LEHRBUCH

Nikolaus Wolik

Wirtschaftsmathematik

Eine kompakte Einführung für Wirtschaftswissenschaftler

2. Auflage

SCHÄFFER
POESCHEL

Inhaltsverzeichnis

Dozent:innen finden weiterführende Lehrmaterialien unter www.sp-dozenten.de (Registrierung erforderlich).

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de/ abrufbar.

Print:	ISBN 978-3-7910-5304-2	Bestell-Nr. 20632-0002
ePub:	ISBN 978-3-7910-5305-9	Bestell-Nr. 20632-0100
ePDF:	ISBN 978-3-7910-5306-6	Bestell-Nr. 20632-0151

Nikolaus Wolik

Wirtschaftsmathematik

2., überarbeitete Auflage, August 2021

www.schaeffer-poeschel.de

service@schaeffer-poeschel.de

Bildnachweis (Cover): © James Thew, Adobe Stock

Produktmanagement: Alexander Kühn

Lektorat: Adelheid Fleischer

Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart

Ein Unternehmen der Haufe Group

Vorwort zur 2. Auflage

Die Methoden der Mathematik und der Statistik haben ihren selbstverständlichen Platz in den Wirtschaftswissenschaften gefunden. Die Betrachtung wirtschaftswissenschaftlicher Sachzusammenhänge, seien sie betriebswirtschaftlicher oder volkswirtschaftlicher Art, ist ohne Zahlen nicht denkbar. Und wo Zahlen sind, da ist auch Mathematik.

Es ist erfreulich, dass mein Buch zur Wirtschaftsmathematik so gut angenommen wurde, dass eine zweite Auflage erscheinen kann.

Neu hinzugekommen ist ein Kapitel zu den Elastizitäten, die in der ökonomischen Praxis wichtig sind - zudem Änderungen am bestehenden Inhalt.

Während die Bachelorstudiengänge eine wirtschaftswissenschaftliche Grundausbildung vermitteln sollen, die bereits berufsqualifizierend ist, zielen die Masterstudiengänge darauf ab, diese Kenntnisse zu vertiefen und wissenschaftlich zu fokussieren. Infolgedessen sehen sich Mathematiklehrbücher einer besonderen Herausforderung gegenüber, da zu Beginn des Studiums noch nicht klar ist, welche Laufbahn die Studierenden einschlagen. Es gilt, die für die praktischen Erfordernisse nötigen Kenntnisse zu vermitteln, ohne den Weg für aufbauende Studien zu verbauen.

Dieses Buch wird beiden Ansprüchen gerecht. Es vermittelt die zwingend erforderlichen Rechentechniken für die Praxis, ohne das mathematische Fundament und das exakte begriffliche Rüstzeug, das für weitergehende Analysen benötigt wird, zu vernachlässigen.

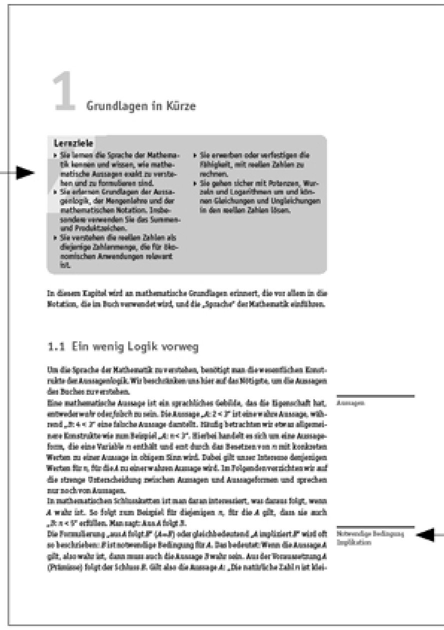
Nach den elementaren Grundlagen in Kapitel 1, das auch der Klärung der verwendeten Notation dient, folgt der weitere Aufbau des Buches der inneren Logik des Stoffes. Kapitel 2, 3 und 4 widmen sich den Grundzügen der Analysis von Funktionen einer Variablen. Kapitel 5 wendet sich dann der Matrizen- und Vektorrechnung zu. Das Unterkapitel 5.2 befasst sich dort mit den Grundzügen der Linearen Algebra und kann ohne größere Verluste für ein erstes Lesen übergangen werden. Die folgenden Unterkapitel bleiben dennoch verständlich und in sich konsistent. Dies trifft auch auf die Kapitel 6 und 7 zu, sofern die Studierenden oder die Lehrenden, die diesen Text zur Grundlage machen, vor allem das praktische Rechnen zum Ziel haben.

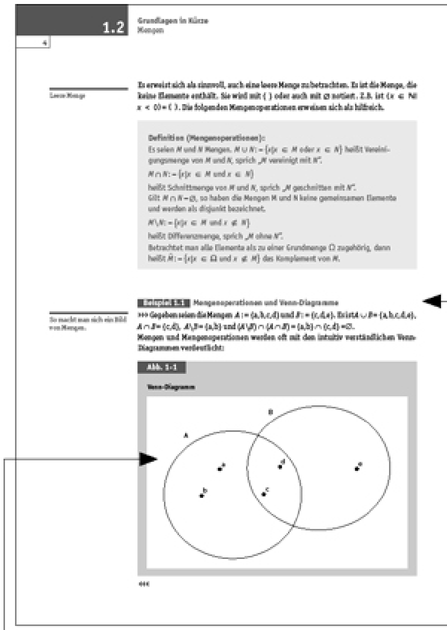
Nikolaus Wolik Unna, Mai 2021

Leserhinweise

Das leserfreundliche Layout dieses Lehrbuchs verdeutlicht die inhaltliche Struktur des Buches, vermittelt Orientierung und erleichtert das Lernen und Arbeiten mit dem Text in vielfältiger Weise.

Lernziele: Jedes Kapitel verfolgt mehrere „Lernziele", die jeweils ganz zu Beginn des betreffenden Abschnitts aufgeführt sind. Diese Lernziele stimmen inhaltlich auf die nun folgenden Themen ein und verweisen auf die zu erwerbenden Kenntnisse und Fähigkeiten.

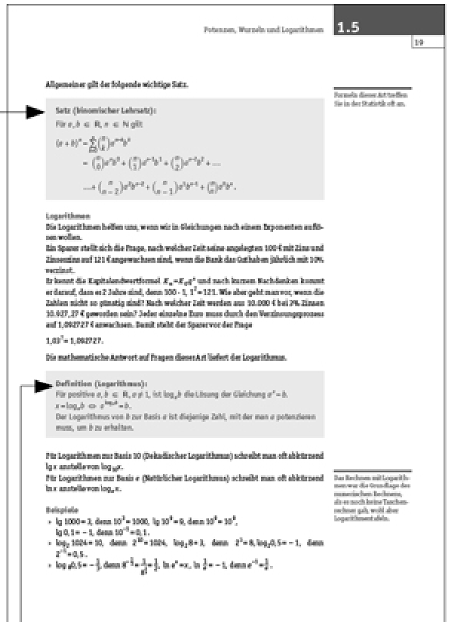


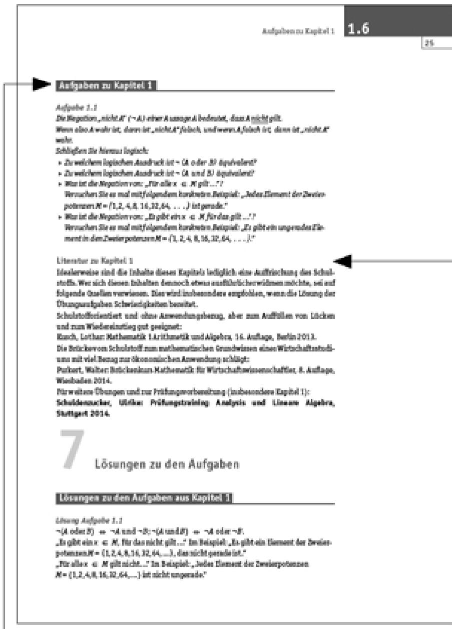


Marginalien: Marginalien direkt neben dem Text führen stichwortartig durch die wesentlichen Inhalte des jeweiligen Kapitels. Sie dienen der ersten Orientierung, und weisen auf besondere inhaltliche Aspekte hin. Darüber hinaus helfen die Marginalien, gesuchte Schlagworte und Themen rasch aufzufinden. Außerdem finden die Studierenden hier in der Randspalte zusätzlichen Platz für eigene Notizen.

Beispiele: Umfangreiche weiterführende Beispiele, die die Anwendung der mathemathischen Methoden zeigen und die Theorie veranschaulichen, sind ebenfalls gesondert hervorgehoben. Sie haben überwiegend ökonomischen Bezug und bereiten die Übungsaufgaben vor.

Abbildungen: Die zahlreichen Abbildungen veranschaulichen und ergänzen die beschriebenen Sachverhalte. Im Text wird jeweils der Zusammenhang mit den zugrundeliegenden Formeln erläutert.





Weiterführende Literatur: Wer sich den Inhalten der einzelnen Kapitel intensiver widmen möchte oder Schwierigkeiten bei der Lösung der Übungsaufgaben hat, sei auf die am Ende jedes Kapitels genannten Quellen verwiesen. Die angeführte Literatur enthält weiterführende Literatur sowie zusätzliche Übungen zur Prüfungsvorbereitung.

Definitionen: Die zentralen mathematischen Definitionen werden in besonders hervorgehobenen Textkästen festgehalten. Sie sind zum gezielten Lernen besonders geeignet.

Sätze: Die wichtigen Lehrsätze werden in blauen Kästen zum schnellen Wiederauffinden und zum einprägsamen Lernen dargestellt.

Aufgaben zu den Kapiteln: Am Ende jedes Kapitels werden mittels zahlreicher Aufgaben alle Lerninhalte aufgegriffen und deren Anwendung eingeübt. Die Lösungen zu den Aufgaben finden Sie am Ende des Buches in Kapitel 7. Bitte berechnen Sie zuerst selbstständig die Aufgaben und schauen erst dann in den Lösungen nach. Der Lerneffekt ist auf diese Weise umso größer. Sollten Sie auf Wissenslücken oder Unsicherheiten stoßen, wird empfohlen, die entsprechenden Abschnitte nochmals genau durchzuarbeiten und zu wiederholen.

1 Grundlagen in Kürze

Lernziele

- Sie lernen die Sprache der Mathematik kennen und wissen, wie mathematische Aussagen exakt zu verstehen und zu formulieren sind.
- Sie erlernen Grundlagen der Aussagenlogik, der Mengenlehre und der mathematischen Notation. Insbesondere verwenden Sie das Summen- und Produktzeichen.
- Sie verstehen die reellen Zahlen als diejenige Zahlenmenge, die für ökonomischen Anwendungen relevant ist.
- Sie erwerben oder verfestigen die Fähigkeit, mit reellen Zahlen zu rechnen.
- Sie gehen sicher mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen um und können Gleichungen und Ungleichungen in den reellen Zahlen lösen.

In diesem Kapitel wird an mathematische Grundlagen erinnert, die vor allem in die Notation, die im Buch verwendet wird, und die „Sprache“ der Mathematik einführen.

1.1 Ein wenig Logik vorweg

Um die Sprache der Mathematik zu verstehen, benötigt man die wesentlichen Konstrukte der Aussagenlogik. Wir beschränken uns hier auf das Nötigste, um die Aussagen des Buches zu verstehen.

Aussagen

Eine mathematische Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das die Eigenschaft hat, entweder *wahr* oder *falsch* zu sein. Die Aussage „A: $2 < 3$" ist eine wahre Aussage, während „B: $4 < 3$" eine falsche Aussage darstellt. Häufig betrachten wir etwas allgemeinere Konstrukte wie zum Beispiel „A: $n < 3$". Hierbei handelt es sich um eine Aussageform, die eine Variable n enthält und erst durch das Besetzen von n mit konkreten Werten zu einer Aussage in obigem Sinn wird. Dabei gilt unser Interesse denjenigen Werten für n, für die A zu einer wahren Aussage wird. Im Folgenden verzichten wir auf die strenge Unterscheidung zwischen Aussagen und Aussageformen und sprechen nur noch von Aussagen.

In mathematischen Schlussketten ist man daran interessiert, was daraus folgt, wenn A wahr ist. So folgt zum Beispiel für diejenigen n, für die A gilt, dass sie auch „B: $n < 5$" erfüllen. Man sagt: Aus A folgt B.

Notwendige Bedingung Implikation

Die Formulierung „aus A folgt B" ($A \Rightarrow B$) oder gleichbedeutend „A impliziert B" wird oft so beschrieben: B ist notwendige Bedingung für A. Das bedeutet: Wenn die Aussage A gilt, also wahr ist, dann muss auch die Aussage B wahr sein. Aus der Voraussetzung A (Prämisse) folgt der Schluss B. Gilt also die Aussage A: „Die natürliche Zahl n ist kleiner als drei", dann ist notwendigerweise auch die Aussage B: „Die natürliche Zahl n ist kleiner als fünf" richtig. Die Formulierung „B ist notwendige Bedingung für A" wird aus der logischen Gegenposition klar. Wenn n <u>nicht</u> kleiner als fünf ist, dann kann n auch <u>nicht</u> kleiner als drei sein.

Allerdings muss die Umkehrung nicht gelten: Wenn offenbar gilt: (A: $n < 3 \Rightarrow B$: $n < 5$), muss eine Zahl, die B erfüllt, z.B. die 4, nicht auch A erfüllen.

Hinreichende Bedingung Äquivalenz

Wenn das allerdings der Fall ist, ist B nicht nur notwendige Bedingung für A sondern auch hinreichend dafür, A vollständig zu charakterisieren. Immer wenn B richtig ist, muss auch A gelten: $B \Rightarrow A$. Man sagt B ist auch hinreichend für A. In diesem Fall gelten also $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ gleichzeitig und man sagt: A ist *äquivalent* zu B ($A \Leftrightarrow B$) oder „A gilt *genau dann*, wenn B gilt" oder auch „A gilt *dann und nur dann*, wenn B gilt." Für $x \in \mathbb{R}$ gilt beispielsweise $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Die Äquivalenz fasst also zusammen, dass $x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$ und auch umgekehrt $-2 < x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ gilt.

Das logische „und"

Die letzte Formulierung wirft ein Schlaglicht auf die Bedeutung der mathematischen Formulierung „*und*". „*Dann <u>und</u> nur dann*" bedeutet, dass ($A \Rightarrow B$) *<u>und</u>* ($B \Rightarrow A$) beide denselben logischen Wert erhalten. Wenn die linke Implikation gilt, dann muss auch die rechte Implikation richtig sein; wenn die linke Implikation nicht richtig ist, dann muss auch die rechte Implikation falsch sein. Wird also die Aussage C mit der Aussage D durch die logische Verknüpfung „*und*" zu einer neuen Aussage (C *<u>und</u>* D) zusammengefasst, so ist diese nur wahr, wenn jeweils C <u>und</u> D wahr sind. Die mathematischen Formulierung (C *<u>und</u>* D) ist streng; ihre Gültigkeit verlangt, dass beide Teilaussagen wahr sind, ansonsten ist sie falsch.

Das logische „oder"

Die mathematische Formulierung „*oder*“ ist toleranter. Die Aussage (*n* ist gerade *oder* *n* ist ungerade) ist wahr, sofern auch nur eine der beiden Teilaussagen wahr ist. Manchmal sind auch beide Teilaussagen richtig: ($3 < 5$ *oder* $4 < 5$). Auch dies ist logisch wahr. Mindestens eine der beiden Teilaussagen muss wahr sein, damit die Oder-Verknüpfung wahr ist.

„*Mindestens*“ über eine Anzahl von Aussagen formuliert, ist die bescheidene Forderung, dass nur eine dieser Aussagen wahr sein muss; es können allerdings mehrere oder sogar alle Aussagen wahr sein. Die Formulierung „*alle*“ ist strikter. Sie verlangt, dass jede der Teilaussagen gilt.

Existenzaussage

Hierauf bezieht sich die mathematische Formulierung „*es existiert*“ oder „*es gibt*“. „Es existiert eine gerade natürliche Zahl“ heißt immer: Es gibt mindestens eine natürliche gerade Zahl. Dabei wird offen gelassen, ob es nicht auch mehrere gerade natürliche Zahlen gibt. Im vorliegenden Fall existieren sogar unendlich viele.

All-Aussage

Auf der anderen Seite gilt die Aussage „Alle natürlichen Zahlen sind gerade“ nicht, denn z.B. 3 ist nicht gerade. Da die Aussage über alle natürlichen Zahlen getroffen wurde, ist sie falsch. Ein einziges Gegenbeispiel reicht aus, die All-Aussage zu widerlegen.

Beweis

Dies führt uns zum Begriff des mathematischen Beweises. In ihm wird aus Voraussetzungen über eine Aneinanderreihung von Folgerungen oder Äquivalenzen eine Schlussfolgerung (ein mathematischer Satz) hergeleitet. Dies wird oft durch Beispiele verdeutlicht. Wichtig aber ist: Jedes Beispiel belegt den Beweis, aber das Beispiel kann ihn nicht ersetzen. Jedoch widerlegt auch nur ein einziges Gegenbeispiel den Satz. Denn dieser formuliert letztlich: Immer wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, gilt…

1.2 Mengen

Der Begriff der Menge ist grundlegend für die Mathematik. Er reflektiert die Fähigkeit des Menschen, eine Zusammenfassung von Objekten als ein Ganzes zu betrachten. In der Wirtschaftsstatistik bezeichnet der sogenannte Warenkorb mathematisch gesehen eine Menge. Der Warenkorb ist eine Zusammenstellung einer möglichst repräsentativen Auswahl von nachgefragten Waren und Dienstleistungen und umfasst ca. 700 Elemente, deren Preise mit Gewichten versehen werden, um daraus eine Messzahl für die Inflation zu berechnen.

Definition (Menge):

Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Die Definition der Menge ist sehr allgemein gehalten. Sie beschränkt uns nicht auf die Betrachtung von Zusammenfassungen dinglicher Objekte, sondern erlaubt auch die Mengenbildungen über abstrakte Konstrukte wie z.B. die Menge der ganzen Zahlen. Dabei bedeutet der Begriff „Zusammenfassung“, dass es auf die Betrachtung der Reihenfolge der Objekte nicht ankommt.

„Wohlunterschieden“ drückt aus, dass es keinen Sinn macht, in einer Menge auch identische Objekte zusammenzufassen. Die Objekte einer Menge werden Elemente genannt. Man schreibt $2 \in \mathbb{N}$ (lies 2 ist Element der Menge der natürlichen Zahlen), um zu verdeutlichen, dass die 2 zur Menge der natürlichen Zahlen gehört. Entsprechend notiert man $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, um zu verdeutlichen, dass $\frac{1}{2}$ nicht zu den natürlichen Zahlen gehört. Wesentlich für diesen auf Georg Cantor, den Begründer der Mengenlehre, zurückgehenden Mengenbegriff ist es, dass man von den Objekten stets entscheiden kann, ob sie ein Element der betrachteten Menge sind oder nicht.

Beschreibung von Mengen

Zur Beschreibung einer Menge benutzt man oft die Aufzählung in Mengenklammern. $A: = \{1,2,3\}$[1] ist die Menge der natürlichen Zahlen 1,2 und 3. Im Vertrauen darauf, dass das Bildungsgesetz hinreichend klar wird, kann man auch unendlich große Mengen beschreiben: $\mathbb{N}: = \{1,2,3,4,5,.....\}$ soll (wenn auch wenig exakt) die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen. Häufig werden Mengen auch etwas formaler beschrieben: $\{x \in \mathbb{N} | 1 \leq x \leq 3\}$ bezeichnet ebenfalls die Menge A. Bei der Definition einer Menge kommt es also nicht auf die Art und Weise der Beschreibung an, insbesondere ist die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente einer Menge unerheblich: $\{1,2,3,4\} = \{4,2,3,1\}$.

Teilmenge

Die obige Menge A ist Teil der natürlichen Zahlen. Man sagt allgemein, dass A eine Teilmenge der Menge B darstellt, wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$, und schreibt $A \subseteq B$.

Leere Menge

Es erweist sich als sinnvoll, auch eine leere Menge zu betrachten. Es ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie wird mit {} oder auch mit $\emptyset$ notiert. Z.B. ist $\{x \in \mathbb{N} | x < 0\} = \{\}$. Die folgenden Mengenoperationen erweisen sich als hilfreich.

Definition (Mengenoperationen):

Es seien M und N Mengen. $M \cup N := \{ x | x \in M$ oder $x \in N\}$ heißt Vereinigungsmenge von M und N, sprich „M vereinigt mit N".

$M \cap N := \{x | x \in M$ und $x \in N\}$

heißt Schnittmenge von M und N, sprich „M geschnitten mit N".

Gilt $M \cap N = \emptyset$, so haben die Mengen M und N keine gemeinsamen Elemente und werden als disjunkt bezeichnet.

$M \setminus N := \{ x | x \in M$ und $x \notin N\}$

heißt Differenzmenge, sprich „M ohne N".

Betrachtet man alle Elemente als zu einer Grundmenge Ω zugehörig, dann heißt $\overline{M} := \{ x | x \in \Omega$ und $x \notin M\}$ das Komplement von M.

Beispiel 1.1 Mengenoperationen und Venn-Diagramme

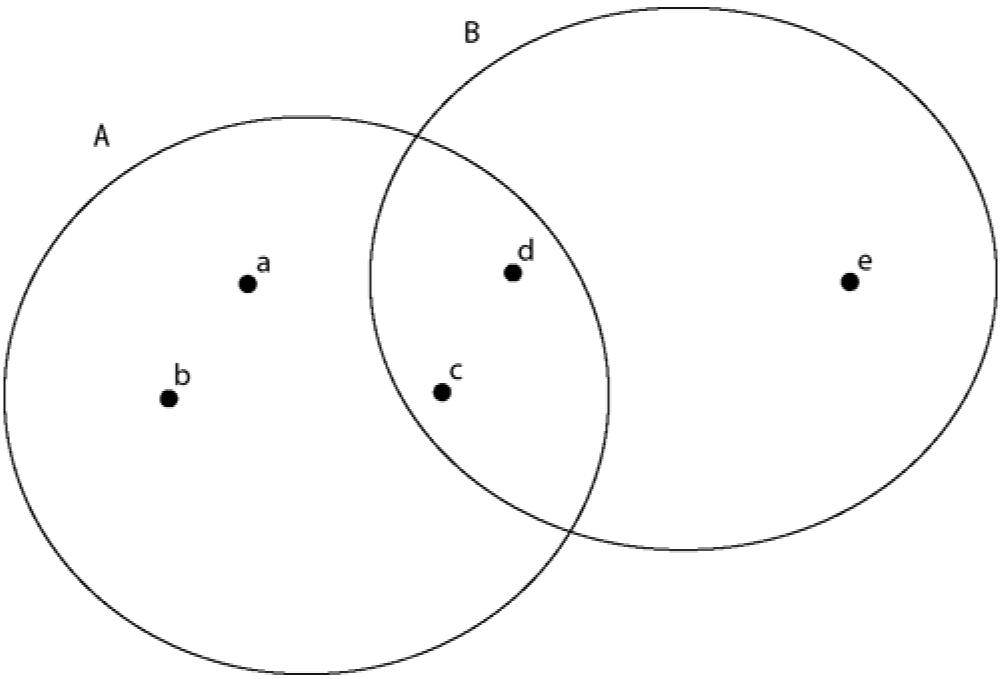
So macht man sich ein Bild von Mengen.

▶▶▶ Gegeben seien die Mengen $A := \{a,b,c,d\}$ und $B := \{c,d,e\}$. Es ist $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$, $A \cap B = \{c,d\}$, $A \setminus B =$

{a,b} und ($A \setminus B$) ∩ ($A ∩ B$) = {a,b} ∩ {c,d} =∅.

Mengen und Mengenoperationen werden oft mit den intuitiv verständlichen Venn-Diagrammen verdeutlicht:

Abb. 1-1 Venn-Diagramm



◂◂◂

Eine weitere Mengenoperation, das kartesische Produkt, geht auf den Mathematiker und Naturphilosophen Descartes (Lat. Cartesius) zurück.

Definition (Kartesisches Produkt):

Das kartesische Produkt der nichtleeren Mengen X_i, (i = 1, …,n) ist die Menge $X_1 \times X_2 \times \dots X_n$: = { ($x_1$, x_2,..., x_n)|$x_i \in X_i$, i = 1,..., n}.

(x_1, x_2, …, x_n) heißt das aus den X_i gebildete n-Tupel. Ein einzelnes x_i wird i-te Komponente des n-Tupels genannt.

n-Tupel sind geordnet, das heißt, hier kommt es auf die Reihenfolge der Komponenten an: $(a, b) \neq (b, a)$. Daher nennt man 2-Tupel in der Regel geordnete Paare. Tripel und Quadrupel sind ebenfalls gängige Bezeichnungen für Tupel mit drei und vier Komponenten.

Beispiel 1.2 Kartesisches Produkt zweier Mengen

Schachbrett

Gegeben seien die Mengen $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Dann ist das kartesische Produkt

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (a,1), & (a,2), & \ldots\ldots & (a,7), & (a,8), \\ (b,1), & (b,2), & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (b,8), \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (h,1), & (h,2) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (h,8) \end{matrix} \right\}.$$

Üblich für die Notation einer Menge ist die beliebige Aufzählung der Elemente. Die hier getroffene Anordnung soll suggerieren, dass dieses kartesische Produkt das mathematische Abbild eines Schachbrettes darstellen könnte, sofern man auf die Unterscheidung von schwarzen und weißen Feldern verzichtet.

Geordnete reelle Paare

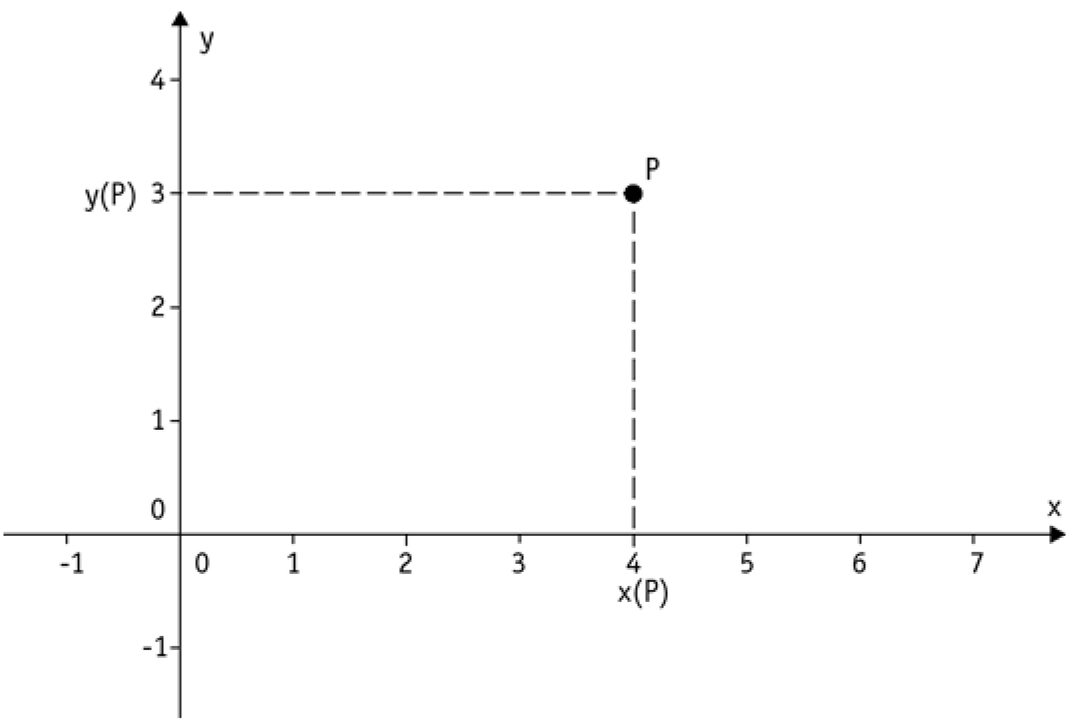
Häufig ist eine ökonomische Größe nicht von einer einzelnen reellen Zahl abhängig. So hängt zum Beispiel die Nachfrage nach einem Gut nicht nur allein von dessen Preis p ab, sondern auch vom Budget B des Konsumenten. In diesem Fall fasst man die beiden relevanten Parameter zu einem Paar (p, B) zusammen. Belegt man die Parameter mit konkreten Zahlen, so erhält man ein geordnetes Paar reeller Zahlen.

Führt man ein Koordinatensystem ein, dann können solche Paare wie z.B. das Paar $(x, y) = (1,2)$ mit einem Punkt P in der Ebene identifiziert werden (siehe Abb. 1-2).

Ein Punkt P besitzt somit eine *x*- und eine *y*-Koordinate.

Die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^2$. Offensichtlich ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ das kartesische Produkt von $\mathbb{R}$ mit sich selbst. Dies erklärt auch den bekannten Begriff „kartesisches Koordinatensystem“.

Abb. 1-2 Die reelle Zahlenebene



So rechnet man mit Mengen.

Abschließend nennen wir einige Gesetzmäßigkeiten, die im Zusammenhang mit Mengenoperationen nützlich sind.

Satz (Mengenoperationen):

M, N und P seien beliebige Mengen. Dann gilt

Idempotenzgesetz:	$M \cap M = M \cup M = M$
Kommutativgesetz:	$M \cap N = N \cap M$
	$M \cup N = N \cup M$
Assoziativgesetze:	$M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$
	$M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$
Distributivgesetze:	$M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$
	$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$

Die Gültigkeit dieser Gesetzmäßigkeiten sieht man schnell unter Verwendung von Venn-Diagrammen ein. (Aufgabe!)

1.3 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

Mithilfe der natürlichen Zahlen werden wir in die Lage versetzt, Mengen abzuzählen:

$\mathbb{N}: = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$.

Die natürlichen Zahlen sind (u.a.) dadurch charakterisiert, dass 1 eine natürliche Zahl ist und jede natürliche Zahl *n* einen Nachfolger *n+1* besitzt. Die kleinste natürliche Zahl ist die 1. Sie ist die einzige natürliche Zahl, die keinen natürlichen Vorgänger besitzt.

Ein sehr wichtiges Prinzip in der Mathematik

Hierauf beruht das Prinzip der vollständigen Induktion:

Weiß man, dass eine Behauptung *A(n)*

- für $n = 1$ richtig ist (Induktionsverankerung), und folgt aus logischen Gründen:

- Sofern *A(n)* für ein beliebiges *n* richtig ist (Induktionsvoraussetzung), dann ist auch *A(n+1)* richtig (Induktionsschluss),
- dann ist die Behauptung für jedes *n* korrekt.

Beispiel 1.3 Vollständige Induktion

▸▸▸ Man kann durch direktes Nachrechnen nachweisen, dass folgendes richtig ist:

Die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen ist *n* zum Quadrat. Stellen wir uns vor, dass wir das nicht wüssten, sondern durch Beobachten und Ausprobieren lediglich vermuten würden. Dann könnten wir diese Vermutung auf die folgende Art und Weise bestätigen:

Induktionsverankerung: $1 = 1^2$ ist sicherlich korrekt.

Induktionsvoraussetzung: *Nehmen wir an*, dass die Behauptung für beliebiges *n* richtig ist:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{n\ \text{Zahlen}}=n^2.$$

Induktionsschluss: Dann zeigt die nachfolgende Rechnung, dass die Behauptung auch für $n + 1$ gelten muss:

$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.

Damit aber muss unsere Vermutung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für jede natürliche Zahl zutreffen. ◂◂◂

Fügen wir den natürlichen Zahlen die Null zu, erhalten wir

$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die natürlichen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Addition. Das bedeutet: Wenn man zwei beliebige natürliche Zahlen addiert, erhält man wieder eine natürliche Zahl.

Ganze Zahlen

Fügt man den natürlichen Zahlen die negativen natürlichen Zahlen hinzu, erhält man die Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0$.

In den ganzen Zahlen sind auch die Subtraktion und die Multiplikation abgeschlossen, nicht aber die Division. Hierfür benötigt man die Brüche.

Venezianische Kaufleute benutzten die negativen Zahlen, um Guthaben von Schulden unterscheiden zu können.

Rationale Zahlen

Die Brüche oder auch rationalen Zahlen sind definiert durch

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{z}{n} \middle| z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$

Der Nenner eines Bruches darf offensichtlich nicht null sein. Das wissen wir seit der frühesten Schulzeit: „Durch null darf man nicht teilen!“ Aber warum eigentlich nicht? Die folgende „Rechnung“ macht deutlich, dass die Mathematik ins Chaos führte, würde man das zulassen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \cdot 2 \,|\, :0? \\ ?1 &= 2? \end{aligned}$$

Brüche bilden die rationalen Zahlen.

Viele Fragestellungen des täglichen Lebens lassen sich durch die Berechnungen im Bereich der Brüche lösen.

Rechenregeln für Brüche:

Zwei Brüche werden addiert, indem man sie gleichnamig macht und die Zähler addiert:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dessen Kehrwert multipliziert:

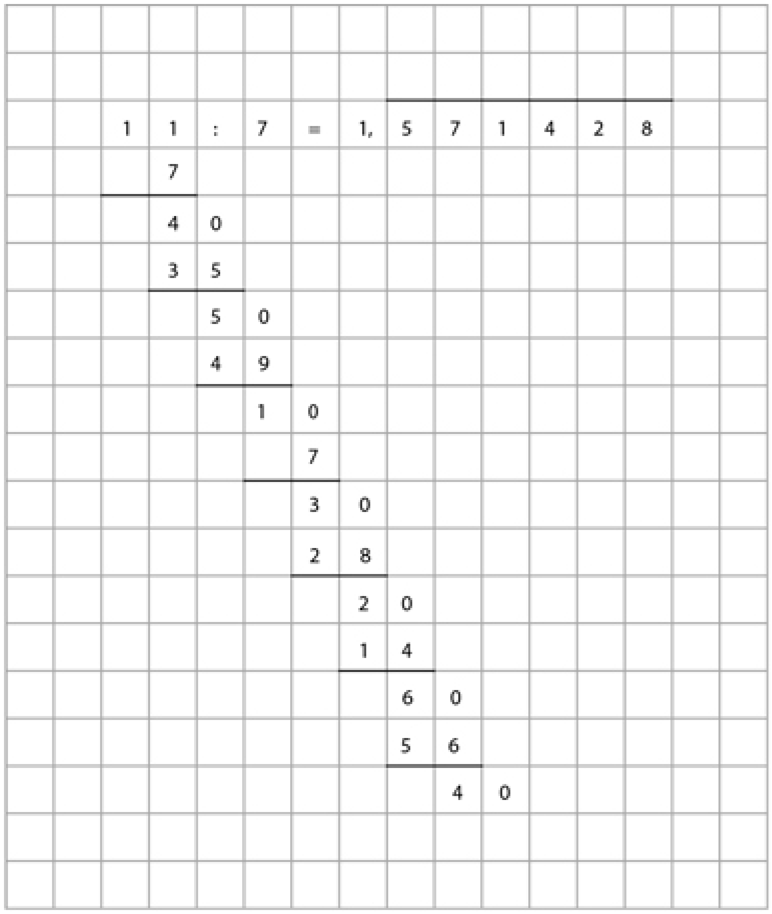
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Reelle Zahlen

Bereits die alten Griechen entdeckten, dass sich nicht alles in der Mathematik durch Proportionen, also Brüche, ausdrücken lässt. Schon Euklid bewies (ca. 300 v. Chr.!), dass nicht jede Zahl (eigentlich jedes Verhältnis von geometrischen Längen) als Bruchzahl darstellbar ist. Es existieren Zahlen, die eine nichtendliche und nichtperiodische Dezimaldarstellung besitzen wie zum Beispiel

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$ und die Kreiszahl $\pi = 3{,}14159265358\ldots.$

Abb. 1-3 Division, periodische Zahlen



Für uns ist dieser Umstand leichter einsehbar, weil wir das dezimale Zahlensystem kennen. Wir wissen, dass sich jeder Bruch als Dezimalzahl schreiben lässt, die entweder endlich oder periodisch ist. Zum Beispiel ist $\frac{1}{2}=0{,}5$ und $\frac{1}{3}=0{,}\bar{3}$. Der nachfolgende Fall ist komplizierter und vermittelt uns durch das handschriftliche Dividieren eine tiefere Einsicht.

Wir erkennen die beiden Möglichkeiten, die bei der Division auftauchen können:

1. Bei der Division $\frac{z}{n}$ ist der Divisionsrest irgendwann null und die Dezimaldarstellung bricht ab.

2. Bei der Division $\frac{z}{n}$ bleiben Divisionsreste *r* mit 0 < *r* < *n*. Spätestens im *n*-ten Schritt ist der also bereits einmal vorgekommen und die Rechenschritte wiederholen sich periodisch.
3. Im Beispiel der Abb. 1-3 ist die maximal mögliche Periodenlänge 6 erreicht, die bei der Division durch 7 möglich ist.
4. Umgekehrt kann man jede Dezimalzahl in einen Bruch verwandeln. Dies ist klar für endliche Dezimaldarstellungen: $11{,}71=\frac{1171}{100}$. Für periodische Dezimalzahlen sieht man das mit folgender Rechnung ein:

$$\begin{aligned} x &= 1{,}\overline{571428} \\ 1000000x &= 1571428{,}\overline{571428} \qquad |-x=-1{,}\overline{571428} \\ 999999x &= 1571427 \\ x &= \frac{1571427}{999999} \end{aligned}$$

Es gibt jedoch Zahlen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, die Nicht-Bruch-Zahlen oder auch irrationalen Zahlen. Die folgende Dezimalzahl ist weder abbrechend noch periodisch:

1,101001000100001000001000000100000001.....

Vor jeder Eins wird im Nachkommabereich stets einfach eine Null mehr eingefügt als bei der vorausgegangenen Eins. Nach diesem Muster erhält man offensichtlich eine unendliche Dezimaldarstellung, die auch nicht periodisch ist. Es kann sich also, so weit wir jetzt wissen, nicht um eine Dezimaldarstellung eines Bruches handeln. Und doch gibt es diese Zahl.

Rational vereinigt mit irrational ergibt reell.

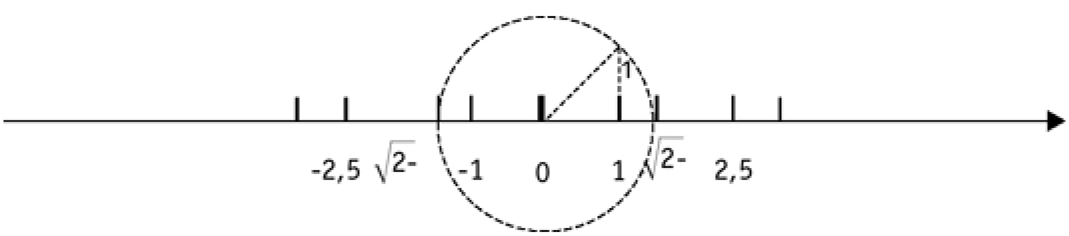
Die alten Griechen entdeckten die irrationalen Zahlen u.a. in der Zahl $\sqrt{2}$. Da wir als Ökonomen oft auf Gleichungen treffen, die Potenzen und Wurzeln enthalten, ist es auch für ökonomische Zwecke erforderlich, damit rechnen zu können.

Fassen wir die irrationalen Zahlen $\mathbf{I}$ mit den Brüchen $\mathbb{Q}$ zusammen, dann erhalten wir die reellen Zahlen

$\mathbb{R}: = \mathbb{Q} \cup \mathbf{I}$.

Der Zahlbereich der reellen Zahlen kann mithilfe der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Hierbei handelt es sich um eine Gerade, auf der man die Null positioniert. Links davon befinden sich dann die negativen reellen Zahlen $x < 0$ und rechts davon die positiven reellen Zahlen $x > 0$.

Abb. 1-4 Die reelle Zahlenachse



Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlengeraden. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Zahlengeraden einer reellen Zahl. Da der abgebildete Kreis nach dem Satz des Pythagoras den Radius $\sqrt{2}$ hat, belegt Abb. 1-3, dass auf der Zahlengeraden auch die irrationalen Zahlen Ihren Platz finden.

Es gilt

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Teilmengen der reellen Zahlen

In den ökonomischen Anwendungen ist es selten erforderlich, die gesamte Menge der reellen Zahlen zu betrachten. In der Regel reicht es aus, sich auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu beschränken.

Diese Definitionen erscheinen lästig, sind aber tatsächlich höchst hilfreich.

Definition (reelle Intervalle):

Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sind Intervalle zusammenhängende Teile der reellen Zahlenachse:

$[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	ist ein abgeschlossenes Intervall.
$(a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	ist ein offenes Intervall.
$[a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	heißt rechtsoffenes Intervall.
$(a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	heißt linksoffenes Intervall.

Es bezeichnet

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$	die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_{++} := (0, \infty)$	die Menge der positiven reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$	die Menge der nichtpositiven reellen Zahlen,
$\mathbb{R}_{--} := (-\infty, 0)$	die Menge der negativen reellen Zahlen.

Ein offenes Intervall kann auch als eine Epsilon-Umgebung um seinen Mittelpunkt verstanden werden:

Für $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ die Epsilon-Umgebung von a.

Die ε-Umgebung wird uns noch hilfreiche Dienste bei der Betrachtung von Grenzwerten leisten; sie ist das wohl wichtigste Konstrukt in der Analysis.

1.4 Summe und Produkt