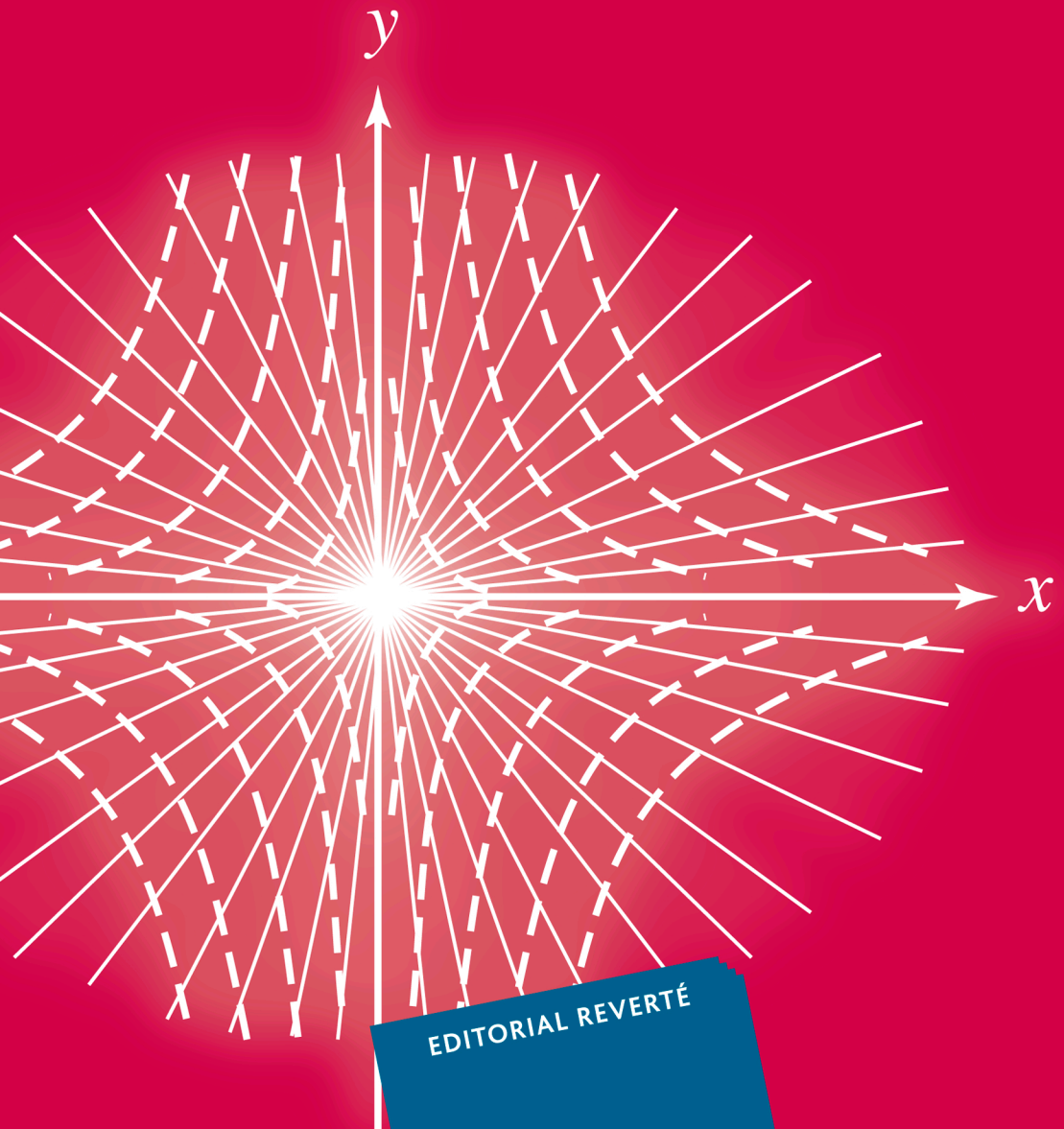


Tom M. Apostol

CÁLCULO I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear



EDITORIAL REVERTÉ

Tom M. Apostol

CÁLCULO I

Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título da obra original:

**CALCULUS, one – variable calculus,
with an introduction to linear algebra
Volume 1**

Edição original em língua inglesa publicada por

Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts, U.S.A.

Copyright © by Blaisdell Publishing Company

Edição em português:

© Editorial Reverté, S. A., 1988

ISBN: 978-84-291-5015-5 Tomo 1

ISBN: 978-84-291-5014-8 Obra completa

Edição em português (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 2021

ISBN: 978-84-291-9302-2

Tradução de:

Doutor António Ribeiro Gomes

Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da Universidade de Coimbra

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Proibida a reprodução de toda ou parte desta obra, sob qualquer forma, sem autorização por escrito do editor.

a

Jane e Stephen

PREFÁCIO

Excertos do Prefácio da Primeira Edição

Parece não haver acordo sobre o que deva constituir um primeiro curso de Cálculo e Geometria Analítica. Insistem alguns que a única via para compreender realmente o Cálculo principia com um estudo completo do sistema dos números reais, desenvolvendo-o passo a passo de uma maneira lógica e rigorosa. Argumentam outros que o Cálculo é fundamentalmente um instrumento para engenheiros e físicos; consequentemente acreditam que o curso deve conduzir às aplicações do Cálculo, fazendo apelo à intuição para depois, pela prática de resolução de problemas, desenvolver a destreza manipulatória. Há muito de correto em ambos os pontos de vista. O Cálculo é uma ciência dedutiva e um ramo da Matemática Pura. Ao mesmo tempo é muito importante lembrar que o Cálculo tem raízes profundas em problemas físicos e que muita da sua potência e beleza deriva da variedade das suas aplicações. É possível combinar um desenvolvimento teórico profundo com uma sadia formação técnica; este livro representa uma tentativa de estabelecimento de um equilíbrio sensato entre os dois pontos de vista. Embora tratando o Cálculo como uma ciência dedutiva, o livro não põe de parte as aplicações a problemas físicos. As demonstrações de todos os teoremas importantes são consideradas como uma parte fundamental do desenvolvimento das ideias matemáticas; as demonstrações são muitas vezes precedidas duma discussão geométrica ou intuitiva, de modo a dar ao estudante uma visão mais penetrante do porquê da demonstração. Embora estas discussões intuitivas satisfaçam os leitores que não estejam interessados na demonstração detalhada, também se inclui a demonstração completa para aqueles que preferem uma exposição mais rigorosa.

A sequência dos assuntos neste livro foi sugerida pelo desenvolvimento histórico e filosófico do Cálculo e da Geometria Analítica. Por exemplo a integração é tratada antes da derivação. Ainda que esta ordenação de matérias possa ser pouco frequente, é historicamente correcta e pedagogicamente adequada, além de que é a melhor maneira de tornar patente a verdadeira conexão entre o integral e a derivada.

O conceito de integral é apresentado em primeiro lugar para funções em escada. Uma vez que o integral duma função em escada não é mais que uma soma, a teoria da integração é

extremamente simples neste caso. Enquanto o estudante aprende as propriedades do integral para funções em escada, ganha experiência no uso da notação de somação e ao mesmo tempo familiariza-se com a notação para integrais. Assim se solidificam os degraus de desenvolvimento, de tal modo que a transição de funções em escada para funções mais gerais parece fácil e natural.

Prefácio da Segunda Edição

A segunda edição difere da primeira em muitos aspectos. Juntou-se a Álgebra Linear, os teoremas da média e as aplicações de rotina do Cálculo foram introduzidos nos primeiros capítulos e acrescentou-se grande número de novos exercícios simples. Uma análise rápida do índice de matérias revela que o livro foi dividido em capítulos de menor extensão, cada um deles dedicado a um conceito importante. Várias Secções foram escritas de novo e reorganizadas de modo a proporcionar uma melhor motivação e melhorar o curso das ideias.

Como na primeira edição, cada conceito novo importante vem precedido de uma introdução histórica, descrevendo o seu desenvolvimento desde uma primitiva noção física intuita até à sua formulação matemática precisa. O estudante descobre algo dos esforços do passado e dos triunfos dos homens que mais contribuíram para o assunto. Deste modo o estudante torna-se um participante activo na evolução das idéias e não um mero observador passivo dos resultados.

A segunda edição, tal como a primeira, está dividida em dois volumes. As duas primeiras terças partes do volume I tratam o Cálculo para funções de uma variável, incluindo séries e uma introdução às equações diferenciais. A última terça parte deste volume introduz a Álgebra Linear com aplicações à Geometria e à Análise. Grande parte destes temas apoiam-se solidamente no cálculo de exemplos que ilustram a teoria geral. Proporciona uma mistura de Álgebra e Análise e contribui para preparar o caminho para a transição do Cálculo a uma variável para o Cálculo com várias variáveis, tratado no volume II. Um desenvolvimento mais amplo da Álgebra Linear aparece como necessário na segunda edição do Volume II.

Uma vez mais reconheço com agrado a minha dívida para com os Professores H. F. Bollenblust, A. Erdélyi, F. B. Fuller, K. Hoffmann, G. Springer e H. S. Zuckerman. A sua influência na primeira edição continuou na segunda. Na preparação da segunda edição recebi também a ajuda do Professor Basil Gordon que sugeriu muitas modificações. Agradecimentos são também devidos a George Springer e William P. Ziemer que leram as últimas provas. O pessoal de Blaisdell Publishing Company prestou, como sempre, grande ajuda; apreciei a sua simpática aceitação dos meus desejos respeitantes ao formato e tipografia.

Finalmente tenho especial satisfação em expressar a minha gratidão a minha esposa, por ter contribuído por diversas formas na preparação de ambas as edições. Como testemunho do meu agradecimento dedico-lhe, com prazer, este livro.

Índice analítico

PREFÁCIO

INTRODUÇÃO 1

Parte 1. Introdução histórica

- I 1.1. Os dos conceitos básicos do cálculo 1
- I 1.2. Introdução histórica 3
- I 1.3. O método de exaustão para área de um «segmento parabólico» 4
- *I 1.4. Exercícios 9
- I 1.5. Análisis crítica do método de Arquímedes 10
- I 1.6. A introdução ao cálculo utilizada neste livro 12

Parte 2. Conceitos fundamentais da Teoria dos Conjuntos

- I 2.1. Introdução à teoria dos conjuntos 13
- I 2.2. Notações para representar conjuntos 14
- I 2.3. Subconjuntos 14
- I 2.4. Reuniões, intersecções, complementos, 16
- I 2.5. Exercícios 18

Parte 3. Um conjunto de axiomas para o Sistema de Números Reais

- I 3.1. Introdução 20
- I 3.2. Axiomas do corpo 21
- *I 3.3. Exercícios 23
- I 3.4. Axiomas de ordem 23
- *I 3.5. Exercícios 25
- I 3.6. Números inteiros e números racionais 25

X *Índice analítico*

| | | |
|----------|---|----|
| I 3.7. | Interpretação geométrica dos números reais como pontos de uma reta | 26 |
| I 3.8. | Limite superior dum conjunto, elemento máximo, extremo superior (supremo) | 27 |
| I 3.9. | O axioma do extremo superior (axioma de completitude) | 29 |
| I 3.10. | A propriedade arquimediana do sistema dos números reais | 30 |
| I 3.11. | Propriedades fundamentais do supremo e do ínfimo | 31 |
| *I 3.12. | Exercícios | 33 |
| *I 3.13. | Existência de raízes quadradas para os números reais não negativos | 34 |
| *I 3.14. | Raízes de ordem superior. Potências racionais | 35 |
| *I 3.15. | Representação dos números reais por meio de decimais | 36 |

Parte 4. Indução matemática, símbolo somatório e questões afins

| | | |
|----------|--|----|
| I 4.1. | Um exemplo de demonstrações por indução matemática | 39 |
| I 4.2. | O princípio da indução matemática | 40 |
| *I 4.3. | O princípio de boa ordem | 41 |
| I 4.4. | Exercícios | 42 |
| *I 4.5. | Demonstração do princípio de boa ordem | 44 |
| I 4.6. | O símbolo somatório | 45 |
| I 4.7. | Exercícios | |
| I 4.8. | Valores absolutos e desigualdade triangular | 49 |
| I 4.9. | Exercícios | 52 |
| *I 4.10. | Exercícios vários referentes ao método de indução | 53 |

1. OS CONCEITOS DO CÁLCULO INTEGRAL 59

| | | |
|-------|---|----|
| 1.1. | As ideias fundamentais da geometria cartesiana | 59 |
| 1.2. | Funções. Idéias gerais e exemplos | 61 |
| *1.3. | Funções. Definição formal como um conjunto de pares ordenados | 65 |
| 1.4. | Mais exemplos de funções reais | 66 |
| 1.5. | Exercícios | 68 |
| 1.6. | O conceito de área como uma função de conjunto | 70 |
| 1.7. | Exercícios | 73 |
| 1.8. | Intervalos e conjuntos de ordenadas | 74 |
| 1.9. | Partições e funções em escada | 75 |
| 1.10. | Soma e produto de funções em escada | 77 |
| 1.11. | Exercícios | 77 |
| 1.12. | A definição integral para funções em escada | 79 |
| 1.13. | Propriedades do integral numa função em escada | 80 |
| 1.14. | Outras notações para os integrais | 85 |
| 1.15. | Exercícios | 85 |
| 1.16. | O integral de funções mais gerais | 88 |
| 1.17. | Integrais superior e inferior | 90 |
| 1.18. | A área de um conjunto de ordenadas expressa por um integral | 91 |
| 1.19. | Observações relativas à teoria e técnica de integração | 92 |
| 1.20. | Funções monótonas e monótonas por partes. Definições e exemplos | 93 |
| 1.21. | Integrabilidade de funções monótonas limitadas | 94 |
| 1.22. | Cálculo do integral de uma função monótona limitada | 96 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 1.23. | Cálculo do integral dx quando p é um inteiro positivo | 97 |
| 1.24. | Propriedades fundamentais do integral | 97 |
| 1.25. | Integração de polinómios | 99 |
| 1.26. | Exercícios | 100 |
| 1.27. | Demonstração das propriedades fundamentais do integral | 101 |

2. ALGUMAS APLICAÇÕES DA TEORIA DA INTEGRAÇÃO 107

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.1. | Introdução | 107 |
| 2.2. | A área de uma região compreendida entre dois gráficos representada por um integral | 107 |
| 2.3. | Exemplos resolvidos | 109 |
| 2.4. | Exercícios | 113 |
| 2.5. | As funções trigonométricas | 114 |
| 2.6. | Fórmulas de integração para o seno e o cosseno | 117 |
| 2.7. | Descrição geométrica das funções seno e cosseno | 122 |
| 2.8. | Exercícios | 126 |
| 2.9. | Coordenadas polares | 128 |
| 2.10. | O integral para área em coordenadas polares | 131 |
| 2.11. | Exercícios | 133 |
| 2.12. | Aplicação da integração ao cálculo de volume | 133 |
| 2.13. | Exercícios | 136 |
| 2.14. | Aplicação da integração ao conceito de trabalho | 137 |
| 2.15. | Exercícios | 140 |
| 2.16. | Valor médio de uma função | 140 |
| 2.17. | Exercícios | 142 |
| 2.18. | O integral como função do limite superior. Integrais indefinidos | 144 |
| 2.19. | Exercícios | 148 |

3. FUNÇÕES CONTÍNUAS 151

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.1. | Ideia intuitiva de continuidade | 151 |
| 3.2. | Definição de limite de uma função | 152 |
| 3.3. | Definição de continuidade de uma função | 156 |
| 3.4. | Teoremas fundamentais sobre limites. Mais exemplos de funções contínuas | 157 |
| 3.5. | Demonstrações dos teoremas fundamentais sobre limites | 161 |
| 3.6. | Exercícios | 164 |
| 3.7. | Funções compostas e continuidade | 166 |
| 3.8. | Exercícios | 168 |
| 3.9. | Teorema de Bolzano para funções contínuas | 169 |
| 3.10. | O teorema do valor intermédio para funções contínuas | 171 |
| 3.11. | Exercícios | 172 |
| 3.12. | O processo de inversão | 173 |
| 3.13. | Propriedades de funções que se mantêm por inversão | 174 |
| 3.14. | Inversos de funções monótonas «por intervalos» | 176 |
| 3.15. | Exercícios | 177 |

XII *Índice analítico*

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.16. | O teorema dos valores extremos para funções contínuas | 177 |
| 3.17. | Teorema da continuidade uniforme | 180 |
| 3.18. | Teorema da integrabilidade para funções contínuas | 181 |
| 3.19. | Teoremas da média para integrais de funções contínuas | 182 |
| 3.20. | Exercícios | 183 |

4. CÁLCULO DIFERENCIAL 185

| | | |
|--------|--|------|
| 4.1. | Introdução histórica | 185 |
| 4.2. | Um problema relativo à velocidade | 186 |
| 4.3. | A derivada de uma função | 189 |
| 4.4. | Exemplos de derivadas | 1290 |
| 4.5. | A álgebra das derivadas | 193 |
| 4.6. | Exercícios | 197 |
| 4.7. | Interpretação geométrica da derivada como um declive | 199 |
| 4.8. | Outras notações para as derivadas | 201 |
| 4.9. | Exercícios | 204 |
| 4.10. | A regra para a derivação de funções compostas | 205 |
| 4.11. | Aplicações da regra de derivação duma função composta. Coeficientes de variação ligados e derivação implícita | 208 |
| 4.12. | Exercícios | 211 |
| 4.13. | Aplicações da derivação à determinação dos extremos de funções | 213 |
| 4.14. | O teorema do valor médio para derivadas | 216 |
| 4.15. | Exercícios | 219 |
| 4.16. | Aplicações do teorema do valor médio a propriedades geométricas das funções | 220 |
| 4.17. | CrITÉrio da derivada de segundo ordem para a determinação de extremos | 221 |
| 4.18. | Traçado de curvas | 222 |
| 4.19. | Exercícios | 224 |
| 4.20. | Exemplos resolvidos de problemas de extremos | 225 |
| 4.21. | Exercícios | 227 |
| *4.22. | Derivadas parciais | 230 |
| *4.23. | Exercícios | 235 |

5. RELAÇÃO ENTRE INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO 237

| | | |
|------|--|-----|
| 5.1. | A derivada de um integral indefinido. O primeiro teorema fundamental do cálculo | 237 |
| 5.2. | Teorema de derivada nula | 240 |
| 5.3. | Funções primitivas e o segundo teorema fundamental do cálculo | 240 |
| 5.4. | Propriedades de uma função estabelecidas a partir de propriedades da sua derivada | 243 |
| 5.5. | Exercícios | 243 |
| 5.6. | A notação de Leibniz para as primitivas | 246 |
| 5.7. | Integração por substituição | 248 |
| 5.8. | Exercícios | 253 |

- 5.9. Integração por partes 254
- 5.10. Exercícios 257
- *5.11. Exercícios de revisão variados 259

6. FUNÇÃO LOGARITMO, FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS 265

- 6.1. Introdução 265
- 6.2. Motivação para a definição do logaritmo natural como um integral 266
- 6.3. A definição de logaritmo. Propriedades fundamentais 269
- 6.4. O gráfico do logaritmo natural 270
- 6.5. Consequências da equação funcional $L(ab) = L(a) + L(b)$ 270
- 6.6. Logaritmos referidos a qualquer base positiva $b \neq 1$ 271
- 6.7. Fórmulas de derivação e integração contendo logaritmos 273
- 6.8. Derivação logarítmica 275
- 6.9. Exercícios 276
- 6.10. Aproximação polinomial para o logaritmo 278
- 6.11. Exercícios 282
- 6.12. A função exponencial 283
- 6.13. Exponenciais expressas como potências de e 285
- 6.14. A definição de e^x para x real qualquer 285
- 6.15. A definição de a^x para $a > 0$ e x real 286
- 6.16. Derivação e integração de fórmulas contendo exponenciais 286
- 6.17. Exercícios 290
- 6.18. Funções hiperbólicas 292
- 6.19. Exercícios 293
- 6.20. Derivadas de funções inversas 294
- 6.21. Inversas das funções trigonométricas 295
- 6.22. Exercícios 299
- 6.23. Integração por decomposição em frações simples 301
- 6.24. Integrais que podem ser transformados em integrais de funções racionais 308
- 6.25. Exercícios 310
- 6.26. Exercícios de revisão variados 312

7. APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE FUNÇÕES 317

- 7.1. Introdução 317
- 7.2. Polinómios de Taylor gerados por uma função 318
- 7.3. Cálculo de polinómios de Taylor 321
- 7.4. Exercícios 323
- 7.5. Fórmula de Taylor com resto 324
- 7.6. Estimativa do erro na fórmula de Taylor 326
- *7.7. Outras formas para o resto da fórmula de Taylor 329
- 7.8. Exercícios 331
- 7.9. Outras observações acerca do erro na fórmula de Taylor. A notação O 333
- 7.10. Aplicações às formas indeterminadas 336

XIV *Índice analítico*

| | | |
|--|--|-----|
| 7.11. | Exercícios | 338 |
| 7.12. | Regra de L'Hôpital para a forma indeterminada O/O | 340 |
| 7.13. | Exercícios | 343 |
| 7.14. | Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Extensão da regra de L'Hôpital | 345 |
| 7.15. | Limites infinitos | 347 |
| 7.16. | O comportamento de $\log x$ e e^x para grandes valores de x | 349 |
| 7.17. | Exercícios | 351 |
| 8. INTRODUÇÃO AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS | | 355 |
| 8.1. | Introdução | 355 |
| 8.2. | Terminologia e notação | 356 |
| 8.3. | Equação diferencial de primeira ordem para a função exponencial | 358 |
| 8.4. | Equações diferenciais lineais de primeira ordem | 359 |
| 8.5. | Exercícios | 362 |
| 8.6. | Alguns problemas físicos conduzindo à resolução de equações diferenciais lineais de primeira ordem | 363 |
| 8.7. | Exercícios | 370 |
| 8.8. | Equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes | 375 |
| 8.9. | Existência de soluções da equação $y'' + by = 0$ | 375 |
| 8.10. | Redução da equação geral ao caso particular $y'' + by = 0$ | 376 |
| 8.11. | Teorema de unicidades para a equação $y'' + by = 0$ | 377 |
| 8.12. | Solução completa da equação $y'' + by = 0$ | 379 |
| 8.13. | Solução completa da equação $y'' + ay' + by = 0$ | 379 |
| 8.14. | Exercícios | 381 |
| 8.15. | Equação diferencial linear de segunda ordem não homogênea com coeficientes constantes | 382 |
| 8.16. | Métodos especiais de determinação de uma solução particular da equação não homogênea $y'' + ay' + by = R$ | 386 |
| 8.17. | Exercícios | 387 |
| 8.18. | Exemplos de problemas físicos conduzindo a uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes | 388 |
| 8.19. | Exercícios | 393 |
| 8.20. | Observações referentes a equações diferenciais não lineais | 394 |
| 8.21. | Curvas integrais e campos direcionais | 396 |
| 8.22. | Exercícios | 400 |
| 8.23. | Equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis | 400 |
| 8.24. | Exercícios | 403 |
| 8.25. | Equações homogêneas de primeira ordem | 403 |
| 8.26. | Exercícios | 407 |
| 8.27. | Alguns problemas físicos e geométricos conduzindo no estabelecimento de equações diferenciais de primeira ordem | 407 |
| 8.28. | Exercícios de revisão variados | 412 |
| 9. NÚMEROS COMPLEXOS | | 415 |
| 9.1. | Introdução histórica | 415 |
| 9.2. | Definições e propriedades | 415 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 9.3. | Os números complexos como uma extensão dos números reais | 417 |
| 9.4. | A unidade imaginária i | 418 |
| 9.5. | Interpretação geométrica. Módulo e argumento | 419 |
| 9.6. | Exercícios | 422 |
| 9.7. | Exponenciais complexas | 423 |
| 9.8. | Funções complexas | 426 |
| 9.9. | Exemplos de fórmulas de derivação e integração | 427 |
| 9.10. | Exercícios | 429 |

10. SUCESSÕES, SÉRIES, INTEGRAIS IMPRÓPRIOS 433

| | | |
|---------|---|-----|
| 10.1. | O paradoxo de Zenão | 433 |
| 10.2. | Sucessões | 437 |
| 10.3. | Sucessões monótonas de números reais | 441 |
| 10.4. | Exercícios | 442 |
| 10.5. | Séries infinitas | 444 |
| 10.6. | A propriedade da linearidade das séries convergentes | 446 |
| 10.7. | Séries telescópicas | 447 |
| 10.8. | A série geométrica | 449 |
| 10.9. | Exercícios | 452 |
| *10.10. | Exercícios sobre desenvolvimentos decimais | 455 |
| 10.11. | Critérios de convergência | 456 |
| 10.12. | Critérios de comparação para séries de termos não negativos | 457 |
| 10.13. | O critério de comparação com um integral | 460 |
| 10.14. | Exercícios | 461 |
| 10.15. | Critérios da raiz e do cociente para séries de termos não negativos | 463 |
| 10.16. | Exercícios | 465 |
| 10.17. | Séries alternadas | 467 |
| 10.18. | Convergência simples e absoluta | 471 |
| 10.19. | Critérios de convergência de Dirichlet e Abel | 472 |
| 10.20. | Exercícios | 474 |
| *10.21. | Comutatividade nas séries | 476 |
| 10.22. | Exercícios de revisão variados | 480 |
| 10.23. | Integrais impróprios | 483 |
| 10.24. | Exercícios | 488 |

11. SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES 491

| | | |
|-------|--|-----|
| 11.1. | Convergência pontual de sucessões de funções | 491 |
| 11.2. | Convergência uniforme de uma sucessão de funções | 491 |
| 11.3. | Convergência uniforme e continuidade | 494 |
| 11.4. | Convergência uniforme e integração | 495 |
| 11.5. | Uma condição suficiente para a convergência uniforme | 496 |
| 11.6. | Séries de potências. Círculo de convergência | 498 |
| 11.7. | Exercícios | 500 |
| 11.8. | Propriedades das funções representadas por séries reais de potências | 502 |
| 11.9. | A série de Taylor gerada por uma função | 505 |

XVI *Índice analítico*

| | | |
|--------|---|-----|
| 10.10. | Uma condição suficiente de convergência da série de Taylor | 506 |
| 11.11. | Desenvolvimento em série de potências das funções exponencial e trigonométricas | 507 |
| 11.12. | Teorema de Bernstein | 508 |
| 11.13. | Exercícios | 509 |
| 11.14. | Séries de potências e equações diferenciais | 511 |
| 11.15. | A série binomial | 514 |
| 11.16. | Exercícios | 515 |
| | | |
| 12. | ÁLGEBRA VETORIAL | 519 |
| | | |
| 12.1. | Introdução histórica | 519 |
| 12.2. | O espaço vetorial dos sistemas de IV números reais | 520 |
| 12.3. | Interpretação geométrica $n \leq 3$ | 522 |
| 12.4. | Exercícios | 525 |
| 12.5. | Produto escalar | 526 |
| 12.6. | Norma ou comprimento de um vetor | 528 |
| 12.7. | Ortogonalidade de vetores | 530 |
| 12.8. | Exercícios | 531 |
| 12.9. | Projeções. Ângulo de dois vetores num espaço a N dimensões | 533 |
| 12.10. | Vetores coordenados unitários | 534 |
| 12.11. | Exercícios | 536 |
| 12.12. | O subespaço de um conjunto finito de vetores | 539 |
| 12.13. | Independência linear | 540 |
| 12.14. | Bases | 543 |
| 12.15. | Exercícios | 545 |
| 12.16. | O espaço vetorial V_n dos n -sistemas de números complexos | 546 |
| 12.17. | Exercícios | 548 |
| | | |
| 13. | APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA VETORIAL À GEOMETRIA ANALÍTICA | 551 |
| | | |
| 13.1. | Introdução | 551 |
| 13.2. | Retas num espaço n dimensional | 552 |
| 13.3. | Algumas propriedades simples da reta | 553 |
| 13.4. | Retas em funções vetoriais | 555 |
| 13.5. | Exercícios | 557 |
| 13.6. | Plano no espaço euclidiano n dimensional | 558 |
| 13.7. | Planos em funções vetoriais | 562 |
| 13.8. | Exercícios | 563 |
| 13.9. | Produto vetorial | 564 |
| 13.10. | O produto vetorial expresso na forma de determinante | 566 |
| 13.11. | Exercícios | 568 |
| 13.12. | O produto misto ou triplo escalar | 570 |
| 13.13. | Regra de Cramer para a resolução de um sistema de tres equações lineais | 572 |
| 13.14. | Exercícios | 573 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 13.15. | Vetores normais a planos | 575 |
| 13.16. | Equações lineares cartesianas definindo planos | 577 |
| 13.17. | Exercícios | 578 |
| 13.18. | As secções cónicas | 580 |
| 13.19. | Excentricidade das secções cónicas | 583 |
| 13.20. | Equações polares das cónicas | 584 |
| 13.21. | Exercícios | 586 |
| 13.22. | Cónicas simétricas relativamente à origem | 587 |
| 13.23. | Equações cartesianas das cónicas | 588 |
| 13.24. | Exercícios | 591 |
| 13.25. | Exercícios variados sobre cónicas | 593 |

14. CALCULO COM FUNÇÕES VETORIAIS 597

| | | |
|--------|--|-----|
| 14.1. | Funções vetoriais de uma variável real | 597 |
| 14.2. | Operações algébricas. Componentes | 597 |
| 14.3. | Limites, derivadas e integrais | 598 |
| 14.4. | Exercícios | 601 |
| 14.5. | Aplicações às curvas. Tangência | 603 |
| 14.6. | Aplicações ao movimento curvilíneo. Vetor velocidade, grandeza do vetor, velocidade e vetor aceleração | 606 |
| 14.7. | Exercícios | 610 |
| 14.8. | A tangente unitária, a norma principal, e o plano osculador a uma curva | 612 |
| 14.9. | Exercícios | 615 |
| 14.10. | Comprimento de um arco de curva | 616 |
| 14.11. | Aditividade do comprimento do arco | 619 |
| 14.12. | A função comprimento de arco | 620 |
| 14.13. | Exercícios | 623 |
| 14.14. | Curvatura de uma curva | 625 |
| 14.15. | Exercícios | 627 |
| 14.16. | Os vetores velocidade e aceleração em coordenadas polares | 628 |
| 14.17. | Movimento plano como aceleração radial | 631 |
| 14.18. | Coordenadas cilíndricas | 631 |
| 14.19. | Exercícios | 632 |
| 14.20. | Aplicações ao movimento dos planetas | 634 |
| 14.21. | Exercícios de revisão | 638 |

15. ESPAÇOS LINEAIS 641

| | | |
|-------|---|-----|
| 15.1. | Introdução | 641 |
| 15.2. | Definição de espaço linear | 641 |
| 15.3. | Exemplos de espaços lineais | 643 |
| 15.4. | Consequências elementares dos axiomas | 644 |
| 15.5. | Exercícios | 645 |
| 15.6. | Subespaços de um espaço linear | 647 |
| 15.7. | Conjuntos dependentes e independentes num espaço linear | 648 |

XVIII *Índice analítico*

| | | |
|--------|---|-----|
| 15.8. | Bases e dimensão | 650 |
| 15.9. | Exercícios | 651 |
| 15.10. | Produto interno, espaços euclidianos. Normas | 652 |
| 15.11. | Ortogonalidade num espaço euclidiano | 656 |
| 15.12. | Exercícios | 658 |
| 15.13. | Construção de conjunto ortogonais. O método de Gram-Schmidt | 661 |
| 15.14. | Complementos ortogonais. Projecções | 665 |
| 15.15. | A melhor aproximação de elementos de um espaço euclidiano por elemento de um subespaço de dimensão finita | 668 |
| 15.16. | Exercícios | 669 |

16. TRANSFORMAÇÕES LINEAIS E MATRIZES 671

| | | |
|--------|---|-----|
| 16.1. | Transformações lineais | 671 |
| 16.2. | Espaço nulo e contradomínio | 673 |
| 16.3. | Nulidade e ordem | 674 |
| 16.4. | Exercícios | 675 |
| 16.5. | Operações algébricas relativas a transformações lineais | 677 |
| 16.6. | Inversas | 679 |
| 16.7. | Transformações lineares biunívocas | 682 |
| 16.8. | Exercícios | 684 |
| 16.9. | Transformações lineais com valores determinados | 686 |
| 16.10. | Representação matricial das transformações lineais | 686 |
| 16.11. | Construção de uma representação matricial na forma diagonal | 690 |
| 16.12. | Exercícios | 692 |
| 16.13. | Espaços lineares de matrizes | 694 |
| 16.14. | Isomorfismo entre transformações lineais e matrizes | 695 |
| 16.15. | Multiplicação de matrizes | 697 |
| 16.16. | Exercícios | 700 |
| 16.17. | Sistemas de equações lineais | 702 |
| 16.18. | Técnicas de cálculo | 705 |
| 16.19. | Inversos de matrizes quadradas | 709 |
| 16.20. | Exercícios | 711 |
| 16.21. | Exercícios variados sobre matrizes | 712 |

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS 715

| | |
|------------|-----|
| Introdução | 715 |
| Capítulo 1 | 716 |
| Capítulo 2 | 717 |
| Capítulo 3 | 720 |
| Capítulo 4 | 721 |
| Capítulo 5 | 726 |
| Capítulo 6 | 728 |
| Capítulo 7 | 733 |
| Capítulo 8 | 735 |
| Capítulo 9 | 739 |

| | |
|-------------|-----|
| Capítulo 10 | 739 |
| Capítulo 11 | 742 |
| Capítulo 12 | 744 |
| Capítulo 13 | 746 |
| Capítulo 14 | 749 |
| Capítulo 15 | 752 |
| Capítulo 16 | 754 |

| | |
|-------------------|-----|
| ÍNDICE ALFABÉTICO | 761 |
|-------------------|-----|

INTRODUÇÃO

Parte I — Introdução histórica

I 1.1 Os dois conceitos básicos do cálculo

O notável progresso conhecido pela ciência e tecnologia, durante o último século, foi devido em grande parte ao desenvolvimento da Matemática. O ramo da Matemática conhecido por Cálculo integral e diferencial é um instrumento natural e poderoso para atacar uma variedade de problemas que aparecem na Física, Astronomia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia e noutros campos, incluindo mais recentemente alguns das Ciências Sociais.

Para dar a o leitor uma ideia dos muito diversos tipos de problemas que podem ser tratados pelos métodos do Cálculo, expõe-se a seguir uma pequena amostra de questões seleccionadas dos exercícios que aparecem em capítulos posteriores deste livro.

Com que velocidade deve ser lançado um foguetão, para que não volte a tombar na Terra? Qual é o raio do menor disco circular que cobre todo o triângulo isósceles de perímetro L ? Qual é o volume do material extraído de uma esfera de raio $2r$, se for atravessada por um orifício cilíndrico, de raio r , e cujo eixo passa pelo centro da esfera? Se uma cultura de bactérias cresce proporcionalmente à quantidade que existe em cada instante, e se a população duplica ao fim de uma hora, quanto terá aumentado ao fim de duas horas? Se uma força de dez quilos faz esticar de um metro uma corda elástica, qual o trabalho necessário para esticar a corda de quatro metros?

Estes exemplos, escolhidos em vários domínios, ilustram algumas das questões técnicas que podem ser resolvidas por aplicações mais ou menos rotinadas do Cálculo.

O Cálculo é mais do que um instrumento técnico — é uma compilação de ideias atraentes e excitantes, que interessaram o pensamento humano durante séculos. Estas ideias estão relacionadas com *velocidade*, *área*, *volume*, *taxa de crescimento*, *continuidade*, *tangente a uma curva* e com outros conceitos dizendo respeito a uma variedade de domínios. O Cálculo obriga-nos a não ir além, antes de pensarmos cuidadosamente acerca do significado destes conceitos. Outro aspecto notável do Cálculo é o seu poder de síntese. Muitos destes conceitos podem ser formulados de maneira que se reduzam a dois outros problemas, mais especializa-

dos, de natureza puramente geométrica. Passamos em seguida a uma breve descrição destes problemas.

Consideremos uma curva C situada acima duma reta horizontal (base), como se indica na fig. I.1. Suponhamos que esta curva goza da propriedade de ser intersectada por cada vertical, no máximo, uma vez. A parte sombreada da figura é formada pelos pontos situados abaixo da curva C , acima da horizontal, e entre dois segmentos verticais paralelos que unem C com a horizontal. O primeiro problema fundamental do Cálculo é o seguinte: *Determinar um número que dê a medida da área da parte sombreada da figura.*

Consideremos em seguida uma reta tangente à curva C , como se mostra na fig. I.1. O segundo problema fundamental pode enunciar-se do modo seguinte. *Determinar um número que dê o declive desta reta.*

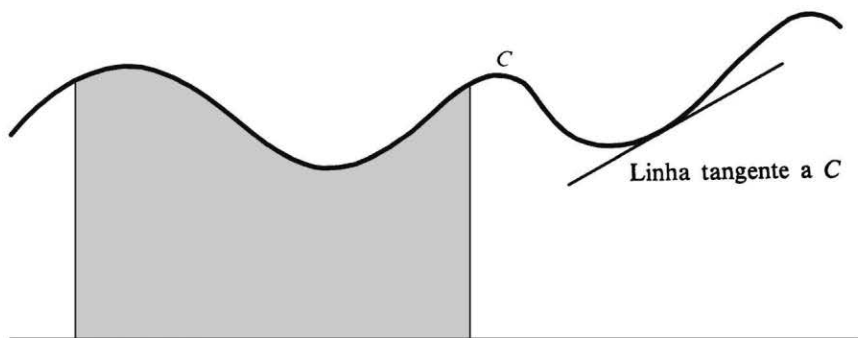


Fig. I.1

Fundamentalmente o Cálculo ocupa-se da formulação exata e da resolução destes dois problemas particulares. Permite-nos *definir* os conceitos de área e tangente, e *calcular* a área de uma dada região, ou o declive de tangente a uma curva dada. O *Cálculo Integral* ocupa-se do problema da área e será discutido neste primeiro capítulo. O *Cálculo Diferencial* ocupa-se do problema da tangente e será analisado no Capítulo 4.

O estudo do Cálculo requer uma certa preparação matemática. O presente capítulo trata desses conceitos básicos e está dividido em quatro partes: a primeira parte dá uma perspectiva histórica; a segunda refere a notação e terminologia da teoria dos conjuntos; a terceira trata do sistema dos números reais; e finalmente a quarta parte trata da indução matemática e da notação somatória. Se o leitor está familiarizado com estes temas pode abordar directamente o desenvolvimento do Cálculo integral, no capítulo 1. Caso contrário deverá familiarizar-se com as matérias contidas nesta introdução, antes de iniciar o estudo do Capítulo.

I 1.2 Introdução histórica

A origem do Cálculo integral remonta a mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema da determinação de áreas por um processo que designaram de *método de exaustão*. As ideias fundamentais deste método são elementares e podem descrever-se, sumariamente, do modo seguinte: dada uma região cuja área pretende determinar-se, inscrevemos nela uma região poligonal que se aproxime da região dada e cuja área seja de cálculo fácil. Em seguida, escolhemos outra região poligonal que dê uma melhor aproximação e continuamos o processo tomando *linhas* poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a cobrir a região dada. O método está ilustrado na fig. I.2 para o caso duma região semicircular. Este método foi usado com êxito por Arquimedes (287-212 a. C.), para estabelecer fórmulas exactas das áreas do círculo e de algumas outras figuras particulares.

Depois de Arquimedes, o desenvolvimento do método de exaustão teve que esperar quase 18 séculos até que o uso de símbolos e técnicas algébricas se tornaram parte usual da matemática. A Álgebra elementar, que hoje é familiar à maioria dos alunos dos últimos anos do ensino secundário, era completamente desconhecida no tempo de Arquimedes, fato que tornava impossível estender o método a qualquer classe de regiões, sem se conhecer um modo adequado de expressar os extensos cálculos numa forma compacta e simplificada.



Fig. I.2 O método de exaustão aplicado a uma região semicircular.

Uma mudança lenta, mas revolucionária, no desenvolvimento das notações matemáticas teve início no século XVI. O complicado sistema de numeração romana foi gradualmente substituído pelos caracteres arábicos utilizados ainda hoje, os sinais + e – foram introduzidos pela primeira vez e começaram a reconhecer-se as vantagens da notação decimal. Durante este mesmo período, os brilhantes resultados dos matemáticos italianos Tartaglia, Cardano e Ferrari na determinação de soluções algébricas para as equações cúbica e do quarto grau estimularam o desenvolvimento da Matemática e encorajaram a aceitação da nova e superior linguagem algébrica. Com a larga introdução dos bem escolhidos símbolos algébricos ressuscitou o interesse pelo antigo método de exaustão, e grande número de resultados parciais foram descobertos no século XVI por pioneiros tais como Cavalieri, Toricelli, Roberval, Fermat, Pascal e Wallis.

Gradualmente, o método de exaustão foi transformado no que hoje se designa por Cálculo Integral, nova e poderosa disciplina com uma grande variedade de aplicações não só em problemas geométricos respeitantes a áreas e volumes, mas também em problemas de outras

ciências. Este ramo da Matemática, que conservou alguns dos aspetos originais do método de exaustão, recebeu o seu maior impulso no século XVII, devido principalmente aos esforços de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o seu desenvolvimento continuou até ao século XIX, data em que matemáticos como Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Bernhard Riemann (1826-1866) lhe deram uma base matemática sólida. Posteriores aperfeiçoamentos e extensões da teoria estão ainda a ser levados a cabo na Matemática contemporânea.

I 1.3 O método de exaustão para a área de um “segmento parabólico”

Antes de passarmos ao estudo sistemático do Cálculo integral, será instrutivo aplicar o método de exaustão directamente a uma das figuras particulares estudadas pelo próprio Arquimedes. A região em questão está representada na figura I.3 e pode descrever-se do modo seguinte: se escolhermos um ponto arbitrário na base da figura e designarmos por x a sua distância a 0, a distância vertical deste ponto à curva é x^2 . Em particular, se o comprimento da base é b a altura da figura é b^2 . A distância vertical de x à curva designa-se por “ordenada” de x . A curva assim descrita é uma *parábola* e a região limitada pela curva e pelos dois segmentos de recta chamar-se-á *segmento parabólico*.

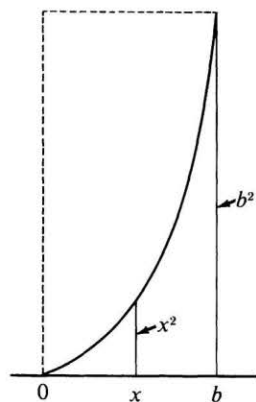


Fig. I.3 Segmento parabólico.

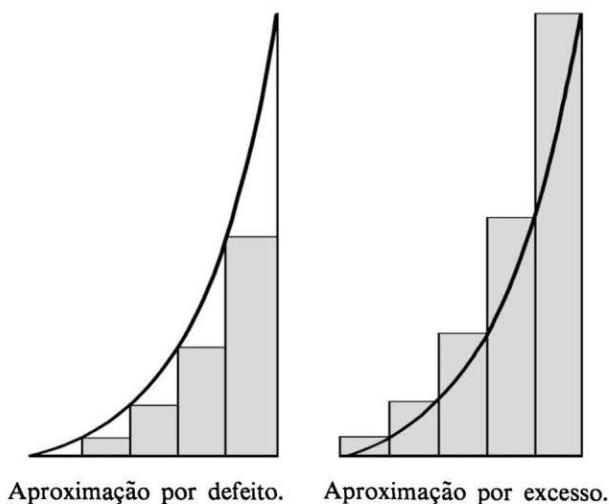


Fig. I.4

Esta figura pode ser contida num retângulo de base b e altura b^2 , como se vê na fig. I.3. Observando a figura é evidente a afirmação de que a área do segmento parabólico é menor que metade da área do retângulo. Arquimedes fez a descoberta surpreendente de que a

área do segmento parabólico é exactamente *um terço* da área do retângulo, isto é, $A = \frac{b^3}{3}$ representando A a área do segmento parabólico. Mostremos como se chega a este resultado.

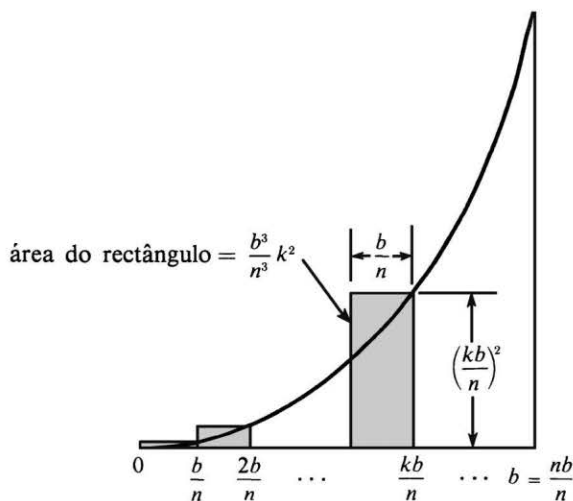


Fig. I.5 Cálculo da área dum segmento parabólico.

Deve notar-se que o segmento parabólico desenhado na fig. I.3 não é exactamente o que Arquimedes considerou, e que os pormenores dos cálculos que se seguem não são exactamente os utilizados por ele. Contudo as *ideias* essenciais são as de Arquimedes; o que apresentamos aqui pode considerar-se o método de exaustão exposto com uma notação moderna.

O método consiste simplesmente no seguinte: divide-se a figura num certo número de bandas e obtêm-se duas aproximações da área da região, uma por defeito e a outra por excesso, usando dois conjuntos de retângulos como se indica na fig. I.4 (utilizam-se retângulos, em vez de polígonos quaisquer, para simplificar os cálculos). A área do segmento parabólico é maior que a área total dos retângulos interiores, mas é menor que a dos retângulos exteriores. Se cada banda se subdivide, para se obter uma nova aproximação com maior número de bandas, a área total dos retângulos interiores *aumenta*, enquanto a área total dos retângulos exteriores *diminui*. Arquimedes compreendeu que se podia obter a área com qualquer grau de aproximação desejado, bastando para tanto tomar um número suficiente de bandas.

O cálculo efetivo efectua-se como a seguir se indica. Com o objectivo de simplificar os cálculos divide-se a base em n partes iguais, cada uma de comprimento b/n (ver fig. I.5). Os pontos de divisão correspondem aos seguintes valores de x :

$$0, \frac{b}{n}, \frac{2b}{n}, \frac{3b}{n}, \dots, \frac{(n-1)b}{n}, \frac{nb}{n} = b.$$

A expressão geral dum ponto de divisão é $x = \frac{kb}{n}$, onde k toma os valores sucessivos $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Em cada ponto kb/n constroi-se o retângulo exterior de altura $(kb/n)^2$, como se indica na fig. I.5. A área deste retângulo é o produto da base pela altura e é igual a

$$\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{kb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3} k^2.$$

Designando por S_n a soma das áreas de todos os retângulos exteriores, uma vez que a área do k -énimo retângulo é $(b^3/n^3)k^2$, obtem-se

$$S_n = \frac{b^3}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2). \quad (\text{I.1})$$

Do mesmo modo se obtém a expressão da soma S_n dos rectângulos interiores:

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2]. \quad (\text{I.2})$$

A forma destas somas é de grande importância no cálculo. Note-se que o fator que multiplica b^3/n^3 na equação (I.1) é a soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

[O fator correspondente na equação (I.2) é análogo, apenas a soma tem unicamente $n-1$ parcelas]. O cálculo desta soma por adição directa das parcelas, para um grande valor de n , é fastidioso, porém existe uma identidade interessante que torna possível calcula-la dum modo mais simples; a identidade é

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad (\text{I.3})$$

É válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e pode provar-se do modo seguinte: Considere-se a igualdade $(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ escrita na forma

$$3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3 - k^3.$$

Fazendo $k = 1, 2, \dots, n - 1$, obtém-se as $n - 1$ fórmulas

$$3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 2^3 - 1^3$$

$$3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = 3^3 - 2^3$$

$$3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1 = n^3 - (n - 1)^3.$$

Somando as igualdades, membro a membro, todos os termos do segundo membro se eliminam, excepto dois, resultando

$$3[1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2] + 3[1 + 2 + \dots + (n - 1)] + (n - 1) = n^3 - 1^3.$$

A expressão do segundo parêntesis reto é a soma dos termos de uma progressão aritmética, cujo valor é $\frac{1}{2} n(n - 1)$. Por conseguinte a última igualdade dá-nos

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}. \quad (\text{I.4})$$

Somando n^2 a ambos os membros obtemos (I.3).

As expressões exactas dadas nos segundos membros de (I.3) e (I.4) não são necessárias ao objectivo que se persegue. Tudo o que necessitamos é a *dupla desigualdade*

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n - 1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \quad (\text{I.5})$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$. Esta dupla desigualdade pode ser deduzida facilmente de (I.3) e (I.4), ou directamente por indução (ver Secção I. 4.1).

Multiplicando (I.5) por b^3/n^3 e considerando (I.1) e (I.2) obtém-se

$$s_n < \frac{b^3}{3} < S_n \quad (\text{I.6})$$

para todo o n inteiro e positivo. A dupla desigualdade (I.6) exprime que, para todo o n inteiro e positivo, o número $b^3/3$ está compreendido entre s_n e S_n . Podemos agora provar que $b^3/3$ é o *único* número que goza desta propriedade, isto é, que se A é um número qualquer que verifica

$$s_n < A < S_n \quad (\text{I.7})$$

para todo o inteiro e positivo n , então $A = b^3/3$. Foi devido a este fato que Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico é $b^3/3$.

Para provar que $A = b^3/3$ utiliza-se uma vez mais a dupla desigualdade (I.5). Somando n^2 a ambos os membros da desigualdade da esquerda em (I.5) obtém-se:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2.$$

Multiplicando por b^3/n^3 , e considerando (I.1), pode escrever-se

$$< \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n}. \quad (\text{I.8})$$

Analogamente, subtraindo n^2 a ambos os membros da desigualdade da direita em (I.5) e multiplicando por b^3/n^3 , obtém-se:

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < s_n. \quad (\text{I.9})$$

Porém, qualquer número A verificando (I.7) deve igualmente verificar

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{n} < A < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} \quad (\text{I.10})$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Existem, então, unicamente três possibilidades:

$$A > \frac{b^3}{3}, \quad A < \frac{b^3}{3}, \quad A = \frac{b^3}{3}.$$

Se provarmos que as duas primeiras conduzem a contradições, então necessariamente terá que ser $A = \frac{b^3}{3}$, uma vez que, no estilo de Sherlock Holmes, se esgotam assim todas as possibilidades.

Suponhamos que a desigualdade $A > b^3/3$ era verdadeira. Da segunda desigualdade em (I.10) obtém-se

$$A - \frac{b^3}{3} < \frac{b^3}{n} \quad (\text{I.11})$$

para todo o inteiro $n \geq 1$. Uma vez que $A - b^3/3$ é positivo, podemos dividir ambos os membros de (I.11) por $A - b^3/3$ e multiplicar em seguida por n para obter a desigualdade

$$n < \frac{b^3}{A - b^3/3}$$

para todo o n já referido. Mas esta desigualdade é evidentemente falsa para $n \geq b^3/(A - b^3/3)$. Portanto a desigualdade $A > b^3/3$ conduz a uma contradição. De maneira análoga se pode provar que $A < \frac{b^3}{3}$ conduz igualmente a uma contradição e por conseguinte deverá ser $A = b^3/3$, como já se afirmara.

*I.4 Exercícios

- (a) Modificar a região indicada na fig. I.3 supondo que a ordenada, para cada valor de x , é $2x^2$ em vez de x^2 . Desenhar a nova figura. Repetir para este caso os passos principais da anterior seção e determinar o efeito desta modificação no cálculo da área. Fazer o mesmo se a ordenada, para cada x , é (b) $3x^3$, (c) $\frac{1}{4}x^2$, (d) $2x^2 + 1$, (e) $ax^2 + c$.
- Modificar a região na fig. I.3, supondo que a ordenada, para cada x , é x^3 em vez de x^2 . Desenhar a nova figura.
 - Usar uma construção análoga à indicada na fig. I.5 e mostrar que as somas exterior e interior S_n e s_n são dadas por

$$S_n = \frac{b^4}{n^4} (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3), \quad s_n = \frac{b^4}{n^4} [1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3].$$

- Usar a dupla desigualdade (que pode ser demonstrada por indução; ver Seção I.4.2.).

$$1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 < \frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \quad (\text{I.12})$$

para provar que $s_n < b^4/4 < S_n$ para todo o n e provar que $b^4/4$ é o *único* número compreendido entre s_n e S_n para qualquer n .

- Que valor substitue $b^4/4$ se a ordenada, para cada x , for $ax^3 + c$?
- As desigualdades (I.5) e (I.12) são casos particulares da dupla desigualdade mais geral

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k \quad (\text{I.13})$$

válida para todo o inteiro $n \geq 1$ e todo o inteiro $k \geq 1$. Suposta (I.13) verdadeira, generalizar os resultados do Exercício 2.

I 1.5 Análise crítica do método de Arquimedes

Mediante cálculos análogos aos feitos na Secção I 1.3, Arquimedes concluiu que a área do segmento parabólico considerado é $b^3/3$. Este facto foi aceite como um teorema matemático, até que, passados cerca de 2000 anos, se pensou que deviam ser analisados os resultados dum ponto de vista mais crítico. Para compreender as razões porque houve quem puzesse em dúvida a validade da conclusão de Arquimedes, é necessário conhecer algo acerca das importantes mudanças que tiveram lugar na história recente da Matemática.

Cada ramo do conhecimento é um conjunto de ideias descritas por intermédio de palavras e símbolos, e não se podem compreender estas ideias sem um conhecimento exacto do significado das palavras e dos símbolos utilizados. Alguns ramos do conhecimento, conhecidos por *sistemas dedutivos*, são diferentes de outros pelo facto de que um certo número de conceitos “não definidos” são escolhidos *à priori* e todos os restantes conceitos no sistema são definidos a partir daqueles.

Certas afirmações acerca destes conceitos não definidos toman-se como *axiomas* ou *postulados* e outras relações que podem deduzir-se destes axiomas são chamadas *teoremas*. O exemplo mais familiar de um sistema dedutivo é a Geometria euclidiana estudada por toda a pessoa culta desde a época da Grécia Antiga.

O espírito da primitiva matemática grega, seguindo o método de postulados e teoremas como na Geometria dos *Elementos* de Euclides, dominou o pensamento matemático até à época do Renascimento. Uma nova e vigorosa fase no desenvolvimento da Matemática começou com a aparição da Álgebra no sec. XVI, e os 300 anos que se seguiram foram testemunhas de grande quantidade de importantes descobertas. O raciocínio lógico, preciso, do método dedutivo, com o uso de axiomas, definições e teoremas, esteve manifestamente ausente durante este período. Em vez disso, os pioneiros nos séculos XVI, XVII e XVIII recorriam a uma mistura de raciocínio dedutivo combinado com intuição, mera conjectura e misticismo, e não surpreenderá que se tenha visto mais tarde que alguns dos seus resultados eram incorrectos. Contudo, um número surpreendentemente grande de importantes descobertas ocorreram neste período e uma grande parte deste trabalho sobreviveu à prova da História — um prémio à destreza e engenho daqueles cientistas.

Quando o caudal de novas descobertas começou a diminuir, um novo e mais crítico período apareceu. Pouco a pouco os matemáticos viram-se forçados a voltar às ideias clássicas do método dedutivo, numa tentativa de colocar a nova Matemática numa base firme. Esta fase de desenvolvimento, que começa em princípios do século XIX e continuou até o momento presente, alcançou um grau de abstracção e pureza lógica que ultrapassou todas as tradições da ciência Grega. Simultaneamente proporcionou uma compreensão mais clara dos fundamentos, não só do Cálculo, mas de todos os ramos da Matemática.

Existem várias formas de estruturar o Cálculo como sistema dedutivo. Uma maneira possível é tornar os números reais como conceitos não definidos. Algumas das regras que regem