



Dirk Brockmann-Behnsen

Kompetenzsteigerung im Argumentieren durch ein gezieltes Training im Unterricht

Ergebnisse der Langzeitstudie
HeuRekAP

WAXMANN

Dirk Brockmann-Behnsen

Kompetenzsteigerung im Argumentieren durch ein gezieltes Training im Unterricht

Ergebnisse der Langzeitstudie HeuRekAP



Waxmann 2021
Münster • New York

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der Gottfried Wilhelm Leibniz
Universität Hannover genehmigte Dissertation zur Erlangung des akademischen
Grades Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.).

Bibliografische Informationen der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im
Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Print-ISBN 978-3-8309-4376-1

E-Book-ISBN 978-3-8309-9376-6

© Waxmann Verlag GmbH, 2021

www.waxmann.com

info@waxmann.com

Umschlaggestaltung: Anne Breitenbach, Münster

Titelbild: © Dirk Brockmann-Behnsen

Druck: CPI books GmbH, Leck

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier, säurefrei gemäß ISO 9706



Printed in Germany

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des
Verlages in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung
elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist am Institut für die Didaktik der Mathematik und Physik der Leibniz Universität Hannover als Dissertation verfasst worden. Sie ist das Ergebnis eines langjährigen Forschungsprozesses. Allein die zugrunde liegende Feldstudie umfasste inklusive Vor- und Nachbereitung einen Zeitraum von knapp drei Jahren. Für das Gelingen dieser Arbeit gilt vielen Personen mein Dank:

Meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Thomas Gawlick, danke ich dafür, dass er mir die Möglichkeit zur Anfertigung dieser Arbeit gab, für die vielen anregenden und interessanten Gespräche und dafür, dass er nie aufgab, mich durch tiefgreifendes Nachfragen und intelligente Kritik zu einem besseren Wissenschaftler zu machen.

In gleicher Weise bedanke ich mich bei meinen beiden weiteren Gutachtern, Herrn Prof. Dr. Benjamin Rott und Herrn Prof. Dr. Frank Heinrich, die mir stets freundlich zugewandt waren, mich motivatorisch unterstützten und meine Arbeit durch viele fachliche Ratschläge wesentlich verbessern konnten, sowie bei Herrn Prof. Dr. Stefan Weber für die sehr angenehme Gestaltung der Verteidigung, als deren Vorsitzender er fungierte.

Einen herzlichen Dank für die konstruktive Mitarbeit und den ungezwungenen Umgang miteinander sage ich allen Kolleginnen und Kollegen, die am HeuRekAP-Projekt mitgearbeitet haben. Speziell danke ich meinen Mitdotorandinnen und Mitdotoranden Diemut, Benjamin, Elisabeth und Knut sowie meinem Kollegen Winfried, ohne deren fachliche und aufmunternde Hilfe diese Arbeit niemals hätte gelingen können und die mir überdies zu Freunden wurden.

Allen teilnehmenden Schülerinnen und Schülern danke ich sehr dafür, dass sie sich den Lerninhalten des HeuRekAP-Projektes und den Erhebungsmodalitäten der Studie überwiegend aufgeschlossen und zugewandt gezeigt haben und meine Forschung auf diese Weise überhaupt erst ermöglicht haben.

Hannover, im Frühjahr 2021

Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter am Projekt HeuRekAP



Projektleiter

Thomas Gawlick

Wissenschaftlicher Leiter

Dirk Brockmann-Behnsen

Wissenschaftliche Berater

Hans-Jürgen Elschenbroich
Hartmut Müller-Sommer

Wissenschaftliche Hilfskräfte

Susanne Begerow
Michael Schnerre

André Grohnert

Alina Balzer
Anna Witte

Alexander Schulteis

Stephanie Deermann

Ron Frenzel

Ann-Christin Mix
Wolfgang Soyta

Team K10P

Philipp Thalmann
Linda Breidenbroich
Larissa Korte

Unterrichtsqualitätsmessung

Denis Kavurmaci
Gerald Kühn
Florian Schimetzek

Bestimmung der IRR

Bernadette Aselmeyer
Friederike Könneker
Philipp Homfeld



Dedicatio

Meine Dissertation widme ich allen mir zugeneigten Menschen:

voran meiner Gattin Bianca, der mir Einen – zugleich Geliebte, Gefährtin (in den neun Welten ;-)) und innigste Freundin,

meiner Mutter Ursel, die mich in diese Welt brachte und mir durch ihre Liebe, Sorge und Führung die notwendigen Voraussetzungen für ein glückliches Leben schenkte,

meinem Vater Horst, der mich auf gemeinsamen Wanderungen durch die Alpen in die großartigen Wunder der Natur einführte,

meiner Schwester Silke für ihre liebevolle Zugewandtheit und den gemeinsamen Humor, der jedes Gespräch zur Freude macht,

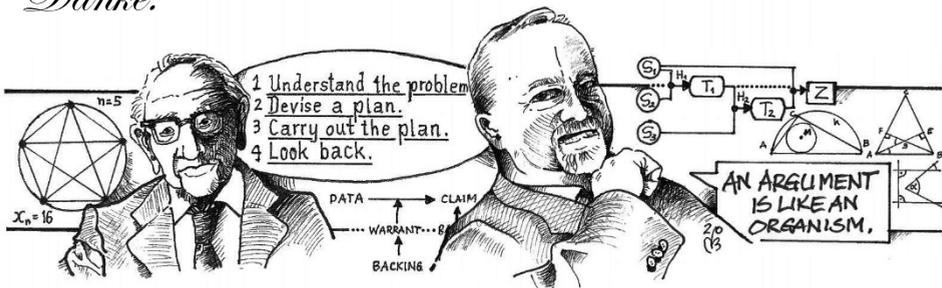
meiner Oma „Tasche“, die mich den Wert der Familie lehrte – jener edlen Gemeinschaft aus Vor- und Nachfahren, die unsere Lebenslinie im weiten Lauf der Geschichte zeichnen,

meinen vier Kindern Jan Thieß, Selina, Lif Bjarne und Freya, die mich stets zuverlässig aus den Widrigkeiten des Alltags heraus und hinein in den sorgenfreien Kosmos der Kindheit retten,

meinen Freunden dafür, dass sie mir durch ihre Individualität, ihre Ehrlichkeit und ihr Interesse eine Heimstatt geben und meinen Horizont beständig erweitern,

schließlich all jenen, die ich in dieser Aufzählung nicht einzeln bedachte, die mir deshalb aber nicht weniger teuer sind.

Danke.



Kurzzusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt eine Langzeitstudie, die in vier achten, später neunten Klassen eines hannoveraner Gymnasiums durchgeführt wurde. Untersucht wurde, inwiefern sich die Argumentationsqualität der Schüler nach einem eineinhalbjährigen kontinuierlichen Training, das zwei der Klassen in unterschiedlichen Varianten erhielten, im Vergleich zu den beiden anderen, nicht trainierten Klassen verbessert. Dazu wurden allen Schülerinnen und Schülern in regelmäßigen Abständen Probleme mit starkem Begründungsanteil vorgelegt. Zur Untersuchung wurden aus allen vier Klassen Matched Samples mit je 23 Schülerinnen und Schülern gebildet.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird zunächst der Begriff des *Argumentierens* aus unterschiedlichen Perspektiven detailliert analysiert. Aus einer Skizze der historischen Entwicklung heraus wird nach einer Definition gesucht, die das Argumentieren vor allem zu den artverwandten Begriffen des Begründens und Beweisens in Beziehung stellt. Das Beweisen wird dabei als strenge Form des Argumentierens verstanden. Danach werden literaturbasierte Modelle vorgestellt, mit denen die zeitliche und qualitative Entwicklung beim Erlernen von Argumentieren und Beweisen vor allem unter kognitionspsychologischen Aspekten beschrieben werden. Dies ist eine wichtige Grundlage für die Entwicklung der Trainingsvarianten zum Argumentieren. Darauf folgend werden repräsentative Darstellungen für Argumentationen bzw. Beweise als Endprodukte des Beweisprozesses vorgestellt. Darauf aufbauend wird ein eigenes Repräsentationssystem entwickelt, mit dessen Hilfe die schriftlich dargelegten Argumentationen der Schüler in ein standardisiertes Format gebracht werden können. Weiterhin wird theoriegeleitet ein eigenes Modell entwickelt, das den anatomischen Aufbau einer Argumentation bzw. eines Beweises darstellt und auf Toulmins „Layout of Arguments“ basiert.

Im zweiten Teil der Arbeit werden die Forschungsfragen entwickelt, die sich aus den theoretischen Überlegungen ergeben haben. Sie ordnen sich in drei Bereichen an: Neben (1) Fragen zur Ausgestaltung der Trainingsvarianten und deren Implementierbarkeit in den Unterricht gibt es (2) Fragen bzgl. der Bewertungsmodalitäten von schriftlich dargelegten Argumentationen sowie (3) Fragen zur Effektivität der Trainingsvarianten. Im darauffolgenden methodischen Teil werden die Auswertungsinstrumente entwickelt und damit die Fragen aus dem zweiten Bereich beantwortet. Das im ersten Teil dargestellte Repräsentationssystem sowie ein mithilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse entwickeltes System zur Kategorisierung der Argumentationsqualität, das auf dem im ersten Teil beschriebenen Modell zum anatomischen Aufbau von Argumentationen basiert, bilden die zentrale Grundlage für diese Instrumente.

Im dritten Teil der Arbeit werden verschiedene statistische Verfahren auf die ermittelten Qualitätskategorien der erhobenen, schriftlichen Schülerargumentationen angewendet und die entsprechenden Auswertungsergebnisse präsentiert. Die überwiegenden Erfolge der beiden trainierten Untersuchungsgruppen gegenüber den Vergleichsgruppen werden dezidiert dargestellt und diskutiert.

Schlagworte: Mathematisches Argumentieren, Problemlösen, Heuristiken

Abstract

This thesis describes a long-term study that was conducted in four eighth, later ninth grades of a Hanoverian grammar school. It was examined in what extent the students' argumentation quality improved after one and a half years of continuous training, which two of the classes received in different variants, compared to the other two classes, which were not trained specifically. For this purpose, all students were regularly presented with problems with a strong reasoning component. For the investigation, matched samples were formed from all four classes, each with 23 pupils.

In the first part of this work, the concept of reasoning is first analysed in detail from different perspectives. Based on a sketch of the historical development, a definition is searched for that relates argumentation primarily to the related concepts of reasoning and proving. Proving is understood as a strict form of argumentation. Afterwards, literature-based models will be presented, which describe the temporal and qualitative development in the learning of argumentation and proof, especially under cognitive psychological aspects. This is an important basis for the development of the two training variants of the study. Subsequently, different semiotic representation systems for argumentations (and proofs respectively) are presented. Based on these, a proprietary representation system is developed, with the help of which the students' written argumentations can be transformed into a standardized format to evaluate their quality. Furthermore, a general model of the anatomical structure of an argumentation based on Toulmin's „Layout of Arguments“ is presented.

In the second part of the thesis, the research questions resulting from the theoretical considerations are developed. They are arranged in three sections: Besides (1) questions concerning the design of the training variants and their implementation in the classroom, there are (2) questions concerning the assessment modalities of written argumentations and (3) questions concerning the effectiveness of the training variants. In the following methodological part, the evaluation instruments are developed and thus the questions from the second part are answered. The proprietary representation system presented in the first part and a system for categorising the quality of argumentation based on the model for the anatomical structure of argumentations also described in the first part and developed in accordance to the guidelines of the Qualitative Content Analysis, form the central basis for these instruments.

In the third part of the thesis, different statistical methods are applied to the quality categories determined from the collected written student argumentations. The corresponding evaluation results are presented. The predominant successes of the two trained study groups compared to the comparison groups will be expounded and discussed in detail.

Keywords: mathematical argumentation, problem solving, heuristics

Inhalt

1. Einleitung	13
1.1 Relevanz des Argumentierens für den Mathematikunterricht	14
1.2 Studien zur Untersuchung des Argumentierens	16
1.3 Intention der vorliegenden Arbeit	22
1.4 Aufbau der vorliegenden Arbeit	24
2. Argumentieren	26
2.1 Einleitung	26
2.2 Etymologie des Begriffs „Argumentieren“	26
2.3 Argumentieren – allgemeine Begriffsbestimmung	27
2.4 Argumentieren, Begründen, Beweisen – Begriffsabgrenzungen	28
2.4.1 Curriculare Sichtweise	28
2.4.2 „Niveaustufen des Beweisens“ bei Holland	29
2.4.3 „Kontinuum des Begründens“ bei Brunner	30
2.4.4 Argumentieren und Beweisen als Kommunikationsformen	31
2.4.5 Eigene Sichtweise	31
2.5 Phasenmodell von Boero	32
2.6 Beweise	38
2.6.1 Beweis – Begriffsbestimmung	38
2.6.2 Funktionen von Beweisen	40
2.6.3 Kategorien von Beweisen	42
2.6.4 Zusammenfassung – Bedeutung von Beweisen im schulischen Kontext	50
2.7 Struktur von Beweisen und mathematischen Argumentationen	51
2.7.1 Drei-Ebenen-Modell für die Struktur von Argumentationen	51
2.7.2 Aussagen	54
2.7.3 Argumente	58
2.7.4 Argumentationen	68
2.7.5 Vollständigkeit und Korrektheit in der mathematischen Logik	70
2.8 Schematische Darstellungen von Argumentationen bzw. Beweisen	73
2.8.1 Freges der „arithmetischen nachgebildete Formelsprache“	73
2.8.2 Das „Schema einer Argumentation“ bei Toulmin	74
2.8.3 Dörners „Netzwerke von Sachverhalten und Operatoren“	79
2.8.4 Die „geometrische Repräsentation des Fortschrittes einer Lösung“ bei Pólya	80
2.8.5 Königs „Lösungsgraphen“ zur Darstellung des Lösungsplans	82
2.8.6 Hollands „Beweisgraphen“ zur anschaulichen Darstellung eines Beweises	83
2.9 Genese eines eigenen graphischen Repräsentationssystems	85
2.9.1 Forderungen an ein eigenes Repräsentationssystem	86
2.9.2 Beschreibung des eigenen Repräsentationssystems	86
3. Forschungsfragen	89
3.1 Forschungsziele	89
3.2 Forschungsfragen zur Gestaltung und Implementierung eines Trainings	89
3.3 Forschungsfragen zur Bewertung von Argumentationen	90
3.4 Forschungsfragen zur Evaluation der Trainingsvarianten	90
4. HeuRekAP-Trainingsvarianten	93
4.1 Einleitung	93
4.2 Zusammenhang zwischen Argumentieren und Problemlösen	93

4.3	Studien zu Argumentations- bzw. Problemlösetrainings	96
4.4	Allgemeine Darstellung des expliziten bzw. impliziten Trainings	99
4.4.1	Theoretische Fundierung	99
4.4.2	Heuristische Rekonstruktion	108
4.4.3	Allgemeines Vorgehen beim expliziten bzw. impliziten Training.....	109
4.4.4	Vergleich beider Trainingsvarianten mit dem Training von Bruder und Collet	112
4.5	Unterricht mit explizitem bzw. implizitem Training.....	116
4.5.1	Übersicht aller Unterrichtseinheiten während der Studie.....	116
4.5.2	Zwei-Tore-Regel und Zwei-Spalten-Beweis	118
4.5.3	Explizites Training in der Unterrichtseinheit „Quadratwurzeln/reelle Zahlen“	122
4.5.4	Implizites Training in der Unterrichtseinheit „Quadratwurzeln/reelle Zahlen“	127
4.5.5	Beweis der Irrationalität der Wurzel aus 2.....	130
5.	Auswertungsmethodik	133
5.1	Allgemeine Beschreibung des methodischen Vorgehens	133
5.2	Probandenauswahl	136
5.3	Aufgabenauswahl.....	147
5.4	Vorgehen bei der stoffdidaktischen und heuristischen Analyse.....	151
5.5	Analysen der ausgewählten Aufgaben.....	152
5.5.1	Aufgabe Winkel 1/Winkel 1 (var.).....	153
5.5.2	Aufgabe Raute 1	161
5.5.3	Aufgabe Raute 2	164
5.5.4	Aufgabe K18.....	168
5.5.5	Aufgabe K10.....	174
5.5.6	Aufgabe K10A	185
5.6	Methodische Überlegungen zur Untersuchung des Argumentierens	188
5.6.1	Beschreibung des Untersuchungsverfahrens.....	188
5.6.2	Graphische Repräsentation von schriftlichen Argumentationen.....	191
5.6.3	Bestimmung d. Argumentationskategorien mittels Qualitativer Inhaltsanalyse	196
5.7	Gütekriterien	210
5.7.1	Objektivität	210
5.7.2	Reliabilität.....	216
5.7.3	Validität	217
5.8	Statistische Auswertungswerkzeuge	218
5.8.1	Übersicht.....	218
5.8.2	χ^2 -Tests	219
5.8.3	Fishers exakter Test	221
5.8.4	Mann-Whitney-U-Test.....	223
5.8.5	McNemar-Test.....	224
5.8.6	Wilcoxon-Vorzeichenrang-Test.....	225
6.	Auswertung und Ergebnisse	227
6.1	Beschreibung ausgewählter Arbeitsergebnisse für die Aufgaben	228
6.1.1	Winkel 1.....	228
6.1.2	Raute 1/Raute 2.....	243
6.1.3	K18	266
6.1.4	K10/K10A.....	282
6.2	Allgemeine quantitative Untersuchungen	301
6.2.1	Betrachtung der Quartile.....	301

6.2.2	Varianzanalysen	305
6.3	Quantitative Querschnittsauswertungen.....	308
6.3.1	χ^2 -Tests	308
6.3.2	Fishers exakter Test	315
6.3.3	Mann-Whitney-U-Test.....	318
6.4	Quantitative Längsschnittsauswertungen	321
6.4.1	McNemar-Tests	321
6.4.2	Wilcoxon-Vorzeichen-Rangtest.....	331
6.5	Auswirkungen der Trainingsvarianten auf den regulären Unterricht.....	336
6.5.1	Medianwertuntersuchungen	336
6.5.2	Mann-Whitney-U-Test.....	337
7.	Diskussion und Perspektiven	338
7.1	Zusammenfassung der Auswertungsergebnisse.....	338
7.2	Wirkungen der Trainingsvarianten	341
7.2.1	Allgemeiner Überblick.....	341
7.2.2	Querschnittuntersuchungen.....	349
7.2.3	Längsschnittuntersuchungen	353
7.2.4	Wirkung auf die Beherrschung regulärer Unterrichtsinhalte	356
7.3	Abgleich der Ergebnisse mit der Literatur	359
7.3.1	HeuRekAP im Vergleich mit anderen Interventionsstudien	359
7.3.2	Theorie des Argumentierens – Praxis des Argumentierens	366
7.4	Perspektiven.....	373
	Literatur	376
	Abbildungsnachweise	387
	Bedeutung der Kategoriensymbole.....	390

1. Einleitung

Die Mathematik gehört zu den ältesten Wissenschaften der Menschheit. Wissenschaftshistoriker¹ gehen davon aus, dass der Mensch mit Beginn der neolithischen Revolution u. a. das Konzept des Zählens verinnerlichte. Produzierende Wirtschaftsweisen und Sesshaftigkeit ersetzten während dieser Zeit die Strategie des Jagens und Sammelns. Die neue Lebensweise erforderte völlig neue Kenntnisse und Fertigkeiten: Viehbestände mussten numerisch erfasst werden und kalendarisches Wissen um den Lauf der Jahreszeiten war eine notwendige Voraussetzung für die erfolgreiche Terminierung von Aussaat und Ernte. Steinzeitliche Artefakte wie der *Ishango-Knochen* aus dem Kongo mit einem Alter von etwa 20.000 Jahren deuten auf eine frühe Aufschrift und möglicherweise sogar arithmetische Verarbeitung von Zahlen hin.

Der Beginn mathematischen Denkens vollzog sich ab etwa 2000 v. Chr. in Mesopotamien, Ägypten, Indien und China (vgl. Kropp, 1994, S. 9); die ältesten erhaltenen Sammlungen von mathematischen Rechenaufgaben befinden sich auf den über 3.500 Jahre alten *Papyrus Moskau* und *Papyrus Rhind* aus Oberägypten (vgl. Robins & Shute, 1987). Hier lassen sich bereits mathematische Fachbereiche wie Arithmetik, Algebra oder Geometrie unterscheiden.

In der hellenistischen Antike entwickelte sich die Mathematik vom rein praktischen Recheninstrumentarium hin zu einer theoretischen Wissenschaft. Erstmals wurden Fragen nach den Begründungszusammenhängen gestellt und Beweise auf der Basis logischer Prinzipien geführt. Mit der *euklidischen Geometrie* erfolgte erstmals die Axiomatisierung eines mathematischen Gegenstandsbereiches.

Spätestens seit dem 19. Jahrhundert wurde die Mathematik durchgängig in Form von Theorien in axiomatischer Form präsentiert. Dabei bilden Aussagen, die ohne Begründung als wahr angesehen werden (*Axiome*), das Fundament einer jeden mathematischen Theorie. Aus den Axiomen werden mittels festgelegter Schlussregeln weitere Aussagen hergeleitet, die *mathematische Sätze* genannt werden. Die Herleitung selbst wird als *Argumentation* oder – in finaler, strenger Form – als *Beweis* bezeichnet.

Argumentieren und das Führen von Beweisen sind heute zentrale Tätigkeiten professioneller Mathematiker. Daher ist es weitgehender Konsens vieler Bildungstheoretiker und Lehrer, dass diese Tätigkeiten auch im schulischen Mathematikunterricht abgebildet werden sollten. Herbst (2002, S. 283f.) beschreibt diesen Anspruch in dem folgenden Zitat und fragt im selben Atemzug nach den Modalitäten für eine erfolgreiche Implementierung der Handlungskompetenz des Beweisens in den Unterricht; eine Frage, der auch in dieser Arbeit intensiv nachgegangen wird:

As proof is intimately connected to the construction of mathematical ideas, proving should be as natural an activity for students as defining, modelling, representing, or problem

¹ In dieser Arbeit werden alle geschlechtsbezeichnenden Begriffe wie Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, Schülerinnen und Schüler etc. aus Gründen der besseren Lesbarkeit und Platzökonomie zur einfachen generischen Pluralform (Wissenschaftler, Schüler) zusammengefasst. Unterschieden wird nur, wenn es sich um geschlechtsspezifische Aussagen handelt.

solving. Yet, important questions that must be raised concern what it takes to organize classrooms where students can be expected to produce arguments and proofs and what proof may look like in school classrooms.

Die Vermittlung eines realistischen Bildes vom Wesen der Mathematik und den Arbeitsweisen von Mathematikern ist aber nur ein Grund für die Wichtigkeit, das Argumentieren im schulischen Kontext zu erlernen. Der folgende Abschnitt beleuchtet diese Relevanz aus verschiedenen Perspektiven und liefert damit zentrale Gründe, warum die vorliegende Arbeit auf die Modalitäten von lernpsychologisch geeigneten Argumentationstrainings fokussiert, die Entwicklung und Durchführung zweier entsprechender Trainings beschreibt und deren Erfolge analysiert.

1.1 Relevanz des Argumentierens für den Mathematikunterricht

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits dargestellt, dass Argumentieren und Beweisen zentrale Vorgehensweisen im Arbeitsalltag professioneller Mathematiker sind und eine Beschäftigung mit diesen Tätigkeiten schon aus diesem Grund auch im Schulunterricht sinnvoll ist.

Daneben gibt es viele weitere Gründe für eine Einbeziehung des Argumentierens und Beweisens in den Unterricht: In der gegenwärtigen Zeit erleben wir eine Entwicklung in der Diskussionskultur, die in vielen Bereichen – auch in der Politik – die Bedeutung der Fakten-Fundierung von Argumenten und deren logischer Verknüpfung immer weiter vernachlässigen oder sogar leugnen. Symptomatisch ist das mittlerweile berühmte Beispiel der offensichtlichen Falschaussage von Donald Trumps Pressesprecher Sean Spicer, der behauptet hatte, zu Trumps Amtseinführung hätten sich vor dem Kapitol in Washington, D. C. mehr Menschen eingefunden als bei dessen Vorgänger Barack Obama. Geeignete Fakten zur Überprüfung dieser Aussage wie Luftbilddaufnahmen und Verkehrszählungen belegten jedoch das Gegenteil. Statt aber die Unwahrheit der getroffenen Aussage einzugestehen, sprach Kellyanne Conway, Beraterin des US-Präsidenten, von „alternativen Fakten“ und brachte dadurch letztlich ihr Unverständnis für Wesen und Wert korrekter Argumentationen zum Ausdruck. Die Vermittlung solcher Werte ist aber ein zentraler Aspekt eines aufgeklärten Bildungsauftrages und eine basale Voraussetzung für eine weltoffene, demokratische Gesellschaft. Das Erlernen korrekter Argumentationsführung ist also auch aus sozialetischen Gründen zu rechtfertigen.

In Bezug auf motivationale Gründe muss konstatiert werden, dass das Beweisen den Schülern in der Mehrzahl der Fälle zunächst schwerfällt. Traditionell wird das Beweisen jedoch häufig so gelehrt, dass der Lehrer einige Beweise zu vorgegebenen Behauptungen schrittweise mit den Schülern durchspricht und ihnen anschließend vergleichbare Behauptungen zur Übung vorlegt. Auf diese Weise erscheint das Beweisen vor allem schwächeren Schülern oft als unnötig komplizierter Formalismus, der sich nur Experten erschließt. In Abschnitt 2.5 wird das Beweisen dagegen als umfangreicher Prozess

dargestellt, der mit dem Erkunden einer Problemsituation und dem Erkennen von Regelmäßigkeiten beginnt und in dem die Beobachtungen erst in einer späteren Phase als Behauptung formuliert und dann mit Argumenten gestützt werden. Brunner (2014, S. 82) weist darauf hin, dass in diesem Zusammenhang

„experimentelle Zugänge, die eine hohe Aktivität der Schülerinnen und Schüler ermöglichen und gleichzeitig wenig anspruchsvoll sind, besonders geeignet sein sollten, um die Lernenden Beweisen als etwas Interessantes und Befriedigendes erleben zu lassen“. Aber auch das Auffinden einer vollständigen Kette von Argumenten für eine Behauptung in den späteren Phasen des Beweisprozesses kann nach einiger Übung sehr motivierend wirken.“

Aus curricularer Sicht wird das mathematische Argumentieren neben dem Problemlösen und dem Modellieren als wichtige zu entwickelnde Handlungskompetenz genannt (vgl. Kultusministerkonferenz, 2012, S. 11; Niedersächsisches Kultusministerium, 2006b², S. 6). Nach den ernüchternden Resultaten der ersten internationalen Leistungsvergleichsstudien hatte ein entsprechender Paradigmenwechsel fort von einer eher inhaltsbezogenen Lernzielorientierung hin zu einer Handlungskompetenzorientierung stattgefunden. In Zusammenhang mit der zuvor genannten sozialetischen Begründung heißt es in den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (2012, S. 14) über die Handlungskompetenz des Argumentierens beispielsweise:

Zu dieser Kompetenz gehören sowohl das Entwickeln eigenständiger, situationsangemessener mathematischer Argumentationen und Vermutungen als auch das Verstehen und Bewerten gegebener mathematischer Aussagen.

Für den Anforderungsbereich III („Verallgemeinern und Reflektieren“) wird gefordert:

Die Schülerinnen und Schüler können

- Beweise und anspruchsvolle Argumentationen nutzen, erläutern und entwickeln.
- verschiedene Argumente nach Kriterien wie Reichweite und Schlüssigkeit bewerten.

Im niedersächsischen Kerncurriculum (2006b, S. 5) heißt es:

Mathematikunterricht fördert grundlegende intellektuelle Fähigkeiten, die über das Fach hinaus von Bedeutung sind wie z. B. Ordnen, Verallgemeinern, Abstrahieren, folgerichtiges Denken. Daneben fördert mathematisches Handeln durch Erkunden von Zusammenhängen, Entwickeln und Untersuchen von Strukturen, Argumentieren und Systematisieren die allgemeine Handlungskompetenz. Weiterhin erschließen sich die Schülerinnen und Schüler einen Wahrnehmungs- und Urteilshorizont, der über die Alltagsvorstellungen hinausgeht und die Kritikfähigkeit und die Beurteilungskompetenz fördert.

Die Vermittlung einer Argumentations- und Beweiskompetenz ist also aus der schulrechtlichen Perspektive heraus nicht nur begründbar, sondern sogar verpflichtend. Im letzten Zitat wird darüber hinaus auch der weiter oben genannte sozialetische Aspekt kompetenten Argumentierens aufgegriffen.

² Diese Ausgabe des niedersächsischen Kerncurriculums für die Sekundarstufe I war zum Zeitpunkt der Studie gültig. Die folgenden Zitate finden sich aber im Wortlaut an denselben Stellen auch in der aktuellen Version aus dem Jahr 2015.

1.2 Studien zur Untersuchung des Argumentierens

Nachhaltige Entwicklungen im Schulwesen, wie der paradigmatische Wechsel von einer Lernzielorientierung hin zu einer (Handlungs-)Kompetenzorientierung finden natürlich in der didaktischen Forschung ihr Pendant. So gibt es eine Vielzahl von Studien, die sich aus unterschiedlichen Perspektiven mit der Implementierung des Argumentierens und Beweisens in den Unterricht beschäftigen. Aber auch schon vor der Zeit der internationalen Vergleichsstudien, die diesen Paradigmenwechsel eingeleitet haben, wurde das Thema Argumentieren und Beweisen ausgiebig beforscht.

Reid und Knipping (2010, S. 35 ff.) liefern einen umfassenden Überblick über derartige Forschungsstudien. Sie unterscheiden die unterschiedlichen Forschungsansätze in diesem Zusammenhang

1. nach der philosophischen Sichtweise der Forscher auf die Mathematik.
2. nach der Bedeutung, die dem Begriff Beweis bzw. beweisen gegeben wird.
3. danach, wie eng oder weit der Begriff Beweis gefasst wird.

Bezüglich des ersten Kriteriums verstehen Reid und Knipping (ibid., S. 36) unter der „philosophischen Sichtweise“ den ontologischen Rang, den die Forscher ihren mathematischen Untersuchungsobjekten zugrunde legen. Im Falle von Beweisen manifestiert sich der ontologische Rang für die Prämissen und abgeleiteten Aussagen im Wahrheitsbegriff der Forscher und für die Schlussfolgerungen in deren Sichtweise von Korrektheit. Vier Stufen werden von Reid und Knipping in diesem Zusammenhang unterschieden:

i. „**A priorist**“ (vgl. ibid., S. 37): Aufbauend auf Kants Vorstellung von einer apodiktischer Vorbestimmtheit der geometrischen Gesetzmäßigkeiten handelt es sich nach dieser Sichtweise bei den Axiomen und Definitionen um Objekte der realen Welt, welche die ihnen zugeschriebenen Eigenschaften qua ihrer Existenz wirklich besitzen. Deduktive Schlussregeln übertragen die Wahrheit der Axiome und Prämissen zwingend auf die Schlussfolgerungen.

ii. „**Infaliblist**“ (vgl. ibid.): Nach der Entdeckung *Nichteuklidischer Geometrien* veränderte sich die philosophische Sichtweise vieler Mathematiker auf ihr Fach. Axiome wurden nun nicht mehr als naturgegebene Wahrheiten, sondern als menschengemachte Hypothesen betrachtet. Die Vorstellung vom Wahrheitstransfer deduktiver Schlussfolgerungen blieb indes bestehen.

iii. „**Quasi-empiricist**“ (vgl. ibid., S. 38): Vor allem unter dem Einfluss von Lakatos begannen viele Mathematiker ab den 1960er Jahren am garantierten Wahrheitstransfer deduktiver Schlüsse zu zweifeln, insbesondere, weil die einer Theorie zugrunde liegenden axiomatischen Systeme als nicht fix, sondern verhandelbar erkannt wurden. Lakatos (1976, zitiert nach Reid und Knipping, 2010, S. 38) spricht auf der anderen Seite aber von einem konstruktiven Rücktransfer widerlegter Aussagen auf deren Prämissen. Auf diese

Weise verändert sich die Funktion von Beweisen: Beweis(-ansätze) und Widerlegungen sind sich ergänzende Teile eines zyklischen Analyseprozesses, der eine sukzessive Verbesserung der Behauptung, der zugrunde liegenden Definitionen und Annahmen sowie des Beweises selbst zum Ziel hat.

iv. „**Social-constructivist**“ (vgl. *ibid.*, S. 39): Während Lakatos die deduktive Methode noch für unfehlbar hielt, gehen die Sozialkonstruktivisten davon aus, dass jede Gemeinschaft ihre eigene „deduktive Methode“ entwickelt und innerhalb dieser Gemeinschaft darüber befindet, was als gültiges deduktives Argument gilt und was nicht. So unterscheiden sich die Standards heutiger Mathematiker beispielsweise von denen der Mathematiker in der Vergangenheit.

Bezüglich des zweiten Kriteriums von Reid und Knipping wird nach der Bedeutung, die den Begriffen Beweis bzw. beweisen gegeben wird, unterschieden: Wird darunter das (schriftliche) Endprodukt eines Beweisprozesses („proof-text“) verstanden, der Beweisprozess („process of reasoning“) selbst oder das Beweisen als gesellschaftlicher Diskurs („social discourse“)?

Das dritte Kriterium fragt danach, wie eng bzw. weit der Begriff Beweis gefasst wird. Drei Kategorien werden dabei wie folgt unterschieden: Unter enger Sichtweise („narrow view“) verstehen Reid und Knipping (*ibid.*, S. 37) Beweisvorstellungen, die drei Charakteristiken erfüllen müssen: Beweise sind *deduktiv*, *überzeugend* und *wenigsten halbformal* geführt. Eine etwas weitere Sichtweise („more broad view“) verzichtet auf eines dieser Kriterien, eine weite Sichtweise („very broad view“) auf zwei.

Die dieser Arbeit zugrunde liegende Studie untersucht die Auswirkungen zweier langfristiger angelegter Trainingsvarianten zum Argumentieren. Inhaltlich angeknüpft wurde im Kern dabei an den Bereich der euklidischen Geometrie. Den Schülern wurde das axiomatische Fundament im Sinne eines hypothetischen Grundgerüsts exemplarisch anhand des Parallelenaxioms vorgestellt. Als gesichert wurde angenommen, dass aus den Axiomen und wahren Prämissen gefolgerte Aussagen ebenfalls wahr sind. In diesem Sinne muss die Studie in Bezug auf ihre philosophische Sicht auf die Mathematik im Bereich „Infallibilist“ taxiert werden.

Während des Trainings spielte der gesamte Beweisprozess vom Erkunden einer Problemsituation über die Formulierung einer aus den Beobachtungen resultierenden Vermutung, die Suche und Organisation geeigneter Argumente bis hin zur (standardisierten) Niederschrift des Beweises – wie es im Modell von Boero (vgl. Abschnitt 2.5) dezidiert beschrieben wird – durchgängig eine Rolle. Die einzelnen Phasen dieses Prozesses wurden in der Gemeinschaft kritisch diskutiert. Das zur Beurteilung des Lernerfolges bei dieser Studie zugrunde gelegte Datenmaterial besteht aber aus schriftlich dargelegten Argumentationen der Schüler. Daher befindet sich die Forschungsperspektive aufgrund ihrer Methodik bzgl. des Kriteriums „Bedeutung von »Beweis« und »Beweisen«, im Bereich „proof-texts“.

In Bezug auf das dritte Kriterium folgt die Forschungsperspektive einer „engen Sichtweise“, da auf eine deduktive und altergemäß formale Aufschrift während der finalen Phase des Beweisprozesses Wert gelegt wurde. Das Zwei-Spalten-Schema (vgl. Abschnitt 4.5.2) wurde in diesem Zusammenhang als geeignete Modalität zur Notation eines Beweises vorgeschlagen. Die überzeugende Funktion von Argumentationen, wie sie schon Cicero in seiner Topica betont (vgl. Abschnitt 2.2), war Konsens zwischen Schülern und Lehrer und hatte natürlich elementare Bedeutung in Bezug auf die sozialen Komponenten des Argumentationstrainings. Damit enthält die Forschungsperspektive alle drei oben genannten Charakteristiken.

Abbildung 1.1 zeigt die entsprechende Verortung der hier beschriebenen Studie im Forschungsperspektiven-Schema von Reid und Knipping (2010, angelehnt an die dortige Abb. 3 auf S. 36).

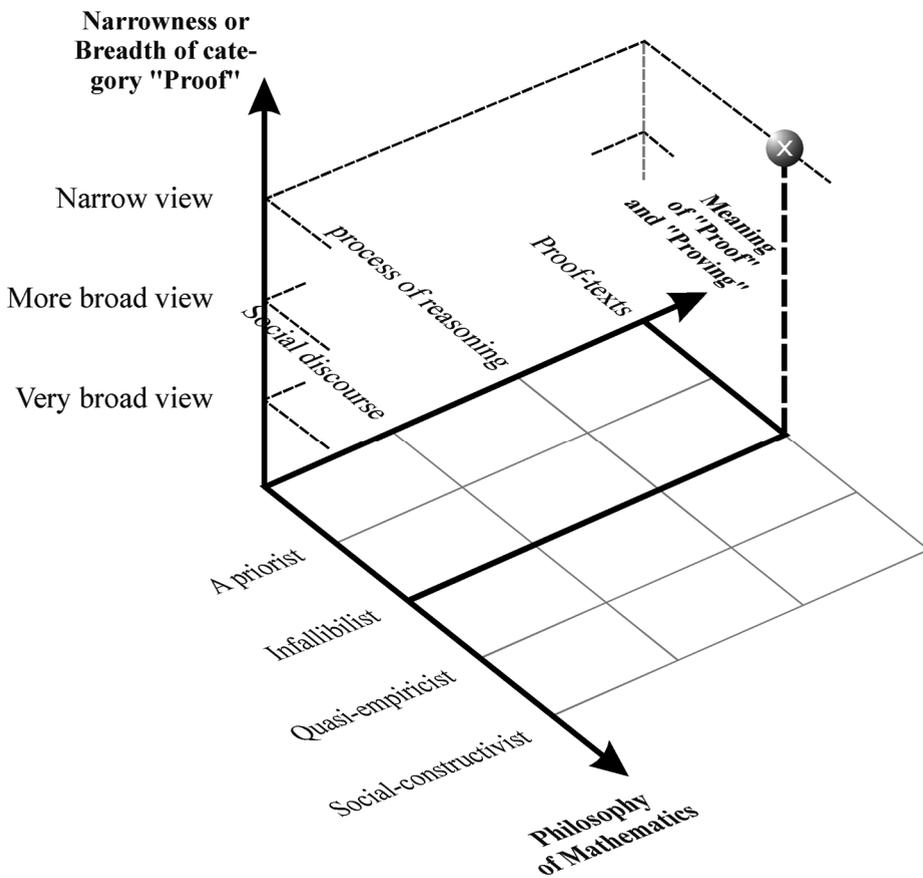


Abb. 1.1: Verortung der vorliegenden Studie im Forschungsperspektiven-Schema von Reid und Knipping (2010, S. 36)

Reid und Knipping (ibid., S. 53) ordnen verschiedene Studien der vergangenen 80 Jahre nach den oben beschriebenen Forschungsperspektiven ein. Vom Autor wurden vier dieser Studien ausgewählt, die vergleichbaren Perspektiven folgen wie die vorliegende Studie:

<i>Studie</i>	<i>Publ.</i>	<i>Philosophie</i>	<i>Bedeutung</i>	<i>Fassung</i>
Fawcett	1938	Infallibilist	Discourse	Narrow
Fishbein & Kedem	1982	A priorist or Infallibilist	Proof-text	Narrow
Preformalisten, z. B. Wittmann & Müller	1988	Infallibilist	Proof-text	Broad
Duval	1990	Infallibilist	Proof-text	Narrow
Brockmann-Behnsen	2021	Infallibilist	Proof-text	Narrow

Tab. 1.1: Studien mit ähnlichen Forschungsperspektiven wie die der vorliegenden (letzte Zeile), die Tabelle basiert auf Reid & Knipping, 2010, S. 53, Tabelle 3

Bereits 1938 führt Fawcett ein Unterrichtsexperiment durch, bei dem sich Diskussionen von Lehrer und Schülern zu vorgelegten Beweisen mit Schülerarbeitsphasen abwechselten. Fishbein und Kedem (1982) legen Schülern schriftliche Beweise vor und lassen sie diese kommentieren. Wittmann und Müller (1988) fokussieren auf die Frühphasen des Argumentierens, in denen bevorzugt „inhaltlich-anschauliche“ Argumente verwendet werden und das Formelle erst noch gelernt werden muss (vgl. Abschnitt 2.6.3.3). Duval (1990) interessiert sich für den Zusammenhang zwischen dem Argumentieren und dem Beweisen. Er kommt zu dem Schluss, dass das Argumentieren auf das Überzeugen ausgerichtet ist, während das Beweisen mit den Prinzipien deduktiver Folgerungen in Verbindung steht (vgl. Reid und Knipping, 2010, S. 44).

In einer weiteren Tabelle stellen Reid und Knipping (ibid., S. 60, Tabelle 5) häufig zitierte Studien zum Argumentieren vor und berichten von deren wesentlichen Ergebnissen. Tabelle 1.2 gibt einen Ausschnitt dieser Tabelle wieder. Ausgewählt wurden dabei Studien mit Probanden vergleichbarer Altersklasse wie bei der vorliegenden Studie (letzte Zeile).

Als konsensuelle Ergebnisse der von ihnen zusammengestellten Studien nennen Reid und Knipping (ibid., S. 59) u. a. Folgendes:

- Viele (vielleicht die meisten) Schüler akzeptieren Beispiele zur Verifikation.
- Viele Schüler akzeptieren deduktive Beweise nicht zur Verifikation.
- Viele Schüler akzeptieren Gegenbeispiele nicht zur Widerlegung.
- Schüler akzeptieren fehlerhafte deduktive Beweise zur Verifikation.
- Die meisten Schüler sind nicht in der Lage, korrekte Beweise zu führen.

<i>Studie</i>	<i>Publ.</i>	<i>Ort</i>	<i>Typ</i>	<i>Probanden</i>	<i>Fokus</i>
Bell	1976	UK	Schriftl. Erhebung	32 Schüler (14 – 15 Jahre)	Beweisaufschrift
Galbraith	1981	Australien	Interview	> 170 Schüler (12 – 17 Jahre)	Beweisaufschrift/ Leseverständnis
Fishbein & Kedem	1982	Israel	Interview	397 Schüler (15 – 17 Jahre)	Leseverständnis
Senk	1985	US	Schriftl. Erhebung	1520 Schüler (15 – 17+ Jahre)	Beweisaufschrift
Balacheff	1988	Frankreich	Schriftl. Erhebung	14 Schülerpaare (13 – 24 Jahre)	Beweisaufschrift
Porteous	1990	UK	Interview	50 Schüler (11 – 16 Jahre)	Beweisaufschrift
Chazan	1993	US	Interview	17 Schüler (ca. 15 Jahre)	Beweisaufschrift
Healy & Hoyles	2000	England and Wales	Schriftl. Erhebung	2459 hochbeg. Schüler (14 – 15 Jahre)	Beweisaufschrift/ Leseverständnis
Brockmann- Behnsen	2021	Deutsch- land	Schriftl. Erhebung	92 Schüler (12 – 15 Jahre)	Beweisaufschrift

Tab. 1.2: Häufig zitierte Studien mit Probanden ähnlichen Alters wie in der vorliegenden Studie (letzte Zeile), Tabelle basiert auf Reid & Knipping, 2010, S. 60, Tabelle 5

Nach den zentralen Befunden, die sich aus diesen Studien ergeben, formulieren Reid und Knipping (ibid.) zwei Fragen als Denkipulse:

- Welche psychologischen und sozialen Faktoren sind für diese Befunde verantwortlich?
- Welche Art von Unterricht könnte die Schüler in Bezug auf diese Fehlvorstellungen ansprechen?

Der Frage nach geeigneten Unterrichts- und Trainingsmodalitäten soll auch in der hier dargestellten Arbeit nachgegangen werden. Daher ist es lohnenswert, auch noch einen Blick auf Studien zu werfen, die entsprechend der Vorgehensweise der hier beschriebenen Studie (im Rahmen von Zwei-Gruppen-Plänen) die Wirksamkeit von unterrichtlichen Interventionen untersuchen.

Tabelle 1.3 stellt exemplarisch einige vergleichbare Studien der vorliegenden gegenüber. Dabei zeigt sich tendenziell ein reziproker Zusammenhang zwischen der Probandenanzahl und der Interventionsdauer (vgl. Abb. 1.2). Die hier beschriebene Studie untersucht trotz langer Interventionsdauer eine vergleichsweise große Anzahl an Probanden und füllt damit eine Lücke in dem in Abbildung 1.2 dargestellten Raster.

<i>Studie</i>	<i>Publ.</i>	<i>Probanden</i>	<i>Intervention</i>	<i>Dauer</i>
Kantowski	1977	Neuntklässler N = 8	Expl. heur. Instruktionsphase, 3 Geometrieinh./Heurismengebr.	1 Monat 4 Monate
Heinrich	1992	14 Exp.klassen 9. Jg., N = 165 14 Kontr.klassen 9. Jg., N = 158	Training in der Nutzung heur. Suchstrategien in Verb. mit dem Entwickeln eines hierarchischen Lsgs.plans für Komplexaufgaben	1 Jahr
Mevarech & Kramarski	1997	6 Exp.klassen 7. Jg., N = 164 3 Kontr.klassen 7. Jg., N = 101	Strategievermittlung/Metakogni- tion, Arbeit an Problemen in leis- tungsinhomogenen Vierergruppen, Syst. individuelle Rückmeldung	1 Jahr
Perels, Schmitz & Bruder	2003	Lerngruppen 8. Jg., N = 249	3 Trainingsvarianten: Reines PL- Tr., Reines Selbstreg.tr., Kombitr.	6 Wochen
Koichu, Berman & Moore	2007	2 Klassen 8. Jg., N = 37	Heuristisches Training, eingebettet in den Unterricht	5 Monate
Reiss, Heinze, Renkl & Groß	2008	6 Exp.klassen 8. Jg., N = 150 4 Kontr.klassen 8. Jg., N = 93	Einsatz „Heuristisch ausgearbeite- ter Beweisbeispiele“	5 Schulst.
Collet	2009	Schulklassen 7./8. Jahrgang N = 170	Lehrerfortbildungen zu verschiede- nen Aspekten des Problemlösens, Training in den Schulklassen	1 Jahr
Cramer	2014	15-jährige Schü- lerinnen, N = 5	Einsatz logikbasierter Spiele zur Argum.-Partizipationssteigerung	1 Jahr
Yates & Lock- wood	2014	1 Exp.gruppe 7./8. Jg., N = 10 1 Kontr.gruppe 7./8. Jg., N = 10	Erprobung des QuickSmart-Pro- gramms zur Förderung der Lese-, Schreibe und Rechenfertigkeiten	30 Wo- chen
Eisenmann, No- votná, Příbyl & Břehovski	2015	12–18-jährige Schülerinnen N = 62	Lehrer stellt Aufgaben, schnellste Schüler oder Lehrer stellen Lsg. vor, Heurismen werden hervorgeh.	16 Mo- nate
Nakawa, Wata- nabe & Matsuo	2019	5–6-jährige Vor- schüler, N = 35	6 spielbasierte Aktivitäten über Zahlen, Messen und Formen	9 Monate
Prediger & Dröse	2019	Schulklassen 5. Jg., N = 167	Training im Leseverständnis	3 Wochen
Brockmann- Behnsen	2021	2 Exp.gruppen 8./9. Jg., N = 46 2 Kontr.gruppen 8./9. Jg., N = 46	Einsatz zweier dauerhaft in den Unterricht integrierter Trainingsva- rianten im Argumentieren und zur Heurismenanwendung	1,5 Jahre

Tab. 1.3: Interventionsstudien mit Argumentations- bzw. Heurismen Trainings zum Vergleich mit der vorliegenden Studie in Bezug auf Interventionsdauer und Probandenzahl

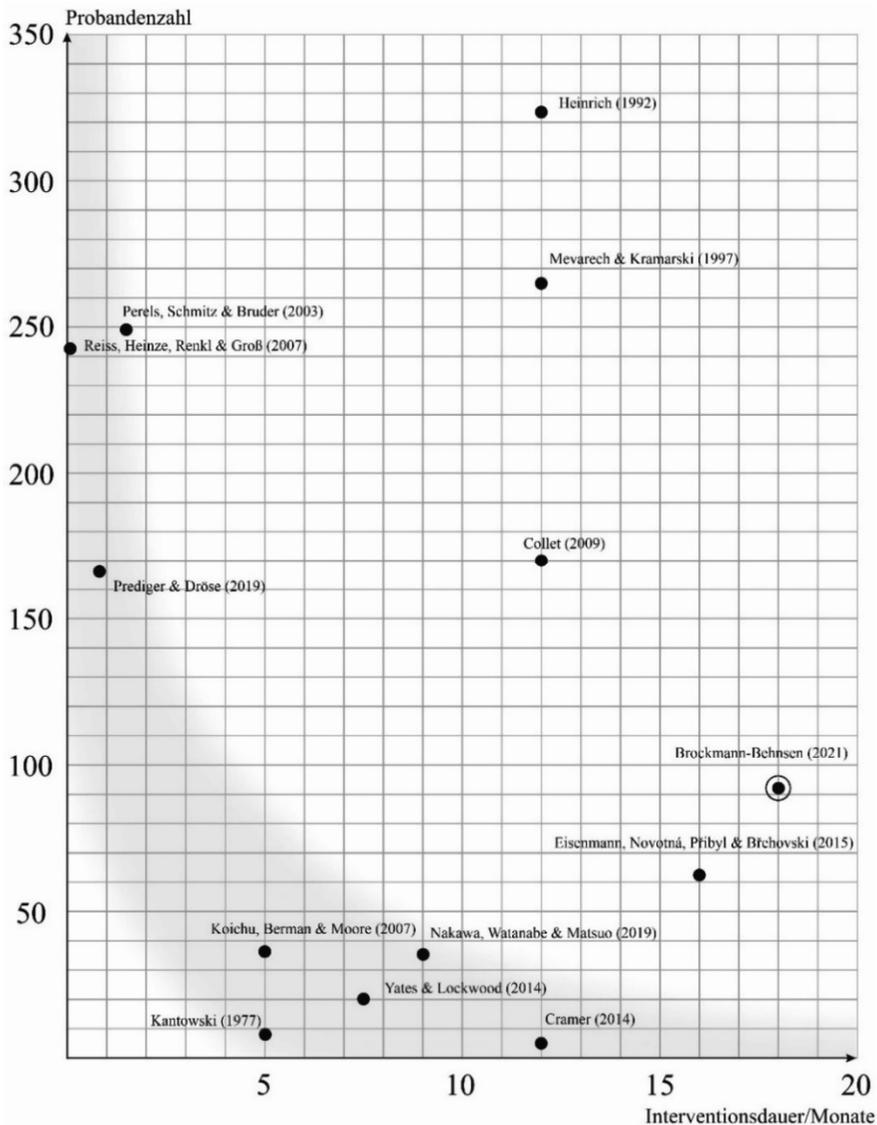


Abb. 1.2: Einordnung der vorl. Studie in Bezug auf Probandenzahl (in Studien mit Versuchs- und Kontrollgruppen erscheint die Gesamtzahl an Schülern) und Interventionsdauer

1.3 Intention der vorliegenden Arbeit

In Abschnitt 1.1 wurde die Bedeutung der unterrichtlichen Vermittlung von Argumentations- und Beweiskompetenzen aus verschiedenen Perspektiven beleuchtet und begründet. Es wurde deutlich, warum entsprechende Handlungskompetenzen aus den genannten Gründen eine erhebliche gesellschaftliche Relevanz besitzen und folgelogisch Einzug in die Bildungsstandards und Schulcurricula gehalten haben.

Abschnitt 1.2 lieferte einen Überblick über Forschungsstudien, die das Lehren und Lernen von Argumentation und Beweisführung entsprechend untersuchen. Die vorliegende Studie wurde mittels des dreidimensionalen Rasters von Reid und Knipping in Bezug auf die eingenommenen Forschungsperspektiven eingeordnet und mit anderen Studien verglichen. Der Erwerb und die Entwicklung von Handlungskompetenzen wie dem Argumentieren erfordern langfristige, kontinuierliche und systematische Trainingsgelegenheiten für die Schüler. Daher muss eine Interventionsstudie, die auf die Auswirkungen solcher Trainings fokussiert, entsprechend angelegt sein. Dies ist aber aus verschiedenen Gründen schwer zu realisieren. Zum einen muss das Forschungsprojekt finanziell und organisatorisch auf eine lange, intensive Laufzeit ausgelegt werden, zum anderen müssen Schulen und Lehrkräfte gefunden werden, die sich auf die Interventionen einlassen und die Ansätze der Forscher auch geeignet umsetzen. Die in Tabelle 1.3 repräsentativ aufgeführten Studien zeigen, dass die Interventionsdauer daher in der Regel entsprechend kurz gestaltet wird. Typische Interventionszeiträume liegen im Bereich von einigen Tagen oder Wochen. Aus dieser Literaturrecherche folgt, dass es in diesem Bereich eine Forschungslücke gibt.

Das allgemeine Anliegen der vorliegenden Arbeit ist es, diese Forschungslücke zu schließen. Dazu gab es Gelegenheit, weil der Autor infolge einer Abordnungssituation nicht nur Mitglied der universitären Forschergruppe war, sondern auch Lehrer in der beforschten Schule. Auf diese Weise war es möglich, in zwei Klassen je eine Trainingsvariante theoretisch fundiert und kontinuierlich über einen Zeitraum von eineinhalb Jahren durchzuführen. Die beiden anderen Klassen desselben Jahrgangs konnten als Vergleichsklassen eingesetzt werden. Die Intention dieser Arbeit und der ihr zugrunde liegenden Forschung umfasst dabei speziell folgende Aspekte:

- **Unterrichtsorganisatorischer Aspekt**
 - Analyse und Auswahl allgemeiner Trainingsmodalitäten zur Verbesserung der Argumentationskompetenz
 - Entwicklung und Implementierung von konkreten Unterrichtseinheiten, die – aufbauend auf den ausgewählten Trainingsmodalitäten – eine Verbesserung der Argumentationsfähigkeiten der Schüler zum Ziel haben
 - Berücksichtigung der schulischen Rahmenbedingungen
- **Forschungsinstrumenteller Aspekt**
 - Entwicklung eines Beurteilungssystems für schriftlich dargebotene Argumentationen bzw. Beweise
 - Auswahl geeigneter statistischer Instrumente zur Evaluation der Beurteilungen
- **Ergebnisorientierter Aspekt**
 - Analyse des Erfolges der eingesetzten Trainingsvarianten in den Experimentalgruppen im Längsschnitt
 - Vergleich zwischen Experimental- und Vergleichsgruppen bzgl. deren Argumentationsperformanz zu verschiedenen Zeitpunkten im Querschnitt
 - Untersuchung der Auswirkungen der Trainingsvarianten auf das Lernen regulärer Unterrichtsinhalte

1.4 Aufbau der vorliegenden Arbeit

Umsetzung und Auswertung der o. g. Aspekte der Forschungsintention werden in der hier vorliegenden Arbeit beschrieben. Im Folgenden findet sich ein Überblick über die Inhalte der einzelnen Kapitel zur Orientierung.

In **Kapitel 1** wird die Bedeutung der Handlungskompetenz des Argumentierens und deren Implementierung in den Unterricht aus verschiedenen Perspektiven begründet. Es werden Studien aus unterschiedlichen Ländern zu diesem Thema vorgestellt und analysiert. Dabei zeigt sich, dass es einen Mangel an echten Langzeitstudien gibt, die den Prozess der Kultivierung von Argumentations- und Beweiskompetenzen in der Schule intensiv begleiten und untersuchen. Diese Lücke soll geschlossen werden.

In **Kapitel 2** wird der theoretische Hintergrund des Argumentierens und Beweisens beleuchtet. Nach einer allgemeinen Bestimmung des Begriffs *Argumentieren*, wird dieser abgegrenzt gegenüber den artverwandten Begriffen *Begründen* und *Beweisen*. Mit dem Phasenmodell von Boero (1999) wird das Argumentieren bzw. Beweisen als komplexer, mehrphasiger Prozess verstanden, der in der finalen Phase in der Niederschrift eines Beweises gipfelt. Entsprechende Beweisaufschriften der Schüler werden in der hier beschriebenen Forschung als zentrale Auswertungseinheiten verwendet, Grundlage bei Planung und Durchführung der Unterrichtseinheiten bildet der gesamte Beweisprozess. Danach wird der anatomische Aufbau von Argumentationen bzw. Beweisen untersucht. Basierend auf Toulmins (1958) Vorstellung von deren organischem Aufbau wird ein eigenes Drei-Ebenen-Modell entwickelt, auf dessen Fundament später das Kategoriensystem zur Bewertung von Argumentationen bzw. Beweisen konstruiert wird. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird nach schematischen Darstellungen für Argumentationen bzw. Beweisen gesucht. Königs (1992) Repräsentationssystem mittels gerichteter Hypergraphen wird die Grundlage für die Entwicklung eines eigenen Systems zur Standardisierung der schriftlichen Schülerbeweise bilden.

In **Kapitel 3** werden die Forschungsfragen, die sich aus den o. g. Intentionen dieser Arbeit ergeben, konkretisiert. Sie beziehen sich wie dort dargestellt auf die drei Aspekte Unterrichtliche Umsetzung des Argumentationstrainings, Entwicklung bzw. Auswahl der Forschungsinstrumente und Auswertung der Daten.

In **Kapitel 4** werden die beiden Trainingsvarianten, die im Rahmen der hier beschriebenen Forschung entwickelt wurden, ausführlich beschrieben. Als Grundlage wurde dabei ein Training zum Problemlösen von Bruder und Collet (2011) herangezogen. Der Zusammenhang zwischen den Handlungskompetenzen des Argumentierens und Problemlösens wird daraufhin in einem eigenen Abschnitt dieses Kapitels erläutert. Literaturbasiert werden dann die Entscheidungen, die zur Entwicklung der beiden Trainingsvarianten („Explizites Training“ bzw. „Implizites Training“) getroffen wurden, begründet. Grundlage für beide Varianten ist die von Gawlick (2012b, 2014a) entwickelte heuristische

Rekonstruktion des Unterrichtsstoffes, die in einem eigenen Abschnitt beschrieben wird. Beide Trainingsvarianten werden dann synoptisch dem vierphasigen Trainingsmodell von Bruder und Collet gegenübergestellt. Schließlich werden die theoretischen Überlegungen anhand von Beschreibungen der konkreten unterrichtlichen Umsetzung illustriert. Eine Übersicht zeigt alle Unterrichteinheiten im Trainingszeitraum chronologisch an und verweist auf weiterführende Literatur des Autors zu den jeweiligen Einheiten. In dieser Arbeit wird die konkrete Ausgestaltung des expliziten bzw. impliziten Trainings anhand der Unterrichtseinheit „Quadratwurzeln/reelle Zahlen“ vorgestellt.

In **Kapitel 5** wird die Auswertungsmethodik dargestellt. Nach einem Überblick über den Ablauf der Studie wird die Auswahl der Probanden erläutert. Nach dem Verfahren des Matched Samplings (Rossi et al., 1993⁵) wurden 23 Schüler-Quadrupel aus den beiden Trainings- und Vergleichsklassen ausgewählt. Allen Schülern wurden in regelmäßigen Abständen Problem- bzw. Beweisaufgaben gestellt. Die Aufgaben wurden nach einem bei Lange (2009) beschriebenen Verfahren ausgewählt und gemäß der Ausführungen bei Rott (2005, 2013) stoffdidaktisch und heuristisch analysiert. Danach erfolgt eine ausführlich Beschreibung dieser Aufgaben und ihrer Lösungsräume. Anschließend werden die methodischen Überlegungen zur Untersuchung und Bewertung schriftlich dargebotener Argumentationen bzw. Beweise vorgestellt. Zunächst erfolgt eine Standardisierung dieser Verschriftlichungen in Form von Beweisgraphen (vgl. Kapitel 2) und dann eine kategoriale Einschätzung bzgl. deren Qualität auf Basis der Qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2010¹¹). Danach werden die Gütekriterien, die zur Beurteilung der kategorialen Bewertungen herangezogen wurden, vorgestellt. Schließlich werden die (nichtparametrischen) statistischen Werkzeuge vorgestellt, die zur Verarbeitung der (ordinalskalierten) Daten verwendet wurden.

In **Kapitel 6** werden die Auswertungen und Ergebnisse der im Laufe der Studie für alle Schüler bestimmten Qualitätskategorien ihrer Argumentationen bzw. Beweise präsentiert. Im ersten Abschnitt werden – sortiert nach Aufgaben und Qualitätskategorien – Beispiele für Schülerbearbeitungen vorgestellt und analysiert. Danach erfolgt eine deskriptive Untersuchung der Kategorienverteilungen auf Basis von Quartils-Betrachtungen. Anschließend werden die quantitativen Ergebnisse, die mithilfe der in Kapitel 5 beschriebenen Werkzeuge bestimmt wurden, vorgestellt. Dabei liegt der Fokus erst auf den Querschnittbetrachtungen und danach auf den Längsschnittbetrachtungen.

In **Kapitel 7** werden die Ergebnisse in Bezug auf die Forschungsfragen ausführlich diskutiert und mit der Literatur abgeglichen. Abschlussarbeiten, die im Zusammenhang mit dieser Arbeit an der Leibniz-Universität-Hannover entstanden sind, spielen hier ebenfalls eine wichtige Rolle und werden in Beziehung zu den hier vorgestellten Ergebnissen gesetzt bzw. ergänzen diese.

2. Argumentieren

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird der Begriff des Argumentierens konkretisiert, der für die in dieser Arbeit beschriebene Forschung eine zentrale Bedeutung hat. Dessen Etymologie (vgl. Abschnitt 2.2) kann dazu erste Anhaltspunkte liefern.

Bedingt durch den Forschungsansatz liegt der Fokus hier auf der schriftlichen Darlegung fertiger Argumentationen. Die Schüler wurden im Unterricht zwar angeleitet, in dialogischen Situationen miteinander zu argumentieren, das Hauptaugenmerk der hier durchgeführten Untersuchungen liegt aber auf individuell und schriftlich angefertigten Argumentationen von Schülern zu gegebenen mathematischen Problemen. Es muss also der Frage nachgegangen werden, inwiefern sich allgemeine, literaturgegebene Definitionen des Begriffes *Argumentieren* (bzw. *Argument* und *Argumentation*) auf diese spezielle Situation übertragen lassen.

Definitionen für das Argumentieren aus der Literatur weisen eine enorme Bedeutungsvielfalt auf. Insbesondere das Verhältnis zu den artverwandten Begriffen *Begründen* und *Beweisen* wird in den herangezogenen Quellen höchst unterschiedlich beurteilt. Daher ist es erforderlich, die verschiedenen Sichtweisen einander gegenüber zu stellen und daraus eine für diese Arbeit grundlegende Vorstellung vom Argumentieren herauszuarbeiten.

Die vergleichende Untersuchung verschiedener Argumentationsmodelle aus der Literatur wird schließlich in der Entwicklung eines eigenen Modells münden, das sich auch als grundlegend für die Auswertungsmethodik erweisen wird. Dieses „Drei-Ebenen-Modell“ basiert auf den Vorstellungen Stephen Toulmins (1958, deutsch 1975) und beschreibt den Aufbau einer Argumentation als organische Struktur mit drei hierarchischen Ebenen.

2.2 Etymologie des Begriffs „Argumentieren“

Der Wortstamm des Begriffs Argumentieren lässt sich bis in die proto-indo-europäische Sprache zurückverfolgen: Nach dem Wörterbuch von Georges (1995, S. 564) ist lateinisch *argumentum* „das, was die Kraft hat, etwas zu veranschaulichen“, das Verb *arguere* bedeutet u. a.: „im hellen Lichte zeigen, unumstößlich behaupten, beweisen“ und leitet sich vom altgriechischen Wort *ἀργός* (*argos*) ab, das nach dem Wörterbuch von Gemoll (1979, S. 119) „schimmernd, weiß“ bedeutet. Das entsprechende Wort *arjuna* aus dem Sanskrit bedeutet so viel wie: „weiß, hell, klar, aus Silber gemacht“. „Erhellen“ wäre also ein im etymologischen Sinne geeignetes Synonym für Argumentieren.

Der grundsätzliche Wert des „arguere“, des Argumentierens, war schon den antiken Rhetorikern bewusst. So wurde beispielsweise Cicero nach eigenen Aussagen von seinem Freund, dem berühmten römischen Juristen Gaius Trebatius Testa um eine Erläuterung der Topik von Aristoteles gebeten. Während einer Seereise im Jahre 44 v. Chr. schrieb er

die entsprechenden Gedanken aus dem Kopf nieder, da er keine Bücher bei sich hatte (vgl. Bayer, 1993, S. 9). Unter anderem betont er, dass „jede sorgfältige Methode des Erörterns zwei Teile umfaßt, den des Auffindens (von Argumenten) und den des Bewertens“ (ibid.). Auf diesen Umstand wird in Abschnitt 4.2 noch genauer eingegangen. Ein Argument ist für Cicero dabei ein „Vernunftsgrund, der in einer ungeklärten Sache Überzeugung schafft“ („Itaque licet definire locum esse argumenti sedem, argumentum autem rationem, quae rei dubiae faciat fidem“, ibid., S. 8). Das Finden des Ortes (locus), an dem sich ein Argument befindet, ist dagegen nach Ansicht des Autors ein Ziel des Problemlösens.

2.3 Argumentieren – allgemeine Begriffsbestimmung

Der Begriff *Argumentieren* ist in der Literatur sehr weit gefasst. Er hat formale, strukturelle und nicht zuletzt psychosoziale Aspekte.

Laut Duden (Bibliographisches Institut, 2007, S. 90) ist ein Argument ein „Rechtfertigungsgrund“ oder „(stichhaltiger, plausibler) Beweisgrund“, der als „Punkt einer Beweisführung“ fungiert. Schon in dieser Definition kann erahnt werden, dass Beweise über einen systematischen und strukturellen Aufbau verfügen.

Argumentationen können in den unterschiedlichsten Situationen entwickelt werden: Ein Kind argumentiert für die Erhöhung seines Taschengeldes, ein Rechtsanwalt legt vor Gericht eine Argumentation vor, welche die Unschuld seines Mandanten belegen soll, ein Mathematiker führt eine Argumentation zur Stützung eines zu beweisenden Satzes, im Bundestag wird über den Sinn eines zu verabschiedenden Gesetzes argumentiert und so fort. Gemeinsam ist diesen Beispielen eine allgemeine Grundstruktur: Es findet sich jeweils eine Behauptung sowie Argumente zu deren Stützung. Bei der Behauptung wie auch bei den Argumenten handelt es sich um einen bzw. mehrere sprachliche Sätze mit dem Charakter einer Aussage: Das Kind möchte beispielsweise die Behauptung „Ich habe ein Anrecht auf ein höheres Taschengeld“ durch das Zusammenspiel von Aussagen wie a) „meine Freunde erhalten mehr Taschengeld als ich“, b) „es ist ungerecht, wenn Kinder unterschiedlich viel Taschengeld bekommen“ und c) „das Leben sollte gerecht sein“ stützen. Der Aspekt des Zusammenspiels von Aussagen beim Argumentieren findet sich beispielsweise auch in der Argumentationsdefinition des niederländischen Kommunikationswissenschaftlers und Argumentationstheoretikers Frans Hendrik van Eemeren (Eemeren et al., 1996, S. 5):

Argumentation is a verbal and social activity of reason aimed at increasing (or decreasing) the acceptability of a controversial standpoint for the listener or reader, by putting forward a constellation of propositions intended to justify (or refute) the standpoint before a ‘rational judge’.

Habermas (1999, S. 38) betont in seiner Definition von Argumentationen die systematische Verknüpfung der Argumente mit der Behauptung („problematische Äußerung“):

Argumentationen nennen wir den Typus von Rede, in dem die Teilnehmer strittige Geltungsansprüche thematisieren und versuchen, diese mit Argumenten einzulösen oder zu

kritisieren. Ein Argument enthält Gründe, die in systematischer Weise mit dem Geltungsanspruch einer problematischen Äußerung verknüpft sind.

Diese Definitionen beschreiben Argumentationen als sozialen und kommunikativen Akt in dem Sinne, dass die Wahrheit einer zur Disposition stehenden Behauptung zwischen mehreren Personen mit Argumenten begründet oder widerlegt werden soll. Diese sozialen bzw. kommunikativen Aspekte lassen sich auf schriftlich dargelegte Argumentationen übertragen, wenngleich die Kommunikation hier naturgemäß einseitig erfolgt.

Die angegebenen Definitionen geben auch bereits Hinweise auf den prinzipiellen Aufbau von Argumentationen. Eemeren spricht von einer „Konstellation“ von Aussagen, Habermas beschreibt einen Aufbau aus Argumenten, die ihrerseits „Gründe“ enthalten. Diese noch vagen Begrifflichkeiten bezüglich des strukturellen Aufbaus von Argumentationen werden im Abschnitt 2.7 im Rahmen des „Drei-Ebenen-Modells“ konkretisiert.

2.4 Argumentieren, Begründen, Beweisen – Begriffsabgrenzungen

2.4.1 Curriculare Sichtweise

Der moderne Mathematikunterricht zielt neben dem Erlernen mathematischer Inhalte in demselben Maße auf den Erwerb von Handlungs- oder Prozesskompetenzen hin. Das mathematische Argumentieren spielt hierbei neben dem Problemlösen, dem Modellieren und anderen Kompetenzen eine zentrale Rolle (vgl. KMK, 2012; MK Niedersachsen, S. 2006b; 2015³). Die erlernten Handlungskompetenzen sollen in der Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten angewendet werden. Daher ist eine genaue Bestimmung des Begriffes *Argumentieren* erforderlich. In der Literatur wird dieser Begriff sehr unterschiedlich gebraucht. Interessant ist insbesondere die Untersuchung des Beziehungsgeflechts zu den artverwandten Begriffen *Begründen* und *Beweisen*.

Im schulischen Kontext steht die Handlungskompetenz *Argumentieren* im Primarbereich zunächst noch in unmittelbarem Zusammenhang mit der Handlungskompetenz *Kommunizieren*. Die Schüler sollen mathematische Sachverhalte mit eigenen Worten beschreiben können, Zusammenhänge entdecken und eigene Vermutungen aufstellen. Ziel ist es, die Schüler zu befähigen, „Behauptungen und Argumente auf ihre mathematische Schlüssigkeit zu überprüfen und zu bewerten. Vor allem bei der gemeinsamen Bearbeitung von Modellierungs- und Problemlöseaufgaben kommt dem Kommunizieren/Argumentieren besondere Bedeutung zu“ (MK Niedersachsen 2006a, S. 15).

Für den Bereich der Sekundarstufe I wird eine Vielzahl von unterrichtlichen Handlungen beschrieben, mit deren Hilfe das Argumentieren im Laufe der Schuljahre qualitativ entwickelt werden soll (MK Niedersachsen 2006b, S. 13, in ähnlicher Formulierung auch 2015, S. 7):

3 Die erstgenannte Quelle gibt die Version des niedersächsischen Kerncurriculums an, die zum Zeitpunkt der Studie maßgeblich war, die zweite Quelle ist die aktuelle Version.

Das Argumentieren hebt sich vom einfachen Informationsaustausch bzw. dem intuitiven Entscheiden vor allem durch den Wunsch nach Stimmigkeit ab. [...] Beim Argumentieren in innermathematischen Situationen spricht man allgemein vom Begründen und je nach Strenge auch vom Beweisen. Das Argumentieren umfasst ein breites Spektrum von Aktivitäten: vom Erkunden von Situationen, Strukturieren von Informationen, Fragen stellen, Aufstellen von Vermutungen, Angeben von Beispielen und Plausibilitätsbetrachtungen, über das schlüssige (auch mehrschrittige) Begründen bis hin zum formalen Beweisen. Hierbei kommen unterschiedliche Abstufungen von Strenge zum Tragen: vom intuitiven Begründen durch Verweis auf Plausibilität oder Beispiele bis zum mehrschrittigen Beweisen durch Zurückführen auf gesicherte Aussagen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln Einsicht in die Notwendigkeit allgemeingültiger Begründungen von Vermutungen.

Das Argumentieren stellt hier also einen übergeordneten Begriff dar, der eine Reihe von teils mathematischen, teils aber auch alltäglichen Tätigkeiten umfasst. Die höheren Formen des Argumentierens werden als schlüssiges Begründen und formales Beweisen bezeichnet. Für das Begründen wird in Klammern zusätzlich noch die Möglichkeit der Mehrschrittigkeit erwähnt. Eine Begründung selbst, so kann vermutet werden, bezieht sich in diesem Sinne nur auf einen singulären Schritt. In den Bildungsstandards (KMK, 2012, S. 14), auf denen die Kerncurricula basieren, werden die Ausdrucksformen des Argumentierens ähnlich umrissen: „Das Spektrum reicht dabei von einfachen Plausibilitätsargumenten über inhaltlich-anschauliche Begründungen bis zu formalen Beweisen“. Als Leitfragen, die auf die auf die Kompetenz des Argumentierens abzielen, werden: „Begründen Sie!“, „Widerlegen Sie!“, „Gibt es?“ oder „Gilt das immer?“ (ibid.) genannt. Abbildung 2.1 (D. B.-B.) veranschaulicht den hier dargelegten Zusammenhang von Argumentieren, Begründen und Beweisen.

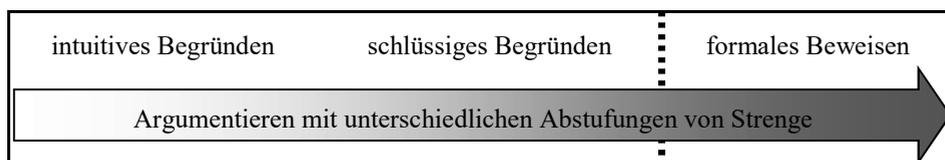


Abb. 2.1: Curriculare Sicht: Zentraler Begriff: Argumentieren

2.4.2 „Niveaustufen des Beweisen“ bei Holland

Holland (2007³, S. 131) spricht im Gegensatz zu den curricularen Vorgaben von den „Niveaustufen des Beweisen“, er legt diesen Begriff also dem Beziehungsgeflecht zugrunde. Die unterste Stufe bildet das Argumentieren, gefolgt von der „Stufe des inhaltlichen Schließens“ sowie der „Stufe des formalen Schließens“ (vgl. Abbildung 2.2, D.B.-B.).

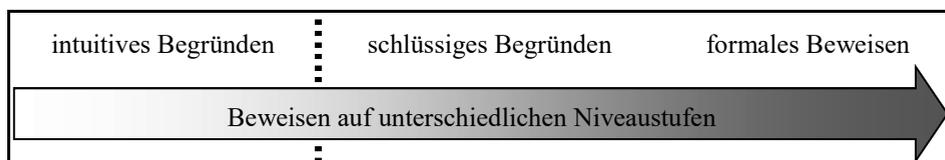


Abb. 2.2: Niveaustufen des Beweisen nach Holland

2.4.3 „Kontinuum des Begründens“ bei Brunner

Brunner (2014, S. 29–31) beschreibt ebenfalls das Problem mangelnder Festlegung der genannten Begriffe und stellt in Bezug auf das Verhältnis von Argumentieren und Beweisen zwei in der Literatur vertretene Sichtweisen gegenüber: B. Pedemonte, H. Winter und andere sehen einen eher engen Zusammenhang zwischen den beiden Begriffen, N. Balacheff, R. Duval und andere dagegen verstehen es als sehr unterschiedliche Tätigkeiten. Balacheff (1999, S. 4) verlegt den Begriff des Argumentierens in die Welt des Alltags: „The sources of argumentative competence are in natural language and in practices whose rules are frequently of a profoundly different nature from those required by mathematics“. Die Gesetzmäßigkeiten des Argumentierens können daher sogar für das Erlernen des Beweisens in der Schule hinderlich sein: „argumentation constitutes an epistemological obstacle to the learning of mathematical proof“ (ibid. S. 5). Balacheffs Position wird in Abschnitt 2.5 noch genauer verdeutlicht.

Duval (1991, S. 233, zitiert nach Brunner, 2014, S. 29) stellt Argumentieren und Beweisen als zwei unterschiedliche Formen des Begründens gegenüber: „Deductive thinking does not work like argumentation. However, these two kinds of reasoning use very similar linguistic forms and propositional connectives“.

Diese Gegenüberstellung differenziert Brunner (2014, S. 30 f.) in vier Tätigkeiten, die das „Kontinuum des Begründens“ (ibid., S. 49) abstecken:

alltagsbezogenes Argumentieren	Argumentieren mit mathematischen Mitteln	logisches Argumentieren mit mathematischen Mitteln	Formal-deduktives Beweisen
folgt den Regeln des jeweiligen Kontextes und zielt darauf ab, die Annahme oder Ablehnung eines bestimmten Standpunktes zu erreichen. Dafür stehen bestimmte Begründungsarten zur Verfügung, darunter auch solche, die nicht den mathematischen Konventionen entsprechen.	[...] bezieht zwingend mathematische Mittel in die Argumentation ein, nicht aber notwendigerweise logisches Schließen. Denkbar ist hier beispielsweise auch ein Argumentieren auf der Basis eines speziellen Beispiels	verlangt [...] ein streng logisches Vorgehen, bezieht jedoch mathematische Mittel ein, die nicht zwingend formaler Art sein müssen. Es können hier auch sprachlich formulierte Schlussfolgerungen oder anschaulich an einer Handlung oder Skizze gezeigte vorliegen.	[...] beruht auf der deduktiven Vorgehensweise mit formal korrekten Argumenten und stellt den Prozess formal-symbolischer Sprache dar.



Abb. 2.3: Argumentieren und Beweisen als Kontinuum bei Brunner (2014, S. 30 f.)