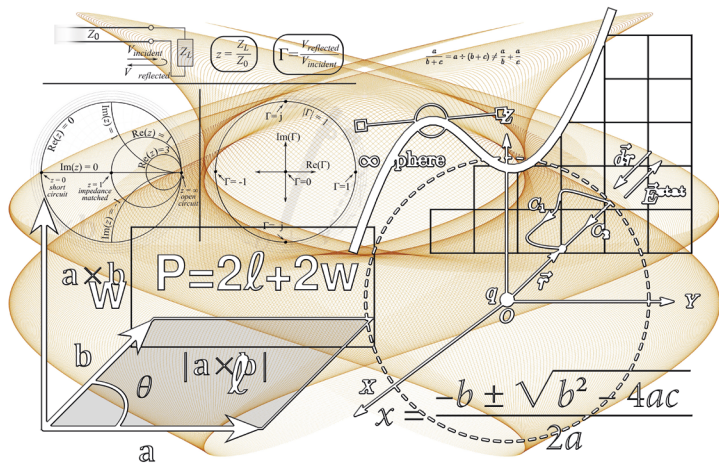




Las matemáticas en la vida real

Introducci3n b3sica al modelamiento matem3tico

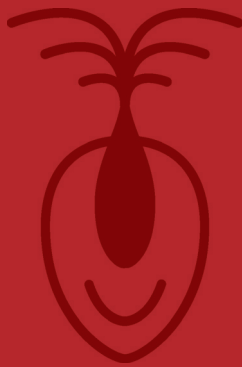
John Jairo Leal G3mez / Juan Pablo Cardona Guío



Direcci3n de Investigaci3n y Extensi3n
Vicerrectori3a
Sede Palmira



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA



Colección
Pacífico



Las matemáticas en la vida real

Introducción básica
al modelamiento matemático

Las matemáticas en la vida real

Introducción básica
al modelamiento matemático

John Jairo Leal Gómez / Juan Pablo Cardona Guío



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Bogotá, D. C., 2020

© Universidad Nacional de Colombia - Sede Palmira
Dirección de Investigación y Extensión
Facultad de Ingeniería y Administración

© John Jairo Leal Gómez, Juan Pablo Cardona Guío
Autores

Primera edición, diciembre de 2020

ISBN 978-958-794-318-4 (papel)

ISBN 978-958-794-319-1 (digital)

Colección Pacífico
Serie Ciencias Básicas
Sede Palmira

Coordinadora editorial - Sede Palmira
Thalía Stephanie Yumbra Ruiz

Edición
Editorial Universidad Nacional de Colombia
direditorial@unal.edu.co
www.editorial.unal.edu.co

Coordinación editorial
Liliana Carolina Guzmán Ríos

Diseño de la colección
Ángela Pilone Herrera

Logo de la colección
Alexander Pereira Mosquera

Diagramación
Francisco Jiménez

Ilustración de cubierta
Gerd Altmann (Pixabay)

Bogotá, D. C., Colombia, 2020

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio
sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales

Impreso y hecho en Bogotá, D. C., Colombia

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Leal Gómez, John Jairo, 1973-

Las matemáticas en la vida real : introducción básica al modelamiento matemático / John Jairo Leal Gómez, Juan Pablo Cardona Guío. -- Primera edición. -- Bogotá : Universidad Nacional de Colombia. Editorial ; Palmira : Universidad Nacional de Colombia. Dirección de Investigación y Extensión. Facultad de Ingeniería y Administración, 2020

1 CD-ROM (146 páginas) : ilustraciones (principalmente a color), diagramas, figuras. -- (Colección Pacífico. Serie Ciencias Básicas)

Incluye referencias bibliográficas e índice temático
ISBN 978-958-794-319-1 (e-book)

1. Cálculo diferencial 2. Números reales 3. Ecuaciones -- Soluciones numéricas 4. Funciones (Matemáticas) 5. Modelado matemático 6. Aplicaciones (Matemáticas) I. Cardona Guío, Juan Pablo, 1971- II. Título III. Serie

CDD-23 515.3 / 2021

Contenido

Prólogo	15
Presentación	17
1. Introducción a los números reales \mathbb{R}	21
1.1 Propiedades de los números reales \mathbb{R}	26
1.2 Solución de ecuaciones con una variable	27
1.3 Desigualdades y operaciones entre conjuntos	33
1.3.1 Tricotomía	33
1.3.2 Desiguadades	33
1.3.3 Definición de desigualdad	33
1.3.4 Intervalos	34
1.3.5 Operaciones entre conjuntos	36
1.4 Inecuaciones	37
1.4.1 Inecuaciones lineales	37
1.4.2 Inecuaciones cuadráticas	38
2. Introducción a las funciones	43
2.1 Las relaciones	45
2.1.1 Definición 2.1 (Pareja ordenada)	45
2.1.2 Definición 2.2 (Producto cartesiano)	46
2.1.3 Definición 2.3 (Relación)	47
2.1.4 Definición 2.4 (Dominio y rango)	47
2.2 Funciones reales	48
2.3 Funciones reales $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	48
2.3.1 Dominio y rango	49
2.3.2 La recta	52
2.3.3 Rectas paralelas	54
2.3.4 Rectas perpendiculares	55
2.3.5 Puntos de intersección	56
2.3.6 La parábola	60
2.3.7 Polinomios	65
2.3.8 Funciones racionales	70



2.3.9	Otras funciones	72
2.3.10	Función exponencial	72
2.3.11	Función logarítmica	73
2.3.12	Función compuesta	77
2.4	Relaciones en \mathbb{R}^2	77
2.5	Funciones vectoriales $\vec{r}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$	81
2.5.1	Segmentos de recta	81
2.5.2	Circunferencia	82
2.5.3	Polinomios	83
2.5.4	Funciones $\vec{r}(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$	84
2.6	Campos escalares: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	86
2.6.1	Dominio y rango	86
2.6.2	Gráficas	88
3.	La derivada	97
3.1	Introducción	99
3.2	Derivada de funciones reales	100
3.2.1	Interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva	101
3.2.2	La derivada como aproximación	104
3.3	Derivadas más generales	105
4.	Modelamiento matemático	109
4.1	Introducción	111
4.2	Aplicaciones de funciones	111
4.2.1	Aplicación de funciones lineales, oferta y demanda en un mercado	112
4.2.2	Aplicación de las funciones parabólicas, caída libre	113
4.2.3	Aplicación de las funciones exponenciales, intereses e inversiones	115
4.2.4	Modelos combinados, curvas de lactancia	116
4.3	Situaciones cotidianas	117
4.3.1	Encender la luz	117
4.3.2	Abrir la llave del agua	118
4.3.3	Crema en el cepillo	119
4.3.4	Sartén al fuego	120
4.4	Modelos físicos	121
4.4.1	Modelos con funciones reales	121

4.4.2 Modelos matemáticos con funciones vectoriales	126
4.4.3 Modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales parciales	127
5. Anexos	129
5.1 Introducción a wxMaxima	131
5.2 Operaciones elementales	133
5.3 Manejo de funciones	135
5.4 Ecuaciones diferenciales ordinarias	138
Referencias	139
Índice temático	143



Lista de figuras

FIGURA 1.1	Recta real \mathbb{R}	24
FIGURA 1.2	Conjunto de los números complejos \mathbb{C}	25
FIGURA 1.3	Intervalo abierto $(-1,2)$	34
FIGURA 1.4	Intervalo cerrado $[-1,2]$	35
FIGURA 1.5	Intervalo semicerrado a la izquierda $[-1, 2)$	35
FIGURA 1.6	Unión de intervalos $(-2,3] \cup (0,4) = (-2,4)$	36
FIGURA 1.7	Intersección de intervalos $(-2,3] \cap (0,4) = (0,3)$	37
FIGURA 1.8	Intersección de intervalos $(3,\infty) \cap (-4,\infty) = (3,\infty)$	39
FIGURA 1.9	Intersección de intervalos $(-\infty,3) \cap (-\infty,-4) = (-\infty,-4)$	39
FIGURA 1.10	La solución de la desigualdad $(x-3)(x+4) \geq 0$ es $x \leq -4$ ó $x \geq 3$	40
FIGURA 1.11	Unión de los intervalos $(-\infty,-4] \cup [3,\infty)$, solución de la desigualdad $(x-3)(x+4) \geq 0$	40
FIGURA 1.12	Solución de la desigualdad $(x-3)(x+4) \geq 0$, $x \in (-\infty,-4] \cup [3,\infty)$	41
FIGURA 2.1	Diagrama de Venn	46
FIGURA 2.2	Plano cartesiano	46
FIGURA 2.3	Dominio y rango de una relación	47
FIGURA 2.4	Relación $y = f(x)$ es función	48
FIGURA 2.5	Relación no es función	49
FIGURA 2.6	Gráfica de la función $y = \frac{1}{2-\sqrt{x-2}}$	51
FIGURA 2.7	Relación $y = mx + b$ representación de la función lineal	53
FIGURA 2.8	Distintas gráficas de líneas rectas	54
FIGURA 2.9	Rectas paralelas trazadas en wxMaxima	55
FIGURA 2.10	Rectas perpendiculares	56
FIGURA 2.11	Parábola abre hacia arriba $a > 0$, abre hacia abajo $-a < 0$	61
FIGURA 2.12	Función parabólica	62
FIGURA 2.13	Parábola $y = -x^2 + x + 2$	63
FIGURA 2.14	Parábola $y = x^2 + x + 1$, cuyas raíces son complejas y, por tanto, no corta el eje x	64
FIGURA 2.15	Gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{10(x-1)}$	70
FIGURA 2.16	Función $f(x) = \frac{x^3-7x+6}{x+1}$	71



FIGURA 2.17	Función exponencial $y = a^x$	72
FIGURA 2.18	Función logarítmica	73
FIGURA 2.19	Función valor absoluto	74
FIGURA 2.20	Función valor absoluto de una función $y = -x^2 + 1 $	75
FIGURA 2.21	Función a trozos	76
FIGURA 2.22	Función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$	76
FIGURA 2.23	Relación $x < y$	78
FIGURA 2.24	Relación $y \geq x^2$	78
FIGURA 2.25	Relación $x^2 + y^2 = r^2$	79
FIGURA 2.26	Relación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	80
FIGURA 2.27	Hipérbola canónica	80
FIGURA 2.28	Segmento de recta dirigido	82
FIGURA 2.29	Circunferencia dirigida	83
FIGURA 2.30	Función vectorial, una variable independiente y varias variables dependientes	84
FIGURA 2.31	Otro ejemplo de función vectorial $\vec{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$	85
FIGURA 2.32	Campo escalar	86
FIGURA 2.33	Dominio de la función $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$	87
FIGURA 2.34	Función $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ realizada con wxMaxima	88
FIGURA 2.35	Gráfica implícita de la función $z^2 = x^2 + y^2$ realizada con wxMaxima	89
FIGURA 2.36	Gráfica implícita de la función $z^2 = x^2 + y^2$ realizada con wxMaxima, escala de colores	89
FIGURA 2.37	Gráfica explícita de la función $z = x^2 + y^2$ realizada con wxMaxima, escala de colores	90
FIGURA 2.38	Gráfica de un hiperboloide cortado con un plano	91
FIGURA 2.39	Función $f(x, y) = x^2 - y^2$	91
FIGURA 2.40	Función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y curvas de contorno xy	92
FIGURA 2.41	Gráfica de contorno de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre el plano xy	93
FIGURA 2.42	Gráfica de contorno de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre el plano yz	94
FIGURA 2.43	Gráfica de contorno de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre el plano xz	94
FIGURA 3.1	Recta tangente a una función en un punto	101
FIGURA 3.2	Recta secante a una función	102

FIGURA 3.3	Recta tangente de la función en el punto x_0	103
FIGURA 3.4	Rectas secante y tangente a una función	104
FIGURA 3.5	Campo escalar, derivada parcial $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$	106
FIGURA 4.1	Curvas de oferta y demanda	113
FIGURA 4.2	Caída libre	115
FIGURA 4.3	Encender la luz	117
FIGURA 4.4	Flujo de agua en función de la posición angular de la llave	118
FIGURA 4.5	Cantidad de crema sobre un cepillo	119
FIGURA 4.6	Sartén al fuego	120
FIGURA 4.7	Solución de la ecuación de población $P(t)$	123
FIGURA 4.8	Curva de temperatura del café $T(t)$	124
FIGURA 4.9	Sistema masa resorte	126
FIGURA 5.1	Pantalla de configuración básica de wxMaxima	132
FIGURA 5.2	Configuración inicial	132
FIGURA 5.3	Función $y = x^2$	136
FIGURA 5.4	Función $z = x^2 - y^2$	137



Prólogo

Modelar matemáticamente se ha convertido en años recientes en garantía de solidez en la comprensión de los más variados fenómenos, y en las diversas áreas del conocimiento, además de garantizar confiabilidad y predictibilidad. Históricamente, la modelación matemática comenzó con el estudio y descripción de los fenómenos cosmológicos y mecánicos, y en pocos siglos permitió la formulación teórica de fenómenos tan diversos como la electricidad y el magnetismo como uno solo —el electromagnetismo—, permitiendo la invención de los motores que, en pocos años, llevaron al mundo a la Revolución Industrial. Ya en el siglo xx, esa “eficacia irracional de las matemáticas en las ciencias naturales”, como la llamó el ingeniero y físico húngaro-americano Eugene Wigner, se había extendido a la economía y otras ciencias sociales, y en nuestro siglo se ha consolidado como una herramienta fundamental en la planeación y descripción de fenómenos que tocan a la vida diaria de casi cualquier persona.

Al mismo tiempo que la importancia del modelamiento matemático ha crecido, el nivel de especialización en los métodos de cálculo utilizados y que involucran máquinas se ha venido incrementando. Desde el punto de vista de la enseñanza, esta evolución representa un reto complejo y permanente, el de transmitir eficientemente las ideas básicas en las que los conceptos matemáticos que usamos están fundamentados, sin dilatar el acceso al uso de estos conceptos en la descripción de situaciones prácticas ni dejar de lado las herramientas de cálculo que nos ayudan a explotar tales métodos eficientemente. Con este reto en mente, los autores han escogido algunas de las aplicaciones que, aunque a primera vista pueden parecer elementales, ilustran la potencia de uno de los conceptos básicos del cálculo en el modelamiento matemático: la noción de *derivada*.

La noción de *derivada* en el análisis matemático, tal como la conocemos hoy, se debe a los matemáticos Isaac Newton y Gottfried Leibniz, quienes ya en el siglo xvii formularon rigurosamente la idea de “cambio infinitesimal”, que dio lugar a lo que hoy llamamos *cálculo diferencial*. Este cálculo se aplica a un amplio rango de objetos, en general, llamados *funciones*, que son la columna vertebral de cualquier modelo matemático y que, a su vez, deben ser entendidos como el lenguaje natural para describir matemáticamente las relaciones que pueden existir entre cantidades abstractas.

