesellschaften und Kulturen. Er reicht von den antiken Zivilisationen Mesopotamiens und Ägyptens über Griechenland, China, Indien ins islamische Reich bis zum Europa der Renaissance und schließlich zur modernen Welt. Im Laufe der Zeit teilte man die Mathematik dabei in mehrere separate, aber miteinander verknüpfte Teilgebiete auf.

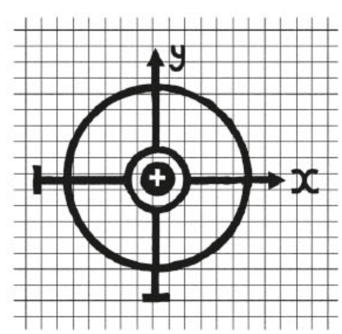
Das früheste und in vielerlei Hinsicht das fundamentalste Teilgebiet nennen wir heute Arithmetik, nach dem griechischen Wort *arithmos*

(»Zahl«). Im einfachsten Fall geht es um das Abzählen und um die Zuordnung numerischer Werte und auch um Rechenregeln, also Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, die man auf Zahlen anwenden kann. Aus dem einfachen Zahlbegriff entstand das Studium ihrer Eigenschaften und des Konzepts der Zahlen selbst – die Zahlentheorie. Bestimmte Zahlen – etwa die Konstanten ***π*** und ***e***, die Primzahlen oder die irrationalen Zahlen faszinierten die Mathematiker seit jeher. Daher studierte man sie umso ausgiebiger.

Ein weiteres großes Teilgebiet ist Algebra, die sich mit der Struktur und Ordnung der Mathematik beschäftigt und damit für jedes andere Gebiet relevant ist. Die Algebra unterschiedet sich von der Arithmetik u. a. durch die Verwendung von Symbolen, etwa Buchstaben, für Variablen (unbekannte Zahlen). Einfach gesagt erforscht die Algebra die zugrundeliegenden Regeln, wie die Symbole verwendet werden, etwa in Gleichungen. Methoden zur Lösung von sogar ziemlich komplizierten quadratischen Gleichungen entdeckten in der Antike schon die Babylonier. Aber die Begründer der Algebra waren mittelalterliche Gelehrte im goldenen Zeitalter des Islam. Sie verwendeten Symbole, um Rechnungen zu vereinfachen. Aus ihrem Wort *al-Dschabr* (wörtlich: »die Einrenkung [gebrochener Teile]«) entstand der Name Algebra. Neuere Entwicklungen abstrahieren selbst die Strukturen der Algebra, genannt »abstrakte Algebra«.







Geometrie und Analysis

Ein weiterer großer Teilbereich, die Geometrie, beschäftigt sich mit dem Konzept des Raums und der Beziehung von Objekten in diesem: also ihrer Form, Größe und Lage. Die Geometrie entstand aus dem Problem, physische Dimensionen zu beschreiben, etwa von Dingen in der Technik und Bauprojekten, der Vermessung und Verwaltung von Land oder bei astronomischen Beobachtungen für die Navigation und die Kalenderberechnung. Ein Zweig der Geometrie, die Trigonometrie (das Untersuchen von Dreiecken), erwies sich als besonders nützlich. Wohl wegen ihres konsequent logischen Aufbaus galt die Geometrie in vielen antiken Kulturen als Grundstein der Mathematik. Sie lieferte die Methoden der Problemlösung und Beweisführung in anderen Teilgebieten.

»In der Mathematik muss die Kunst, eine Frage zu stellen, höher bewertet werden als die Kunst, diese Frage zu lösen.«

Georg Cantor
Deutscher Mathematiker Dissertation, Berlin 1867

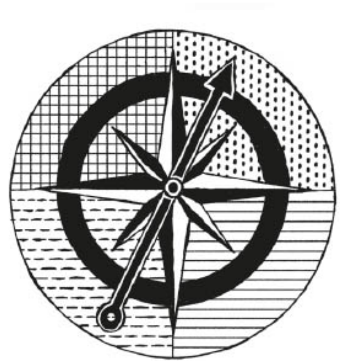
Das galt besonders für das antike Griechenland, wo Geometrie und Mathematik fast als Synonyme galten. Das Erbe der großen Mathematiker wie Pythagoras, Platon und Aristoteles wurde von Euklid gefestigt. Seine Prinzipien der Mathematik, basierend auf einer Kombination von Geometrie und Logik, bildeten etwa zwei Jahrtausende lang das anerkannte Fundament der Disziplin. Im 19. Jahrhundert schuf man Alternativen zur euklidischen Geometrie und entwickelte neue Bereiche wie die Topologie, die nicht nur Eigenschaften von Objekten im Raum, sondern den Raum selbst erforscht.

Seit der Antike hatte sich die Mathematik mit statischen Situationen beschäftigt oder Dinge zu einem festen Zeitpunkt beschrieben. Es gab aber noch kein Mittel, um kontinuierliche Veränderungen zu messen oder zu berechnen. Die Infinitesimalrechnung, die im 17. Jahrhundert von Gottfried Leibniz und Isaac Newton unabhängig voneinander entwickelt wurde, lieferte Antworten. Ihre zwei Teilgebiete, die Differenzial- und Integralrechnung, analysierten Merkmale wie die Steigung oder die Fläche unter einer Kurve. Damit konnten sie Veränderungen beschreiben.

Die Entdeckung der Infinitesimalrechnung begründete die Analysis, die im 20. Jahrhundert besonders wichtig für etwa die Quantenmechanik oder Chaostheorie wurde.

Neue Grundlagen

Im späten 19. und frühen 20. Jahrhundert entstand ein neuer Teilbereich: die Grundlagen der Mathematik. Dieses Gebiet begutachtete die Verbindung zwischen Philosophie und Mathematik. Wie schon Euklid im 3. Jahrhundert v. Chr. wollten Gelehrte wie Gottlob Frege und Bertrand Russell die logischen Grundlagen mathematischer Prinzipien entdecken. Das regte eine Neubeurteilung der Natur der Mathematik selbst an: Wie funktioniert sie und wo sind ihre Grenzen? Die Erforschung der grundlegenden mathematischen Konzepte ist wohl das abstrakteste Teilgebiet, eine Art von Metamathematik, jedoch eine unerlässliche Ergänzung jedes anderen Gebiets der modernen Mathematik.


Neue Technik, neue Ideen

Die verschiedenen Gebiete der Mathematik – Arithmetik bzw. Zahlentheorie, Algebra, Geometrie, Analysis, Logik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik – sind um ihrer selbst Willen würdige Studiengebiete, und das gängige Bild der akademischen Mathematik ist die nahezu unbegreifliche Abstraktion. Aber meist haben sie auch praktische Anwendungen, und umgekehrt treiben Fortschritte in Wissenschaft und Technik das mathematische Denken voran.

Ein wichtiges Beispiel ist das symbiotische Verhältnis zwischen Mathematik und Computertechnik. Computer wurden ursprünglich als Werkzeug für Routinearbeiten entwickelt: die Berechnung von Tabellen für Mathematiker oder Astronomen. Doch ihre Konstruktion erforderte neue mathematische Denkmodelle. Daher waren es Mathematiker ebenso wie Techniker, die die Grundlagen von erst mechanischen und dann elektronischen Rechenmaschinen lieferten, die dann wieder Hilfsmittel zur Entdeckung neuer Konzepte waren. Zweifellos werden auch in Zukunft neue Anwendungen für mathematische Lehrsätze gefunden – und da noch zahllose Probleme ungelöst sind, ist auch für mathematische Entdeckungen kein Ende in Sicht.

Die Geschichte der Mathematik ist die Erkundung von Teilgebieten und Entdeckung neuer. Aber sie ist auch die Geschichte der Entdecker, der Mathematiker, die ein festes Ziel hatten, etwa ein ungelöstes Problem zu lösen oder in unbekannten Territorien nach neuen Ideen zu suchen. Oder andere, die bei ihrer Arbeit über eine neue Idee stolperten und sie verfolgten, um zu sehen, wo sie hinführt. Manche Entdeckungen waren bahnbrechende Erkenntnisse, die den Weg in neue, unbekannte Bereiche öffneten, andere waren von »Zwergen auf den Schultern von Riesen«: die Fortentwicklung oder Anwendung der Arbeiten früherer Denkergenerationen.

Dieses Buch stellt viele der »großen Ideen« der Mathematik von den frühesten Entdeckungen bis zur Gegenwart vor und erklärt in verständlicher Sprache, wo sie herkommen, wer sie entdeckte und warum sie wichtig sind. Einige sind wohl vielen Lesern bekannt, andere nicht. Mit dem Verständnis dieser Ideen und der Menschen und Gesellschaften, die sie entdeckten, können wir nicht nur die Allgegenwart und Nützlichkeit der Mathematik würdigen, sondern auch die Eleganz und Schönheit, die Mathematiker in ihr sehen. ■

»Richtig betrachtet besitzt die Mathematik nicht nur Wahrheit, sondern erhabene Schönheit.«

Bertrand Russell
Britischer Philosoph und Mathematiker *The Study of Mathematics*, 1919

FRÜHZEIT UND ANTIKE
3500 V. CHR.–500 N. CHR.

UM 3500 V. CHR.

Sumerische Tontafeln enthalten **verschiedene Maßangaben:** ein Vorläufer eines **Zahlensystems.**

UM 1650 V. CHR.

Die Ägypter beschreiben **Methoden zur Berechnung** von Flächen und Volumen im *Papyrus Rhind*.

UM 430 V. CHR.

Hippasos von Metapont entdeckt die **irrationalen Zahlen:** Zahlen, die sich nicht als Brüche darstellen lassen.

UM 300 V. CHR.

Eines der **einflussreichsten Lehrbücher** aller Zeiten, Euklids *Elemente*, enthält **mathematische Fortschritte** wie den Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

UM 3000 V. CHR.

Die Sumerer nutzen ein **Hexagesimalsystem** (Zahlensystem mit Basis 60), in dem ein **kleiner Kegel 1** und ein **großer Kegel 60** repräsentiert.

UM 530 V. CHR.

Pythagoras **gründet eine Schule,** in der er **metaphysischen Glauben und Mathematik** lehrt, etwa den Satz von Pythagoras.

UM 387 V. CHR.

Platon gründet die **Akademie in Athen** – angeblich stand über dem Eingang: »Niemand soll eintreten, der keine Geometrie versteht«.

UM 200 V. CHR.

Wichtige **Fortschritte in der Geometrie** macht Apollonios von Perge in dem Buch *Konika*.

UM 150 V. CHR.

Die alten Chinesen nutzen ein **System zur Darstellung negativer und positiver Zahlen** mit schwarzen und roten Bambusstäben.

263

Liu Hui schreibt wichtige Kommentare zum ***Jiu Zhang Suanshu* (»Neun Kapitel der Rechenkunst«),** eine Sammlung älterer Texte verschiedener Gelehrter aus dem 1. Jt. v. Chr.

UM 250 V. CHR.

Archimedes **nähert den Wert von Pi** durch eine **Methode mit Polygonen** an.

UM 150 V. CHR.

Hipparchos von Nicäa stellt die **ersten trigonometrischen Tabellen** zusammen.

UM 250 N. CHR.

Diophantos von Alexandria veröffentlicht in *Arithmetica* neue **Symbole für die Darstellung von Unbekannten** in Gleichungen.

470

Zu Chongzhi nähert **Pi auf sieben Dezimalstellen** an, ein Wert, der ein Jahrtausend lang nicht weiter verbessert wird.

Schon vor 40 000 Jahren schnitten Menschen Kerben als Strichlisten in Holz- oder Knochenstäbe. Zweifellos hatten sie ein rudimentäres Verständnis für Zahlen und Rechnen, aber die Geschichte der eigentlichen Mathematik begann mit der Entwicklung von

Zahlensystemen in den frühen Hochkulturen. Das erste entstand im vierten Jahrtausend v. Chr. in Mesopotamien (im heutigen Irak und Iran), wo die weltweit früheste Landwirtschaft und die ersten Städte entstanden. Hier verfeinerten die Sumerer das Prinzip von Strichlisten mit verschiedenen Symbolen für verschiedene Mengen, und die Babylonier entwickelten es zu einem komplizierten Zahlensystem aus Keilschriftzeichen weiter. Ab etwa 1800 v. Chr. wandten die Babylonier elementare Geometrie und Algebra auf praktische Probleme an. Etwa in der Architektur, bei Bauprojekten, in der Landvermessung, im Rechnungswesen sowie in der Buchhaltung für den Handel und Steuererhebungen.

Ähnliches wiederholte sich in der etwas jüngeren ägyptischen Zivilisation. Der Handel und das Steuerwesen erforderten ein kompliziertes Zahlensystem. Auch Bauarbeiten und Technik waren nur dank Messverfahren und gewissen Kenntnissen in Geometrie und Algebra möglich. Mit ihren mathematischen Fähigkeiten und guten Himmelsbeobachtungen konnten die Ägypter auch astronomische Zyklen und Jahreszeiten berechnen und vorhersagen. Sie stellten Kalender für die Landwirtschaft und den religiösen Jahreslauf auf. Ebenso legten sie die Grundlagen für die Geometrie und Arithmetik schon um 2000 v. Chr.

Griechische Sorgfalt

Ab dem 6. Jahrhundert v. Chr. nahm der Einfluss Griechenlands im östlichen Mittelmeerraum rapide zu. Griechische Gelehrte übernahmen mathematische Konzepte aus Babylonien und Ägypten. Die Griechen benutzten ein Stellenwertsystem zur Basis 10 (also zehn Zahlzeichen), abgeleitet vom ägyptischen System. Vor allem die Geometrie schwang mit der griechischen Kultur mit, die Formen und Symmetrien schätzte. Die Mathematik wurde zu einer Basis des Denkens und zeigte sich in der Kunst, Architektur und sogar der Philosophie. Die fast mystischen Eigenschaften der Geometrie und der Zahlen inspirierten Pythagoras und seine Anhänger zur Gründung einer fast kultartigen Gemeinde. Sie betrachteten mathematische

Prinzipien, die sie als Fundament des Universums und aller Dinge ansahen.

Jahrhunderte vor Pythagoras hatten Ägypter Dreiecke mit Seiten von 3, 4 und 5 Längeneinheiten benutzt, um beim Bau rechte Winkel zu konstruieren. Diese Faustregel hatten sie durch zufällige Beobachtungen entdeckt. Doch die Pythagoreer fanden einen strikten Beweis für einen allgemeinen Satz über die Seitenverhältnisse rechtwinkliger Dreiecke. Die Grundidee, allgemeine Sätze strikt zu beweisen, gilt als einer der wichtigsten Beiträge der Griechen zur Mathematik.

Platons Akademie in Athen war der Philosophie und der Mathematik gewidmet, und Platon selbst beschrieb die fünf platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder). Man wandte Logik auf die Grundlagen der Mathematik an. Insbesondere deckte Zenon von Elea logische Probleme der Unendlichkeit und des Wandels auf. Die Griechen erforschten auch die seltsamen Merkmale irrationaler Zahlen. Platons Schüler Aristoteles erkannte durch die methodische Analyse logischer Formen den Unterschied zwischen Induktion (von Beobachtungen allgemeine Regeln ableiten) und Deduktion (aus etablierten Annahmen bzw. Axiomen durch logische Schritte folgern).

Darauf aufbauend erklärte Euklid das Prinzip mathematischer Beweise aus axiomatischen Wahrheiten in seinem Werk *Elemente*. Es bildete zwei Jahrtausende lang die Grundlage der Mathematik. Mit ähnlicher Sorgsamkeit verwendete Diophantos von Alexandria Buchstabensymbole für unbekannte Zahlen in Gleichungen: ein wichtiger Schritt zur symbolischen Notation in der Algebra.

Ein Neubeginn im Osten

Der griechische Einfluss wurde schließlich vom Aufstieg Roms überschattet. Für die Römer war die Mathematik eher ein praktisches Werkzeug als ein würdiges Studienthema. Etwa zur gleichen Zeit entstanden in Indien und China jeweils eigene Zahlensysteme. Insbesondere in China erblühte die Mathematik zwischen dem 2. und

5. Jahrhundert n. Chr. vor allem dank Liu Hui, der die klassischen Texte der chinesischen Mathematik überarbeitete und erweiterte. ■