Fernando Ferreira · Reinhard Kahle · Giovanni Sommaruga *Eds.*

Axiomatic Thinking I

VIII. Ordentliche Sitzung

der

Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

gemeinsam mit der

99. Jahresve[illegible]ammlung der Schweiz. Naturforschenden G[illegible]sellschaft

in Zürich

[illegible] de[illegible] 11. [illegible] 1[illegible]7, i[illegible] Hörsaal [illegible]4 d[illegible] Univ[illegible]

[illegible] pun[illegible] 8 U[illegible]

Vorträge und Mitteilungen der Herren:

1. *A. Emch* (Urbana U.S.A.): Ueber ebene Kurven, welche die n. Einheitswurzeln in der Ebene zu reellen Brennpunkten haben.
2. [illegible] *Pó*[illegible] (Zürich): Arithm[illegible]sche Eig[illegible]schaften der Reihenentwicklungen r[illegible]onaler Funktionen.
3. [illegible] *Gon*[illegible] [illegible] the[illegible] sur [illegible] [illegible]
4. [illegible] *Kol*[illegible] [illegible] [illegible] métrique[illegible] de[illegible] cour[illegible] a[illegible]brique[illegible].
5. [illegible] *Spi*[illegible] (B[illegible]): [illegible] S[illegible] r[illegible]ale[illegible] Funkt[illegible]
6. [illegible] *Hu*[illegible] [illegible] V[illegible]allg[illegible] [illegible]ung des [illegible] [illegible]
7. [illegible] *Cara*[illegible] (G[illegible]): [illegible] Behandl[illegible] der [illegible] von D[illegible]pelintegralen.

ERFRISCHUNGSPAUSE.

8. *D. Hilbert* (Göttingen): Axiomatisches Denken.
9. *A. Speiser* (Zürich): Ueber den Klassenkörper.
10. *S. Bays* (Fribourg): Une preuve directe que les systèmes triples de Kirkman et de Netto sont les seuls systèmes de triples de Steiner existants pour 13 éléments.
11. *L. G. Du Pasquier* (Neuchâtel): Sur un point de la théorie des nombres hypercomplexes.
12. *H. Berliner* (Bern): Ueber ein geometrisches Gesetz der infiniten Pluralität.
13. *K. Merz* (Chur): Quadratische Transformation einer Kollineation.
14. *G. Pólya* (Zürich): Ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern.
15. *L. G. Du Pasquier* (Neuchâtel): Une nouvelle formule d'interpolation dans la théorie mathématique de la population.

NB. Die Herren Vortragenden werden ersucht, für die Dauer ihrer Vorträge nicht mehr als 20 Minuten in Aussicht zu nehmen und dem Sekretär einen Auszug ihrer Mitteilungen noch vor Schluss der Tagung abzugeben.

Gemeinsames Mittagessen um 1 Uhr im Hotel „Pelikan"

Im Anschluss daran sollen die Vereinsgeschäfte erledigt werden:

Abnahme der Jahresrechnung und Neuwahl des Vorstandes.

An die Mitglieder der Schweiz. Mathematischen Gesellschaft!

Sehr geehrte Herren Kollegen, wir unterbreiten Ihnen die reichhaltige Tagesordnung unserer ordentlichen Jahresversammlung und bitten um zahlreiche Teilnahme an dieser Tagung, welche eine besondere wissenschaftliche Bedeutung erhält durch den Vortrag des Herrn Prof. Hilbert aus Göttingen, der auf eine Einladung des Vorstandes über eine wissenschaftliche Methode sprechen wird, die ihm eine ausschlaggebende Förderung verdankt.

Der Vorstand der Schweiz. Mathematischen Gesellschaft:

Der Präsident: Prof. Dr. M. Grossmann (Zürich).

Der Vizepräsident: Prof. Dr. M. Plancherel (Fribourg).

Der Sekretär: Prof. Dr. L. Crelier (Biel-Bern).

Springer

Axiomatic Thinking I

VIII. Ordentliche Sitzung

der

Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

gemeinsam mit der

99. Jahresversammlung der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft

in Zürich

Dienstag, den 11. September 1917, im Hörsaal 304 der Universität

Vormittags punkt 8 Uhr

Vorträge und Mitteilungen der Herren:

1. *A. Emch* (Urbana U.S.A.): Ueber ebene Kurven, welche die n. Einheitswurzeln in der Ebene zu reellen Brennpunkten haben.
2. *G. Pólya* (Zürich): Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen.
3. *F. Gonseth* (Zürich): Un théorème sur deux ellipsoides confocaux.
4. *L. Kollros* (Zürich): Propriétés métriques des courbes algébriques.
5. *O. Spiess* (Basel): Ein Satz über rationale Funktionen.
6. *A. Hurwitz* (Zürich): Verallgemeinerung des Pohlkeschen Satzes.
7. *C. Carathéodory* (Göttingen): Ueber die geometrische Behandlung der Extrema von Doppelintegralen.

ERFRISCHUNGSPAUSE.

8. *D. Hilbert* (Göttingen): Axiomatisches Denken.
9. *A. Speiser* (Zürich): Ueber den Klassenkörper.
10. *S. Bays* (Fribourg): Une preuve directe que les systèmes triples de Kirkman et de Netto sont les seuls systèmes de triples de Steiner existants pour 13 éléments.
11. *L. G. Du Pasquier* (Neuchâtel): Sur un point de la théorie des nombres hypercomplexes.
12. *H. Berliner* (Bern): Ueber ein geometrisches Gesetz der infiniten Pluralität.
13. *K. Merz* (Chur): Quadratische Transformation einer Kollineation.
14. *G. Pólya* (Zürich): Ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern.
15. *L. G. Du Pasquier* (Neuchâtel): Une nouvelle formule d'interpolation dans la théorie mathématique de la population.

NB. Die Herren Vortragenden werden ersucht, für die Dauer ihrer Vorträge nicht mehr als 20 Minuten in Aussicht zu nehmen und dem Sekretär einen Auszug ihrer Mitteilungen noch vor Schluss der Tagung abzugeben.

Gemeinsames Mittagessen um 1 Uhr im Hotel „Pelikan"

Im Anschluss daran sollen die Vereinsgeschäfte erledigt werden:

Abnahme der Jahresrechnung und Neuwahl des Vorstandes.

An die Mitglieder der Schweiz. Mathematischen Gesellschaft!

Sehr geehrte Herren Kollegen, wir unterbreiten Ihnen die reichhaltige Tagesordnung unserer ordentlichen Jahresversammlung und bitten um zahlreiche Teilnahme an dieser Tagung, welche eine besondere wissenschaftliche Bedeutung erhält durch den Vortrag des Herrn Prof. Hilbert aus Göttingen, der auf eine Einladung des Vorstandes über eine wissenschaftliche Methode sprechen wird, die ihm eine ausschlaggebende Förderung verdankt.

Der Vorstand der Schweiz. Mathematischen Gesellschaft:

Der Präsident:
Prof. Dr. M. Grossmann (Zürich).

Der Vizepräsident:
Prof. Dr. M. Plancherel (Fribourg).

Der Sekretär:
Prof. Dr. L. Crelier (Biel-Bern).

Programme of the meeting of the Swiss Mathematical Society, September 11, 1917, in Zurich, Switzerland.
Courtesy of the Schweizerische Mathematische Gesellschaft.

Fernando Ferreira · Reinhard Kahle ·
Giovanni Sommaruga
Editors

Axiomatic Thinking I

Springer

Editors
Fernando Ferreira
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa
Lisboa, Portugal

Reinhard Kahle
Carl Friedrich von Weizsäcker-Zentrum
Universität Tübingen
Tübingen, Germany

Giovanni Sommaruga
Department of Mathematics
ETH Zurich
Zurich, Switzerland

ISBN 978-3-030-77656-5 ISBN 978-3-030-77657-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-030-77657-2

Mathematics Subject Classification: 03-06, 03-03, 03A05, 03A10

This Springer imprint is published by the registered company Springer Nature Switzerland AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Preface

This book originates with two events commemorating the centenary of David Hilbert's seminal talk on *Axiomatic Thinking* (*Axiomatisches Denken*) which he delivered on September 11, 1917, at Zurich University for the Swiss Mathematical Society. This talk marks arguably the birth of proof theory as it was conceived by David Hilbert in the 1920s. It makes clear that the formalistic endeavor which one may find in the development of mathematical logic by the Hilbert school is, at best, a technical ingredient of a much larger enterprise which attempts to base every science deserving this predicate on a transparent *framework of concepts* (*Fachwerk von Begriffen*), developed and investigated by the axiomatic method.

On September 14–15, 2017, a joint meeting of the Swiss Mathematical Society and the Swiss Society for Logic and Philosophy of Science on *Axiomatic Thinking* took place at the University of Zurich, Switzerland, the place where Hilbert had spoken 100 years ago. It was followed, on October 11–14, 2017, by a conference on the same topic at the *Academia das Ciéncias de Lisboa* and *Faculdade de Ciéncias e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa* in Lisbon which was also the annual meeting of the *Académie Internationale de Philosophie des Sciences*. This meeting included a *Panel Discussion on the Foundations of Mathematics* with Peter Koellner, Michael Rathjen, and Mark van Atten as invited panelists.

The current volumes contain contributions of speakers of both meetings and also papers by other researchers in the field. In accordance with the broad range of topics addressed by Hilbert, the articles in Vol. I focus on reflections on the *History and Philosophy* of Axiomatic Thinking; Vol. II provides in Part I examples of developments of axiomatic thinking in *Logic*, especially in Proof Theory, inspired by Hilbert's ideas; Part II is concerned with applications of the axiomatic method in *Mathematics*; and Part III addresses the use of the axiomatic method in *other sciences*, namely Computer Science, Physics, and Theology.

Our dear friend Thomas Strahm, an inspired logician, followed the development of this book closely. But sadly he is not here to see its publication. Thomas Strahm died at the end of April, 2021. We dedicate this book to him—an excellent logician, and even more a kind, sensitive, humorous and wonderful friend.

Lisboa, Portugal — Fernando Ferreira
Tübingen, Germany — Reinhard Kahle
Zurich, Switzerland — Giovanni Sommaruga
March 2021

Acknowledgements

The editors are grateful to all speakers in Zurich and Lisbon who contributed to the success of the two meetings, as well as to the meetings' co-organizers, Thomas Kappeler and Viktor Schroeder in Zurich, and Gerhard Heinzmann, João Cordovil, João Enes, Mirko Engler, António Fernandes, Gilda Ferreira, Emanuele Frittaion, Nuno Jerónimo, Isabel Oitavem, Cecília Perdigão, and Gabriele Pulcini in Lisbon. The meeting in Zurich was supported by the Swiss Mathematical Society SMS, the Swiss Society for Logic and Philosophy of Science SSLPS, the Swiss Academy of Sciences SCNAT, and the Institute of Mathematics, University of Zurich, which is gratefully acknowledged. Equally, many thanks for the support of the conference in Lisbon to the Académie Internationale de Philosophie des Sciences AIPS; the Academia das Ciências de Lisboa; the Centro Internacional de Matemética, CIM; and the following research centers: Centro de Matemética, Aplicações Fundamentais e Investigação Operacional, CMAF-CIO; Centro de Matemática e Aplicações, CMA; Centre for Philosophy of Sciences of the University of Lisbon, CFCUL. The Portuguese Science Foundation (Fundação para a Ciência e a Tecnologia, FCT) supported the conference through the projects, UID/FIL/00678/2013, UID/MAT/00297/2013, UID/MAT/04561/2013, and PTDC/MHC-FIL/2583/2014 (*Hilbert's 24th Problem*). For the preparation of the current volumes, the first editor acknowledges the support by the Portuguese Science Foundation (UIDB/04561/2020) and the second editor was also supported by the Udo Keller Foundation.

Pro domo, we'd like to acknowledge Reinhard's enormous efforts and drive without which this book might still be a mere project. (Fernando and Giovanni).

Contents

Contents Overview of Vol. 2

Editors and Contributors

About the Editors

Fernando Ferreira is Professor of Mathematics at Universidade de Lisboa. He received his Ph.D. at Pennsylvania State University in 1988 under the direction of Stephen Simpson. He was a Fulbright Scholar at Harvard University (Spring 2004) and Tinker Visiting Professor at Stanford University (Fall 2009). He has written papers in weak systems of arithmetic and analysis, proof theory (especially functional interpretations) and philosophy and foundations of mathematics. He also wrote two papers on the problem of truth in Parmenides and Plato. He is a member of Academia das Ciências de Lisboa.

Reinhard Kahle is Carl Friedrich von Weizsäcker Professor for Philosophy and History of Science at the University of Tübingen. Before he holds professorships in Mathematics at the University of Coimbra and at the Universidade Nova in Lisbon, at the end as full professor for Mathematical Logic. He is a fellow of the *Académie Internationale de Philosophie des Sciences*. His main research interests are proof theory and the history and philosophy of modern mathematical logic, in particular, of the Hilbert School. He has (co-)edited more than ten books and special issues as, for instance, Gentzen's Centenary: The quest for consistency (Springer, 2015) and The Legacy of Kurt Schütte (Springer, 2020), both together with Michael Rathjen.

Giovanni Sommaruga did his studies in philosophy and philosophical and mathematical logic at the University of Freiburg (Switzerland), Stanford University, and the University of Siena. In 1996 he became assistant professor in logic and philosophy of science at the Albert Ludwig University Freiburg (Germany), and since 2008 he has been senior scientist in philosophy of the formal sciences (logic, mathematics, theoretical computer science) at ETH Zurich. His main research interests are in philosophy and foundations of mathematics, in the history of mathematical logic, and more recently in the history and philosophical issues concerning computability and information in theoretical computer science.

Contributors

Evandro Agazzi Center for Bioethics of the Panamerican University of Mexico City, Universities of Genoa, Genoa, Italy

Paul Bernays Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich, Switzerland

Erwin Engeler Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich, Switzerland

Fernando Ferreira Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal

José Ferreirós Universidad de Sevilla, Seville, Spain

David Hilbert Mathematisches Institut, Universität Göttingen, Göttingen, Germany

Reinhard Kahle Carl Friedrich von Weizsäcker-Zentrum, Universität Tübingen, Tübingen, Germany;
CMA, FCT, Universidade Nova de Lisboa, Caparica, Portugal

Barry Mazur Department of Mathematics, Harvard University, Cambridge, MA, USA

Peter Schroeder-Heister Department of Computer Science, University of Tübingen, Tübingen, Germany

Wilfried Sieg Pittsburgh, USA

Craig Smoryński Westmont, IL, USA

Giovanni Sommaruga Eidgenössische Technische Hochschule, Zurich, Switzerland

Chapter 1
Axiomatisches Denken

David Hilbert

Abstract Address delivered by David Hilbert at the annual meeting of the Swiss Mathematical Society in Zurich on September 11, 1917. The German text is from *Mathematische Annalen*, 78:405–415, 1918; the English translation of Joong Fang was first published in Fang, J., editor, *HILBERT–Towards a Philosophy of Modern Mathematics II*, Paideia Press, Hauppauge, N.Y. 1970.

Photography of the participants of the annual meeting of the Swiss Mathematical Society 1917, taken at the back side of the *Landesmuseum* in Zurich. Hilbert is standing in the center of the first row. *Source* Bildarchiv of the ETH Zurich. `doi:10.3932/ethz-a-000046430`.

D. Hilbert (1862–1943)
Göttingen, Germany

F. Ferreira et al. (eds.), *Axiomatic Thinking I*,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-77657-2_1

1.1 Axiomatisches Denken

Wie im Leben der Völker das einzelne Volk nur dann gedeihen kann, wenn es auch allen Nachbarvölkern gut geht, und wie das Interesse der Staaten es erheischt, daß nicht nur innerhalb jedes einzelnen Staates Ordnung herrsche, sondern auch die Beziehungen der Staaten unter sich gut geordnet werden müssen, so ist es auch im Leben der Wissenschaften. In richtiger Erkenntnis dessen haben die bedeutendsten Träger des mathematischen Gedankens stets großes Interesse an den Gesetzen und der Ordnung in den Nachbarwissenschaften bewiesen und vor allem zugunsten der Mathematik selbst von jeher die Beziehungen zu den Nachbarwissenschaften, insbesondere zu den großen Reichen der Physik und der Erkenntnistheorie gepflegt. Das Wesen dieser Beziehungen und der Grund ihrer Fruchtbarkeit, glaube ich, wird am besten deutlich, wenn ich Ihnen diejenige allgemeine Forschungsmethode schildere, die in der neueren Mathematik mehr und mehr zur Geltung zu kommen scheint: ich meine die *axiomatische Methode*.

Wenn wir die Tatsachen eines bestimmten mehr oder minder umfassendenbreak Wissensgebietes zusammenstellen, so bemerken wir bald, daß diese Tatsachen einer Ordnung fähig sind. Diese Ordnung erfolgt jedesmal mit Hilfe eines gewissen *Fachwerkes von Begriffen* in der Weise, daß dem einzelnen Gegenstande des Wissensgebietes ein Begriff dieses Fachwerkes und jeder Tatsache innerhalb des Wissensgebietes eine logische Beziehung zwischen den Begriffen entspricht. Das Fachwerk der Begriffe ist nichts anderes als die *Theorie* des Wissensgebietes.

So ordnen sich die geometrischen Tatsachen zu einer Geometrie, die arithmetischen Tatsachen zu einer Zahlentheorie, die statischen, mechanischen, elektrodynamischen Tatsachen zu einer Theorie der Statik, Mechanik, Elektrodynamik oder die Tatsachen aus der Physik der Gase zu einer Gastheorie. Ebenso ist es mit den Wissensgebieten der Thermodynamik, der geometrischen Optik, der elementaren Strahlungstheorie, der Wärmeleitung oder auch mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Mengenlehre. Ja es gilt von speziellen rein mathematischen Wissensgebieten, wie Flächentheorie, Galoisscher Gleichungstheorie, Theorie der Primzahlen nicht weniger als für manche der Mathematik fern liegende Wissensgebiete wie gewisse Abschnitte der Psychophysik oder die Theorie des Geldes.

Wenn wir eine bestimmte Theorie näher betrachten, so erkennen wir allemal, daß der Konstruktion des Fachwerkes von Begriffen einige wenige ausgezeichnete Sätze des Wissensgebietes zugrunde liegen und diese dann allein ausreichen, um aus ihnen nach logischen Prinzipien das ganze Fachwerk aufzubauen.

So genügt in der Geometrie der Satz von der Linearität der Gleichung der Ebene und von der orthogonalen Transformation der Punktkoordinaten vollständig, um die ganze ausgedehnte Wissenschaft der Euklidischen Raumgeometrie allein durch die Mittel der Analysis zu gewinnen. Zum Aufbau der Zahlentheorie ferner reichen die Rechnungsgesetze und Regeln für ganze Zahlen aus. In der Statik übernimmt die gleiche Rolle der Satz vom Parallelogramm der Kräfte, in der Mechanik etwa die

1.2 Axiomatic Thinking

Each nation can do well, as in the life of individuals, only if things go equally well in all of her neighboring nations; the life of sciences is similar to that of states whose interest demands that everything be in order within individual states as properly as their relations be in good order among themselves. Understanding this correctly, the most important carriers of mathematical thoughts have always shown great interest in the law and order in neighboring sciences and, above all for the benefit of mathematics, have cultivated the relations to the neighboring sciences, in particular to physics and epistemology. The essence of these relations and the ground of their fertility will be made most distinct, I believe, if I sketch to you that general method of inquiry which appears to grow more and more significant in modern mathematics; the *axiomatic method*, I mean.

If we collate the facts of a specific field of more or less comprehensive knowledge, then we shortly observe that these facts can be set in order. This order occurs invariably with the aid of certain *framework of concepts* such that there exists correspondence between the individual objects in the field of knowledge and a concept of this framework and between those facts within the field of knowledge and a logical relation among concepts. The framework of concepts is nothing but the *theory* of the field of knowledge.

The geometric facts thus order themselves into a geometry, the arithmetic facts into a number theory, the static, mechanic, electrodynamic facts into a theory of statics, mechanics, electrodynamics, or the facts out of physics of gases into a gas theory. The same holds for the fields of knowledge of thermodynamics, of geometric optics, of elementary radiation theory, of heat conduct, or even for probability theory and set theory. Indeed, it holds as well for such specific fields of pure mathematical knowledge as theory of surfaces, Galois theory of equations, theory of primes, and even for none other than some fields of knowledge remotely related to mathematics such as certain segments of psychophysics or economics.

If we examine a specific theory more closely, we then discern on all occasions that at the bottom of the construction of a framework of concepts are certain few prominent propositions of the field of knowledge, which alone are then sufficient for building up the entire framework upon them in accordance with logical principles.

The proposition of the linearity of the planar equation is thus sufficient in geometry, and that of orthogonal transformation of point-coordinates is complete to produce the entirety of extensive knowledge in the geometry of Euclidean space solely by the means of analysis. Similarly, the laws and rules of computation for integers are sufficient for setting up the theory of numbers. The same role is taken over by the parallelogram law of forces in statics, something like Lagrangian

Lagrangeschen Differentialgleichungen der Bewegung und in der Elektrodynamik die Maxwellschen Gleichungen mit Hinzunahme der Forderung der Starrheit und Ladung des Elektrons. Die Thermodynamik läßt sich vollständig auf den Begriff der Energiefunktion und die Definition von Temperatur und Druck als Ableitungen nach ihren Variabeln, Entropie und Volumen, aufbauen. Im Mittelpunkt der elementaren Strahlungstheorie steht der Kirchhoffsche Satz über die Beziehungen zwischen Emission und Absorption; in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Gaußsche Fehlergesetz, in der Gastheorie der Satz von der Entropie als negativem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit des Zustandes, in der Flächentheorie die Darstellung des Bogenelementes durch die quadratische Differentialform, in der Gleichungstheorie der Satz von der Wurzelexistenz, in der Theorie der Primzahlen der Satz von der Realität und Häufigkeit der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ der grundlegende Satz.

Diese grundlegenden Sätze können von einem ersten Standpunkte aus als die *Axiome der einzelnen Wissensgebiete* angesehen werden: die fortschreitende Entwicklung des einzelnen Wissensgebietes beruht dann lediglich in dem weiteren logischen Ausbau des schon aufgeführten Fachwerkes der Begriffe. Zumal in der reinen Mathematik ist dieser Standpunkt der vorherrschende, und der entsprechenden Arbeitsweise verdanken wir die mächtige Entwicklung der Geometrie, der Arithmetik, der Funktionentheorie und der gesamten Analysis.

Somit hatte dann in den genannten Fällen das Problem der Begründung der einzelnen Wissensgebiete eine Lösung gefunden; diese Lösung war aber nur eine vorläufige. In der Tat machte sich in den einzelnen Wissensgebieten das Bedürfnis geltend, die genannten, als Axiome angesehenen und zugrunde gelegten Sätze selbst zu begründen. So gelangte man zu “Beweisen” für die Linearität der Gleichung der Ebene und die Orthogonalität der eine Bewegung ausdrückenden Transformation, ferner für die arithmetischen Rechnungsgesetze, für das Parallelogramm der Kräfte, für die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen und das Kirchhoffsche Gesetz über Emission und Absorption, für den Entropiesatz und den Satz von der Existenz der Wurzeln einer Gleichung.

Aber die kritische Prüfung dieser “Beweise” läßt erkennen, daß sie nicht an sich Beweise sind, sondern im Grunde nur die Zurückführung aufgewisse tiefer liegende Sätze ermöglichen, die nunmehr ihrerseits an Stelle der zu beweisenden Sätze als neue Axiome anzusehen sind. So entstanden die eigentlichen heute sogenannten *Axiome* der Geometrie, der Arithmetik, der Statik, der Mechanik, der Strahlungstheorie oder der Thermodynamik. Diese Axiome bilden eine tiefer liegende Schicht von Axiomen gegenüber derjenigen Axiomschicht, wie sie durch die vorhin genannten zuerst zugrundegelegten Sätze in den einzelnen Wissensgebieten charakterisiert worden ist. Das Verfahren der axiomatischen Methode, wie es hierin ausgesprochen liegt, kommt also einer *Tieferlegung der Fundamente* der einzelnen Wissensgebiete gleich, wie eine solche ja bei jedem Gebäude nötig wird in dem Maße, als man dasselbe ausbaut, höher führt und dennoch für seine Sicherheit bürgen will.

differential equations of motion in mechanics, and Maxwell's equations accepting the condition of rigidity and change of electrons in electrodynamics. Thermodynamics is completely built upon the concept of energy function and the definition of temperature and pressure as derivatives from their variables, entropy, and volume. In the midpoint of elementary radiation theory there stands Kirchhoff's law on the relations between emission and absorption; there is the Gaussian law of error in the calculus of probability, the theorem of entropy as negative logarithm of probability of events in the gas theory, the representation of arc elements by quadratic differential form in the theory of surfaces, the existence theorem of roots in the theory of equations, the reality and frequency theorem of zero-points of Riemann zeta function, the fundamental theorem in the theory of primes.

Viewed from a primary standpoint, these theorems may be looked upon as the *axioms of individual fields of knowledge*; the advancing development of individual fields of knowledge rests then on the more extensive logical enlargement of the completed framework of concepts. This standpoint predominates principally in pure mathematics, and we are indebted for the corresponding modes of operation to the mighty development of geometry, arithmetic, function theory, and analysis in entirety.

In the preceding cases the problem of founding individual fields of knowledge had consequently obtained a solution; this solution, however, was only a tentative one. As a matter of fact, it became necessary in individual fields of knowledge to found anew the aforementioned founding propositions themselves, once considered axioms and placed at the foundation. So came into being the "proofs" for the linearity of the planar equation and the orthogonality of the transformation expressing a motion, and also for the laws of arithmetic computations, for the parallelogram of forces, for the Lagrangian equations of motion and Kirchhoff's law of emission and absorption, for the principle of entropy and the existence theorem of the roots of an equation.

But the critical examination of these "proofs" makes it discernible that they are not proofs in themselves; rather, they are in the main only capable of leading back to certain more deeply lying propositions which in turn are now to be looked upon as new axioms in place of those propositions to be proved. So originated the proper, currently so-called axioms of geometry, of arithmetic, of statics, of mechanics, of radiation theory or of thermodynamics. These axioms form a more deeply lying layer of axioms opposite to another layer of axioms as they have been characterized by the aforementioned propositions of the first foundation in individual fields of knowledge. The procedure of the axiomatic method, as articulated here, comes thus up to a *deeper-laying of foundations* of individual fields of knowledge, just as such a one is indeed necessary for each building according as it will be enlarged, built higher, and yet vouched for its safety.

Soll die Theorie eines Wissensgebietes, d. h. das sie darstellende Fachwerk der Begriffe, ihrem Zwecke, nämlich der Orientierung und Ordnung dienen, so muß es vornehmlich gewissen zwei Anforderungen genügen: *erstens* soll es einen Überblick über die *Abhängigkeit* bzw. *Unabhängigkeit* der Sätze der Theorie und *zweitens* eine Gewähr der *Widerspruchslosigkeit* aller Sätze der Theorie bieten. Insbesondere sind die Axiome einer jedenTheorie nach diesen beiden Gesichtspunkten zu prüfen.

Beschäftigen wir uns zunächst mit der Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Axiome.

Das klassische Beispiel für die Prüfung der Unabhängigkeit eines Axioms bietet das *Parallelenaxiom* in der Geometrie. Die Frage, ob der Parallelensatz durch die anderen Axiome schon bedingt ist, verneinte Euklid, indem er ihn unter die Axiome setzte. Die Untersuchungsmethode Euklids wurde vorbildlich für die axiomatische Forschung, und seit Euklid ist zugleich die Geometrie das Musterbeispiel für eine axiomatisierte Wissenschaft überhaupt.

Ein anderes Beispiel für eine Untersuchung über die Abhängigkeit der Axiome bietet die klassische Mechanik. Vorläufigerweise konnten, wie vorhin bemerkt, die Lagrangeschen Gleichungen der Bewegung als Axiome der Mechanik gelten — läßt sich doch auf diese in ihrer allgemeinen Formulierung für beliebige Kräfte und beliebige Nebenbedingungen die Mechanik gewiß vollständig gründen. Bei näherer Untersuchung zeigt sich aber, daß beim Aufbau der Mechanik sowohl beliebige Kräfte wie beliebige Nebenbedingungen vorauszusetzen unnötig ist und somit das System von Voraussetzungen vermindert werden kann. Diese Erkenntnis führt einerseits zu dem Axiomensystem von BOLTZMANN, der nur Kräfte, und zwar speziell Zentralkräfte, aber keine Nebenbedingungen annimmt und dem Axiomensystem von HERTZ, der die Kräfte verwirft und mit Nebenbedingungen, und zwar speziell mit festen Verbindungen auskommt. Diese beiden Axiomensystemebilden somit eine tiefere Schicht in der fortschreitenden Axiomatisierung der Mechanik.

Nehmen wir bei Begründung der Galoisschen Gleichungstheorie die Existenz der Wurzeln einer Gleichung als Axiom an, so ist dieses sicher ein abhängiges Axiom; denn jener Existenzsatz ist aus den arithmetischen Axiomen beweisbar, wie zuerst GAUSS gezeigt hat.

Ähnlich verhält es sich damit, wenn wir etwa den Satz von der Realität der Nullstellen der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ in der Primzahlentheorie als Axiom annehmen wollten: beim Fortschreiten zur tieferen Schicht der reinen arithmeti- schen Axiome würde der Beweis dieses Realitätssatzes notwendig sein und dieser erst uns die Sicherheit der wichtigen Folgerungen gewähren, die wir durch seine Postulierung schon jetzt für die Theorie der Primzahlen aufgestellt haben.

Besonderes Interesse für die axiomatische Behandlung bietet die Frage der Abhängigkeit der Sätze eines Wissensgebietes von dem Axiom der *Stetigkeit*.

In der Theorie der reellen Zahlen wird gezeigt, daß das Axiom des Messens, das sogenannte Archimedische Axiom, von allen übrigen arithmetischen Axiomen unabhängig ist. Diese Erkenntnis ist bekanntlich für die Geometrie von wesentlicher Bedeutung, scheint mir aber auch für die Physik von prinzipiellem Interesse;

If the theory of a field of knowledge, that is, the framework of concepts that represents the theory, is to serve its purpose, namely the orientation and order, it must then satisfy chiefly two fixed demands: it must offer, first, a general view of the *dependence* or *independence* of the propositions of the theory and, second, a guarantee of *consistency* of all propositions of the theory. In particular, the axioms of each theory have to be proved in accordance with these two viewpoints.

Let us work first at the dependence or independence of axioms.

The *parallel axiom* in geometry offered the classic example for the examination of independence of an axiom. Euclid answered in the negative to the question as to whether the proposition of parallels is already conditioned by other axioms, because he placed it under the axioms. Euclid's method of investigation became typical of the axiomatic investigation and, since Euclid, geometry has at once been the model example for an axiomatic science in general.

Classic mechanics offers another example for an investigation of independence of axioms. The Lagrangian equation of motion, as has already been observed, could act as axioms of mechanics—upon these does mechanics no doubt found itself completely in their general formulation for arbitrary forces and arbitrary secondary conditions. A closer examination reveals, however, that arbitrary forces as well as arbitrary secondary conditions are unnecessary to presuppose for the construction of mechanics, and that, consequently, the system of presuppositions can be reduced. This recognition leads on the one hand to the axiomatic system of Boltzmann who presupposes only forces, indeed central forces in particular, and on the other hand to the axiomatic system of Hertz who rejects forces and wants no more than the secondary conditions, indeed fixed connections in particular. These two axiomatic systems form thus a deeper layer in the advancing axiomatization of mechanics.

It is similarly the case if we would assume as an axiom something like the reality theorem of zero points of Riemann zeta function in the theory of primes. The proof of this reality theorem would become necessary for the progress towards the deeper layer of pure arithmetic axioms, and it would best guarantee the safety of important conclusions; we have already set up the axioms through its postulation for the theory of primes.

Special interest for the axiomatic treatment is offered by the question of dependence of the propositions of a field of knowledge on the axiom of continuity.

It is shown in the theory of real numbers that the axiom of measurement, the so-called Archimedian axiom, is independent of all other axioms of arithmetic. As is well-known, this knowledge is of essential significance to geometry, but it seems to me that it has principal interest in physics as well; for it leads us to the following