

LEHRBUCH

Nikolaus Wolik

# Wirtschaftsmathematik

Eine kompakte Einführung für  
Wirtschaftswissenschaftler

2. Auflage



SCHÄFFER  
POESCHEL

## **Hinweis zum Urheberrecht:**

Alle Inhalte dieses eBooks sind urheberrechtlich geschützt.

Bitte respektieren Sie die Rechte der Autorinnen und Autoren, indem sie keine ungenehmigten Kopien in Umlauf bringen.

**Dafür vielen Dank!**

SCHÄFFER  

---

POESCHEL



**Nikolaus Wolik**

# **Wirtschaftsmathematik**

Eine kompakte Einführung  
für Wirtschaftswissenschaftler

2021

Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart

Dozent:innen finden weiterführende Lehrmaterialien unter [www.sp-dozenten.de](http://www.sp-dozenten.de) (Registrierung erforderlich).

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de/> abrufbar.

Print:	ISBN 978-3-7910-5304-2	Bestell-Nr. 20632-0002
ePub:	ISBN 978-3-7910-5305-9	Bestell-Nr. 20632-0100
ePDF:	ISBN 978-3-7910-5306-6	Bestell-Nr. 20632-0151

Nikolaus Wolik  
Wirtschaftsmathematik  
2., überarbeitete Auflage, August 2021

© 2021 Schäffer-Poeschel Verlag für Wirtschaft · Steuern · Recht GmbH  
[www.schaeffer-poeschel.de](http://www.schaeffer-poeschel.de)  
[service@schaeffer-poeschel.de](mailto:service@schaeffer-poeschel.de)

Bildnachweis (Cover): © James Thew, Adobe Stock

Produktmanagement: Alexander Kühn  
Lektorat: Adelheid Fleischer

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere die der Vervielfältigung, des auszugsweisen Nachdrucks, der Übersetzung und der Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, vorbehalten. Alle Angaben/Daten nach bestem Wissen, jedoch ohne Gewähr für Vollständigkeit und Richtigkeit.

Schäffer-Poeschel Verlag Stuttgart  
Ein Unternehmen der Haufe Group

## Vorwort zur 2. Auflage

Die Methoden der Mathematik und der Statistik haben ihren selbstverständlichen Platz in den Wirtschaftswissenschaften gefunden. Die Betrachtung wirtschaftswissenschaftlicher Sachzusammenhänge, seien sie betriebswirtschaftlicher oder volkswirtschaftlicher Art, ist ohne Zahlen nicht denkbar. Und wo Zahlen sind, da ist auch Mathematik.

Es ist erfreulich, dass mein Buch zur Wirtschaftsmathematik so gut angenommen wurde, dass eine zweite Auflage erscheinen kann.

Neu hinzugekommen ist ein Kapitel zu den Elastizitäten, die in der ökonomischen Praxis wichtig sind - zudem Änderungen am bestehenden Inhalt.

Während die Bachelorstudiengänge eine wirtschaftswissenschaftliche Grundausbildung vermitteln sollen, die bereits berufsqualifizierend ist, zielen die Masterstudiengänge darauf ab, diese Kenntnisse zu vertiefen und wissenschaftlich zu fokussieren. Infolgedessen sehen sich Mathematiklehrbücher einer besonderen Herausforderung gegenüber, da zu Beginn des Studiums noch nicht klar ist, welche Laufbahn die Studierenden einschlagen. Es gilt, die für die praktischen Erfordernisse nötigen Kenntnisse zu vermitteln, ohne den Weg für aufbauende Studien zu verbauen.

Dieses Buch wird beiden Ansprüchen gerecht. Es vermittelt die zwingend erforderlichen Rechentechniken für die Praxis, ohne das mathematische Fundament und das exakte begriffliche Rüstzeug, das für weitergehende Analysen benötigt wird, zu vernachlässigen.

Nach den elementaren Grundlagen in Kapitel 1, das auch der Klärung der verwendeten Notation dient, folgt der weitere Aufbau des Buches der inneren Logik des Stoffes. Kapitel 2, 3 und 4 widmen sich den Grundzügen der Analysis von Funktionen einer Variablen. Kapitel 5 wendet sich dann der Matrizen- und Vektorrechnung zu. Das Unterkapitel 5.2 befasst sich dort mit den Grundzügen der Linearen Algebra und kann ohne größere Verluste für ein erstes Lesen übergangen werden. Die folgenden Unterkapitel bleiben dennoch verständlich und in sich konsistent. Dies trifft auch auf die Kapitel 6 und 7 zu, sofern die Studierenden oder die Lehrenden, die diesen Text zur Grundlage machen, vor allem das praktische Rechnen zum Ziel haben.

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	V	
Leserhinweise .....	VIII	
<hr/>		
<b>1</b>	<b>Grundlagen in Kürze .....</b>	<b>1</b>
1.1	Ein wenig Logik vorweg .....	1
1.2	Mengen .....	3
1.3	Zahlenmengen .....	7
1.4	Summe und Produkt .....	11
1.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen .....	14
1.6	Ungleichungen und Beträge .....	21
	Aufgaben zu Kapitel 1 .....	25
<hr/>		
<b>2</b>	<b>Reelle Funktionen einer Variablen .....</b>	<b>29</b>
2.1	Grundlagen .....	29
2.1.1	Begriff und Darstellung reeller Funktionen .....	30
2.1.2	Eigenschaften reeller Funktionen .....	33
2.1.3	Ökonomische Funktionen .....	42
2.1.4	Umkehrfunktionen .....	47
2.2	Folgen und Reihen .....	50
2.3	Stetigkeit und Grenzwert von Funktionen .....	61
2.4	Elementare Funktionstypen .....	68
2.4.1	Polynome .....	68
2.4.2	Gebrochen-rationale Funktionen .....	78
2.4.3	Wurzelfunktionen .....	82
2.4.4	Allgemeine Potenzfunktion und Exponentialfunktionen .....	83
2.4.5	Logarithmusfunktionen .....	84
	Aufgaben zu Kapitel 2 .....	86
<hr/>		
<b>3</b>	<b>Differentiation von Funktionen einer Variablen .....</b>	<b>90</b>
3.1	Der Begriff der Ableitung .....	90
3.2	Technik des Ableitens .....	98
3.3	Minimum und Maximum differenzierbarer Funktionen .....	103
3.4	Ökonomische Anwendungen .....	108
3.4.1	Klassisches Ertragsgesetz .....	108
3.4.2	Neoklassische Produktionsfunktion .....	110
3.4.3	Ertragsgesetzliche Kostenfunktion .....	111
3.4.4	Gewinnmaximierung .....	112
3.4.5	Optimale Losgröße .....	119
3.4.6	Elastizitäten .....	120
	Aufgaben zu Kapitel 3 .....	124



<b>4</b>	<b>Integration von Funktionen einer Variablen</b> .....	<b>127</b>
4.1	Stammfunktion und unbestimmtes Integral .....	127
4.2	Technik des Integrierens .....	129
4.3	Bestimmtes Integral .....	130
4.4	Ökonomische Anwendungen .....	134
	Aufgaben zu Kapitel 4 .....	138
<hr/>		
<b>5</b>	<b>Vektoren und Matrizen</b> .....	<b>140</b>
5.1	Einführung und grundlegende Definitionen .....	140
5.2	Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ .....	145
5.2.1	Linearkombination und Basis .....	151
5.2.2	Skalarprodukt und Normen .....	154
5.2.3	Hyperebenen und Halbräume .....	158
5.2.4	Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ .....	159
5.3	Matrizenrechnung .....	162
5.4	Lineare Gleichungssysteme .....	175
5.4.1	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme .....	176
5.4.2	Lösung linearer Gleichungssysteme .....	181
5.5	Determinanten .....	193
	Aufgaben zu Kapitel 5 .....	197
<hr/>		
<b>6</b>	<b>Funktionen mehrerer Variablen</b> .....	<b>203</b>
6.1	Grundlagen .....	203
6.2	Partielle Ableitungen .....	209
6.3	Extremierung ohne Nebenbedingungen .....	217
6.4	Extremierung mit Nebenbedingungen .....	220
6.4.1	Grafische Analyse .....	221
6.4.2	Rechnerische Einführung .....	223
6.4.3	Ein ökonomischer Exkurs .....	225
6.4.4	Die Multiplikatorenregel nach Lagrange .....	227
	Aufgaben zu Kapitel 6 .....	236
<hr/>		
<b>7</b>	<b>Lösungen zu den Aufgaben</b> .....	<b>239</b>
<hr/>		
Sachregister .....		260
Der Autor .....		262

## Leserhinweise

Das leserfreundliche Layout dieses Lehrbuchs verdeutlicht die inhaltliche Struktur des Buches, vermittelt Orientierung und erleichtert das Lernen und Arbeiten mit dem Text in vielfältiger Weise.

**Lernziele:** Jedes Kapitel verfolgt mehrere „Lernziele“, die jeweils ganz zu Beginn des betreffenden Abschnitts aufgeführt sind. Diese Lernziele stimmen inhaltlich auf die nun folgenden Themen ein und verweisen auf die zu erwerbenden Kenntnisse und Fähigkeiten.

**1 Grundlagen in Kürze**

**Lernziele**

- Sie lernen die Sprache der Mathematik kennen und wissen, wie mathematische Aussagen exakt zu verstehen und zu formulieren sind.
- Sie erkennen Grundlagen der Aussagenlogik, der Mengenlehre und der mathematischen Notation. Insbesondere verstehen Sie das Summen- und Produktzeichen.
- Sie verstehen die reellen Zahlen als stetige Zahlengerade, die für die meisten Anwendungen relevant ist.
- Sie erwerben oder vertiefen die Fähigkeit, mit reellen Zahlen zu rechnen.
- Sie gehen sicher mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen um und können die Eigenschaften und Umformungen in den reellen Zahlen lesen.

In diesem Kapitel wird an mathematische Grundlagen erinnert, die vor allem in die Notation, die in Buch verwendet wird, und die „Sprache“ der Mathematik einfließen.

**1.1 Ein wenig Logik vorweg**

Um die Sprache der Mathematik zu verstehen, benötigt man die wesentlichen Konstruktive der Aussagenlogik. Wir beschränken uns hier auf das Nötigste, um die Aussagen des Buches zu verstehen.

Eine mathematische Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das die Eigenschaft hat, entweder wahr oder falsch zu sein. Die Aussage „ $2 < 3$ “ ist eine wahre Aussage, während „ $8 < 3$ “ eine falsche Aussage darstellt. Ständig betrachten wir etwas allgemeinere Konstrukte wie zum Beispiel „ $A_n < 3^n$ “. Hierbei handelt es sich um eine Aussageform, die eine Variable  $n$  enthält und erst durch das Einsetzen von  $n$  mit konkreten Werten zu einer Aussage im obigen Sinn wird. Dabei gilt unser Interesse derjenigen Werten für  $n$ , für die  $A_n$  eine wahre Aussage wird. Im Folgenden verzichten wir auf die strenge Unterscheidung zwischen Aussagen und Aussageformen und sprechen nur noch von Aussagen.

In mathematischen Schlussketten ist man daran interessiert, was daraus folgt, wenn  $A$  wahr ist. So folgt zum Beispiel für diejenigen  $n$ , für die  $A_n$  gilt, dass sie auch „ $B_n < 4^n$ “ erfüllen. Man sagt: Aus  $A$  folgt  $B$ .

Die Formelierung „aus  $A$  folgt  $B$ “ oder gleichbedeutend „ $A$  impliziert  $B$ “ wird oft so beschrieben:  $B$  ist notwendige Bedingung für  $A$ . Das bedeutet: Wenn die Aussage  $A$  gilt, also wahr ist, dann muss auch die Aussage  $B$  wahr sein. Aus der Voraussetzung  $A$  (Prämisse) folgt der Schluss  $B$ . Gilt also die Aussage  $A$ , „Die natürliche Zahl  $n$  ist kleiner als 4“.

**Aussagen**

**Notwendige Bedingung Implikation**

**Marginalien:** Marginalien direkt neben dem Text führen stichwortartig durch die wesentlichen Inhalte des jeweiligen Kapitels. Sie dienen der ersten Orientierung, und weisen auf besondere inhaltliche Aspekte hin. Darüber hinaus helfen die Marginalien, gesuchte Schlagworte und Themen rasch aufzufinden. Außerdem finden die Studierenden hier in der Randspalte zusätzlichen Platz für eigene Notizen.

**1.2 Grundlagen in Kürze Mengen**

**Leere Menge**

Es erweist sich als sinnvoll, auch eine leere Menge zu betrachten. Es ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie wird mit  $\{\}$  oder auch mit  $\emptyset$  notiert. Z.B. ist  $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\} = \{\}$ . Die folgenden Mengenoperationen erweisen sich als hilfreich.

**Definition (Mengenoperationen):**  
Es seien  $M$  und  $N$  Mengen.  $M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$  heißt Vereinigungsmenge von  $M$  und  $N$ , sprich „ $M$  vereinigt mit  $N$ “.  
 $M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$  heißt Schnittmenge von  $M$  und  $N$ , sprich „ $M$  geschnitten mit  $N$ “.  
Gibt  $M \cap N = \emptyset$ , so haben die Mengen  $M$  und  $N$  keine gemeinsamen Elemente und werden als disjunkt bezeichnet.  
 $M \setminus N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$  heißt Differenzmenge, sprich „ $M$  ohne  $N$ “.  
Betrachtet man alle Elemente als zu einer Grundmenge  $\Omega$  zugehörig, dann heißt  $M^c = \{x \in \Omega \mid x \notin M\}$  das Komplement von  $M$ .

**Beispiel 1.1 Mengenoperationen und Venn-Diagramme**  
\*\*\* Gegeben seien die Mengen  $A = \{a, b, c, d\}$  und  $B = \{c, d, e\}$ .  
 $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $A \cap B = \{c, d\}$ ,  $A \setminus B = \{a, b\}$  und  $(A \cap B)^c = \{a, b, c, d, e\} \setminus \{c, d\} = \{a, b, e\}$ .  
Mengen und Mengenoperationen werden oft mit den intuitiv verständlichen Venn-Diagrammen verdeutlicht.

**Abb. 1.1 Venn-Diagramm**

**444**

**Beispiele:** Umfangreiche weiterführende Beispiele, die die Anwendung der mathematischen Methoden zeigen und die Theorie veranschaulichen, sind ebenfalls gesondert hervorgehoben. Sie haben überwiegend ökonomischen Bezug und bereiten die Übungsaufgaben vor.

**Abbildungen:** Die zahlreichen Abbildungen veranschaulichen und ergänzen die beschriebenen Sachverhalte. Im Text wird jeweils der Zusammenhang mit den zugrundeliegenden Formeln erläutert.

Potenzen, Wurzeln und Logarithmen **1.5** 129

**Allgemeiner gilt die folgende wichtige Satz.**

**Satz (Binomischer Lehrsatz):**  
Für  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt:  
 $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$   
 $= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$ .

**Logarithmen**  
Die Logarithmen helfen uns, wenn wir in Gleichungen nach einem Exponenten auflösen wollen.  
Die Spalte stellt sich die Frage, nach welcher Zeit sei angelegtes 100 € mit Zinseszins auf 121 € angewachsen sind, wenn die Bank das Guthaben jährlich mit 10% verzinst.  
Es kennt die Kapitalwertformel  $K_t = K_0 \cdot e^{rt}$  und nach einem Nachdenken kommt er darauf, dass es 2 Jahre sind, denn  $100 \cdot 1,1^2 = 121$ . Wie aber geht man vor, wenn die Zahlen nicht so günstig sind? Nach welcher Zeit werden aus 10.000 € bei 7% Zinsen 10.927,27 € geworden sein? Jeder einzelne Euro muss durch den Verzinsungsprozess auf 1,092727 € kommen. Damit stellt der Sparer vor der Frage  
 $x \cdot 1,092727^t = 10.927,27$ .  
Die mathematische Antwort auf Fragen dieser Art liefert der Logarithmus.

**Definition (Logarithmus):**  
Für positive  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 1$ , ist  $\log_a b$  die Lösung der Gleichung  $a^x = b$ .  
 $x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b$ .  
Der Logarithmus von  $b$  zur Basis  $a$  ist diejenige Zahl, mit der man  $a$  potenzieren muss, um  $b$  zu erhalten.

**Für Logarithmen zur Basis 10 (Dekadischer Logarithmus) schreibt man oft abkürzend  $\lg$  anstelle von  $\log_{10}$ .**  
**Für Logarithmen zur Basis  $e$  (Natürlicher Logarithmus) schreibt man oft abkürzend  $\ln$  anstelle von  $\log_e$ .**

**Beispiele**  
 $\lg 1000 = 3$ , denn  $10^3 = 1000$ ,  $\lg 10^2 = 2$ , denn  $10^2 = 100$ ,  
 $\lg 0,1 = -1$ , denn  $10^{-1} = 0,1$ ,  
 $\lg 102 + \lg 10$ , denn  $2^7 = 128$ ,  $\lg 8 = 3$ , denn  $2^3 = 8$ ,  $\lg 0,5 = -1$ , denn  $2^{-1} = 0,5$ ,  
 $\lg 0,5 = -\frac{1}{2}$ , denn  $8^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,  $\ln 2 = x$ ,  $\ln 2 = -1$ , denn  $e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

Das Rechnen mit Logarithmen ist die Umkehrung des Rechnens mit Potenzen. Als es noch keine Taschenrechner gab, war dies eine Logarithmentafel.

**Definitionen:** Die zentralen mathematischen Definitionen werden in besonders hervorgehobenen Textkästen festgehalten. Sie sind zum gezielten Lernen besonders geeignet.

**Sätze:** Die wichtigen Lehrsätze werden in blauen Kästen zum schnellen Wiederauffinden und zum einprägsamen Lernen dargestellt.

Aufgaben zu Kapitel 1 **1.6** 125

**Aufgaben zu Kapitel 1**

**Aufgabe 1.1**  
Die Negation „nicht A“ ( $\neg A$ ) einer Aussage A bedeutet, dass A nicht gilt.  
Wenn also A wahr ist, dann ist „nicht A“ falsch, und wenn A falsch ist, dann ist „nicht A“ wahr.  
Schließen Sie jeweils logisch:  
• Zu welchem logischen Ausdruck ist  $\neg(A$  oder  $B)$  äquivalent?  
• Was ist die Negation von: „Für alle  $x \in M$  gilt...“?  
• Was ist die Negation von: „Es gibt ein  $x \in M$  für das...“?  
• Was ist die Negation von: „Es gilt eine  $x \in M$  für die...“?  
• Versuchen Sie es mit folgenden konkreten Beispielen: „Jedes Element der Zweierpotenz  $M = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$  ist gerade.“  
• Versuchen Sie es mit folgenden konkreten Beispielen: „Es gibt ein ungerades Element in den Zweierpotenzen  $M = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$ .“

**Literatur zu Kapitel 1**  
Idealerweise sind die Inhalte dieses Kapitels lediglich eine Auffrischung des Schulstoffs. Wer sich diesem Inhalten dennoch etwas ausführlicher widmen möchte, sei auf folgende Quellen verwiesen. Dies wird insbesondere empfohlen, wenn die Lösung der Übungsaufgaben Schwierigkeiten bereitet.  
Schulstofforientiert und ohne Anwendungsbezug, aber zum Auffüllen von Lücken und zum Wiedererwerb gut geeignet:  
Kunze, Karber: Mathematik I: Einführung und Algebra, 16. Auflage, Berlin 2013.  
Die Brücke vom Schulstoff zum mathematischen Grundwissen eines Wirtschaftsstudiums mit viel Bezug zur ökonomischen Anwendung schilling:  
Paukert, Walter: Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, 8. Auflage, Wiesbaden 2014.  
Für weitere Übungen und zur Prüfungsvorbereitung (insbesondere Kapitel 1):  
Schuldenzucker, Ulrike: Prüfungszustellung Analysis und Lineare Algebra, Stuttgart 2014.

**7 Lösungen zu den Aufgaben**

**Lösungen zu den Aufgaben aus Kapitel 1**

**Lösung Aufgabe 1.1**  
 $\neg(A$  oder  $B) \Leftrightarrow \neg A$  und  $\neg B$   
 $\neg(A$  und  $B) \Leftrightarrow \neg A$  oder  $\neg B$ .  
„Es gibt ein  $x \in M$ , für das nicht gilt...“ im Beispiel: „Es gibt ein Element der Zweierpotenzen  $M = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$ , das nicht gerade ist.“  
„Für alle  $x \in M$  gilt nicht...“ im Beispiel: „Jedes Element der Zweierpotenzen  $M = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$  ist nicht ungerade.“

**Aufgaben zu den Kapiteln:** Am Ende jedes Kapitels werden mittels zahlreicher Aufgaben alle Lerninhalte aufgegriffen und deren Anwendung eingeübt. Die Lösungen zu den Aufgaben finden Sie am Ende des Buches in Kapitel 7. Bitte berechnen Sie zuerst selbstständig die Aufgaben und schauen erst dann in den Lösungen nach. Der Lerneffekt ist auf diese Weise umso größer. Sollten Sie auf Wissenslücken oder Unsicherheiten stoßen, wird empfohlen, die entsprechenden Abschnitte nochmals genau durcharbeiten und zu wiederholen.

**Weiterführende Literatur:** Wer sich den Inhalten der einzelnen Kapitel intensiver widmen möchte oder Schwierigkeiten bei der Lösung der Übungsaufgaben hat, sei auf die am Ende jedes Kapitels genannten Quellen verwiesen. Die angeführte Literatur enthält weiterführende Literatur sowie zusätzliche Übungen zur Prüfungsvorbereitung.



# 1

## Grundlagen in Kürze

### Lernziele

- ▶ Sie lernen die Sprache der Mathematik kennen und wissen, wie mathematische Aussagen exakt zu verstehen und zu formulieren sind.
- ▶ Sie erlernen Grundlagen der Aussagenlogik, der Mengenlehre und der mathematischen Notation. Insbesondere verwenden Sie das Summen- und Produktzeichen.
- ▶ Sie verstehen die reellen Zahlen als diejenige Zahlenmenge, die für ökonomischen Anwendungen relevant ist.
- ▶ Sie erwerben oder verfestigen die Fähigkeit, mit reellen Zahlen zu rechnen.
- ▶ Sie gehen sicher mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen um und können Gleichungen und Ungleichungen in den reellen Zahlen lösen.

In diesem Kapitel wird an mathematische Grundlagen erinnert, die vor allem in die Notation, die im Buch verwendet wird, und die „Sprache“ der Mathematik einführen.

### 1.1 Ein wenig Logik vorweg

Um die Sprache der Mathematik zu verstehen, benötigt man die wesentlichen Konstrukte der Aussagenlogik. Wir beschränken uns hier auf das Nötigste, um die Aussagen des Buches zu verstehen.

Eine mathematische Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das die Eigenschaft hat, entweder *wahr* oder *falsch* zu sein. Die Aussage „ $A: 2 < 3$ “ ist eine wahre Aussage, während „ $B: 4 < 3$ “ eine falsche Aussage darstellt. Häufig betrachten wir etwas allgemeinere Konstrukte wie zum Beispiel „ $A: n < 3$ “. Hierbei handelt es sich um eine Aussageform, die eine Variable  $n$  enthält und erst durch das Besetzen von  $n$  mit konkreten Werten zu einer Aussage in obigem Sinn wird. Dabei gilt unser Interesse denjenigen Werten für  $n$ , für die  $A$  zu einer wahren Aussage wird. Im Folgenden verzichten wir auf die strenge Unterscheidung zwischen Aussagen und Aussageformen und sprechen nur noch von Aussagen.

In mathematischen Schlussketten ist man daran interessiert, was daraus folgt, wenn  $A$  wahr ist. So folgt zum Beispiel für diejenigen  $n$ , für die  $A$  gilt, dass sie auch „ $B: n < 5$ “ erfüllen. Man sagt: Aus  $A$  folgt  $B$ .

Die Formulierung „aus  $A$  folgt  $B$ “ ( $A \Rightarrow B$ ) oder gleichbedeutend „ $A$  impliziert  $B$ “ wird oft so beschrieben:  $B$  ist notwendige Bedingung für  $A$ . Das bedeutet: Wenn die Aussage  $A$  gilt, also wahr ist, dann muss auch die Aussage  $B$  wahr sein. Aus der Voraussetzung  $A$  (Prämisse) folgt der Schluss  $B$ . Gilt also die Aussage  $A$ : „Die natürliche Zahl  $n$  ist klei-

---

Aussagen

---

Notwendige Bedingung  
Implikation

ner als drei“, dann ist notwendigerweise auch die Aussage  $B$ : „Die natürliche Zahl  $n$  ist kleiner als fünf“ richtig. Die Formulierung „ $B$  ist notwendige Bedingung für  $A$ “ wird aus der logischen Gegenposition klar. Wenn  $n$  nicht kleiner als fünf ist, dann kann  $n$  auch nicht kleiner als drei sein. Allerdings muss die Umkehrung nicht gelten: Wenn offenbar gilt: ( $A:n < 3 \Rightarrow B:n < 5$ ), muss eine Zahl, die  $B$  erfüllt, z.B. die 4, nicht auch  $A$  erfüllen.

---

Hinreichende Bedingung  
Äquivalenz

Wenn das allerdings der Fall ist, ist  $B$  nicht nur notwendige Bedingung für  $A$  sondern auch hinreichend dafür,  $A$  vollständig zu charakterisieren. Immer wenn  $B$  richtig ist, muss auch  $A$  gelten:  $B \Rightarrow A$ . Man sagt  $B$  ist auch hinreichend für  $A$ . In diesem Fall gelten also  $A \Rightarrow B$  und  $B \Rightarrow A$  gleichzeitig und man sagt:  $A$  ist äquivalent zu  $B$  ( $A \Leftrightarrow B$ ) oder „ $A$  gilt genau dann, wenn  $B$  gilt“ oder auch „ $A$  gilt dann und nur dann, wenn  $B$  gilt.“ Für  $x \in \mathbb{R}$  gilt beispielsweise  $x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$ . Die Äquivalenz fasst also zusammen, dass  $x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$  und auch umgekehrt  $-2 < x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$  gilt.

---

Das logische „und“

Die letzte Formulierung wirft ein Schlaglicht auf die Bedeutung der mathematischen Formulierung „und“. „Dann und nur dann“ bedeutet, dass ( $A \Rightarrow B$ ) und ( $B \Rightarrow A$ ) beide denselben logischen Wert erhalten. Wenn die linke Implikation gilt, dann muss auch die rechte Implikation richtig sein; wenn die linke Implikation nicht richtig ist, dann muss auch die rechte Implikation falsch sein. Wird also die Aussage  $C$  mit der Aussage  $D$  durch die logische Verknüpfung „und“ zu einer neuen Aussage ( $C$  und  $D$ ) zusammengefasst, so ist diese nur wahr, wenn jeweils  $C$  und  $D$  wahr sind. Die mathematischen Formulierung ( $C$  und  $D$ ) ist streng; ihre Gültigkeit verlangt, dass beide Teilaussagen wahr sind, ansonsten ist sie falsch.

---

Das logische „oder“

Die mathematische Formulierung „oder“ ist toleranter. Die Aussage ( $n$  ist gerade oder  $n$  ist ungerade) ist wahr, sofern auch nur eine der beiden Teilaussagen wahr ist. Manchmal sind auch beide Teilaussagen richtig: ( $3 < 5$  oder  $4 < 5$ ). Auch dies ist logisch wahr. Mindestens eine der beiden Teilaussagen muss wahr sein, damit die Oder-Verknüpfung wahr ist.

„Mindestens“ über eine Anzahl von Aussagen formuliert, ist die bescheidene Forderung, dass nur eine dieser Aussagen wahr sein muss; es können allerdings mehrere oder sogar alle Aussagen wahr sein. Die Formulierung „alle“ ist strikter. Sie verlangt, dass jede der Teilaussagen gilt.

---

Existenzaussage

Hierauf bezieht sich die mathematische Formulierung „es existiert“ oder „es gibt“. „Es existiert eine gerade natürliche Zahl“ heißt immer: Es gibt mindestens eine natürliche gerade Zahl. Dabei wird offen gelassen, ob es nicht auch mehrere gerade natürliche Zahlen gibt. Im vorliegenden Fall existieren sogar unendlich viele.

---

All-Aussage

Auf der anderen Seite gilt die Aussage „Alle natürlichen Zahlen sind gerade“ nicht, denn z.B. 3 ist nicht gerade. Da die Aussage über alle natürlichen Zahlen getroffen wurde, ist sie falsch. Ein einziges Gegenbeispiel reicht aus, die All-Aussage zu widerlegen.

---

Beweis

Dies führt uns zum Begriff des mathematischen Beweises. In ihm wird aus Voraussetzungen über eine Aneinanderreihung von Folgerungen oder Äquivalenzen eine Schlussfolgerung (ein mathematischer Satz) hergeleitet. Dies wird oft durch Beispiele verdeutlicht. Wichtig aber ist: Jedes Beispiel belegt den Beweis, aber das Beispiel kann ihn nicht ersetzen. Jedoch widerlegt auch nur ein einziges Gegenbeispiel den Satz. Denn dieser formuliert letztlich: Immer wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, gilt...

## 1.2 Mengen

Der Begriff der Menge ist grundlegend für die Mathematik. Er reflektiert die Fähigkeit des Menschen, eine Zusammenfassung von Objekten als ein Ganzes zu betrachten. In der Wirtschaftsstatistik bezeichnet der sogenannte Warenkorb mathematisch gesehen eine Menge. Der Warenkorb ist eine Zusammenstellung einer möglichst repräsentativen Auswahl von nachgefragten Waren und Dienstleistungen und umfasst ca. 700 Elemente, deren Preise mit Gewichten versehen werden, um daraus eine Messzahl für die Inflation zu berechnen.

### Definition (Menge):

Eine Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Die Definition der Menge ist sehr allgemein gehalten. Sie beschränkt uns nicht auf die Betrachtung von Zusammenfassungen dinglicher Objekte, sondern erlaubt auch die Mengenbildungen über abstrakte Konstrukte wie z.B. die Menge der ganzen Zahlen. Dabei bedeutet der Begriff „Zusammenfassung“, dass es auf die Betrachtung der Reihenfolge der Objekte nicht ankommt. „Wohlunterschieden“ drückt aus, dass es keinen Sinn macht, in einer Menge auch identische Objekte zusammenzufassen. Die Objekte einer Menge werden Elemente genannt. Man schreibt  $2 \in \mathbb{N}$  (lies 2 ist Element der Menge der natürlichen Zahlen), um zu verdeutlichen, dass die 2 zur Menge der natürlichen Zahlen gehört. Entsprechend notiert man  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ , um zu verdeutlichen, dass  $\frac{1}{2}$  nicht zu den natürlichen Zahlen gehört. Wesentlich für diesen auf Georg Cantor, den Begründer der Mengenlehre, zurückgehenden Mengenbegriff ist es, dass man von den Objekten stets entscheiden kann, ob sie ein Element der betrachteten Menge sind oder nicht.

Zur Beschreibung einer Menge benutzt man oft die Aufzählung in Mengenklammern.  $A := \{1, 2, 3\}$ <sup>1</sup> ist die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2 und 3. Im Vertrauen darauf, dass das Bildungsgesetz hinreichend klar wird, kann man auch unendlich große Mengen beschreiben:  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$  soll (wenn auch wenig exakt) die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen. Häufig werden Mengen auch etwas formaler beschrieben:  $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 3\}$  bezeichnet ebenfalls die Menge  $A$ . Bei der Definition einer Menge kommt es also nicht auf die Art und Weise der Beschreibung an, insbesondere ist die Reihenfolge der Aufzählung der Elemente einer Menge unerheblich:  $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 2, 3, 1\}$ .

Die obige Menge  $A$  ist Teil der natürlichen Zahlen. Man sagt allgemein, dass  $A$  eine Teilmenge der Menge  $B$  darstellt, wenn gilt:  $x \in A \Rightarrow x \in B$ , und schreibt  $A \subseteq B$ .

---

Beschreibung von Mengen

---

Teilmenge

<sup>1</sup>  $A :=$  bedeutet, dass eine Definitionsgleichung vorliegt. Links vom „:=“ steht ein Name für das, was rechts beschrieben ist. Mit „=“ ohne Doppelpunkt werden Identitäten oder Bestimmungsgleichungen notiert.

Leere Menge

Es erweist sich als sinnvoll, auch eine leere Menge zu betrachten. Es ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie wird mit  $\{\}$  oder auch mit  $\emptyset$  notiert. Z.B. ist  $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\} = \{\}$ . Die folgenden Mengenoperationen erweisen sich als hilfreich.

**Definition (Mengenoperationen):**

Es seien  $M$  und  $N$  Mengen.  $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$  heißt Vereinigungsmenge von  $M$  und  $N$ , sprich „ $M$  vereinigt mit  $N$ “.

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$$

heißt Schnittmenge von  $M$  und  $N$ , sprich „ $M$  geschnitten mit  $N$ “.

Gilt  $M \cap N = \emptyset$ , so haben die Mengen  $M$  und  $N$  keine gemeinsamen Elemente und werden als disjunkt bezeichnet.

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

heißt Differenzmenge, sprich „ $M$  ohne  $N$ “.

Betrachtet man alle Elemente als zu einer Grundmenge  $\Omega$  zugehörig, dann heißt  $\bar{M} := \{x \mid x \in \Omega \text{ und } x \notin M\}$  das Komplement von  $M$ .

**Beispiel 1.1 Mengenoperationen und Venn-Diagramme**

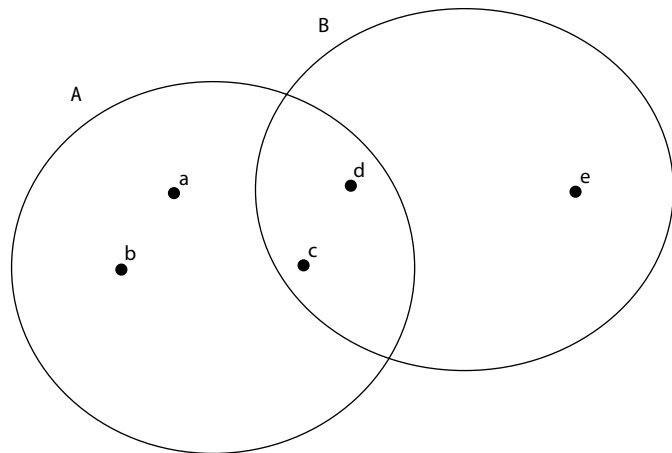
So macht man sich ein Bild von Mengen.

►► Gegeben seien die Mengen  $A := \{a, b, c, d\}$  und  $B := \{c, d, e\}$ . Es ist  $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ ,  $A \cap B = \{c, d\}$ ,  $A \setminus B = \{a, b\}$  und  $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ .

Mengen und Mengenoperationen werden oft mit den intuitiv verständlichen Venn-Diagrammen verdeutlicht:

Abb. 1-1

Venn-Diagramm





Eine weitere Mengenoperation, das kartesische Produkt, geht auf den Mathematiker und Naturphilosophen Descartes (Lat. Cartesius) zurück.

**Definition (Kartesisches Produkt):**

Das kartesische Produkt der nichtleeren Mengen  $X_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) ist die Menge  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i, i = 1, \dots, n\}$ .  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  heißt das aus den  $X_i$  gebildete  $n$ -Tupel. Ein einzelnes  $x_i$  wird  $i$ -te Komponente des  $n$ -Tupels genannt.

$n$ -Tupel sind geordnet, das heißt, hier kommt es auf die Reihenfolge der Komponenten an:  $(a, b) \neq (b, a)$ . Daher nennt man 2-Tupel in der Regel geordnete Paare. Tripel und Quadrupel sind ebenfalls gängige Bezeichnungen für Tupel mit drei und vier Komponenten.

**Beispiel 1.2 Kartesisches Produkt zweier Mengen**

**Schachbrett**

Gegeben seien die Mengen  $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  und  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Dann ist das kartesische Produkt

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{cccccc} (a, 1), & (a, 2), & \dots & (a, 7), & (a, 8), \\ (b, 1), & (b, 2), & \dots & \dots & (b, 8), \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ (h, 1), & (h, 2), & \dots & \dots & (h, 8) \end{array} \right\}.$$

Üblich für die Notation einer Menge ist die beliebige Aufzählung der Elemente. Die hier getroffene Anordnung soll suggerieren, dass dieses kartesische Produkt das mathematische Abbild eines Schachbrettes darstellen könnte, sofern man auf die Unterscheidung von schwarzen und weißen Feldern verzichtet.

**Geordnete reelle Paare**

Häufig ist eine ökonomische Größe nicht von einer einzelnen reellen Zahl abhängig. So hängt zum Beispiel die Nachfrage nach einem Gut nicht nur allein von dessen Preis  $p$  ab, sondern auch vom Budget  $B$  des Konsumenten. In diesem Fall fasst man die beiden relevanten Parameter zu einem Paar  $(p, B)$  zusammen. Belegt man die Parameter mit konkreten Zahlen, so erhält man ein geordnetes Paar reeller Zahlen.

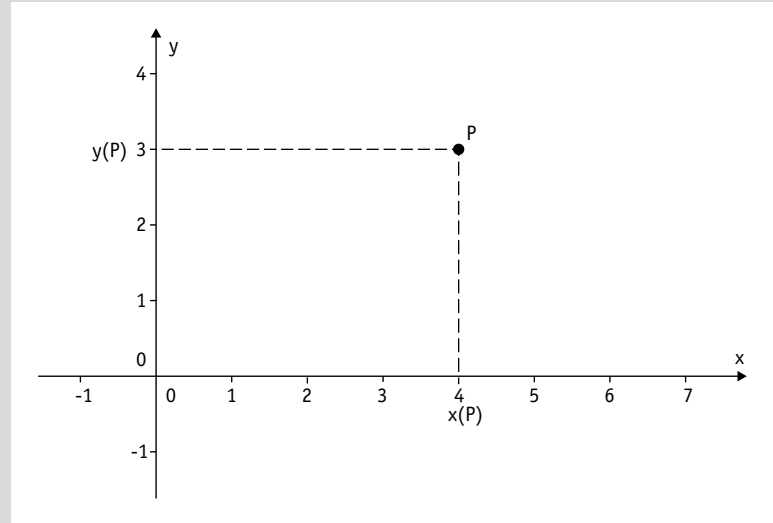
Führt man ein Koordinatensystem ein, dann können solche Paare wie z.B. das Paar  $(x, y) = (1, 2)$  mit einem Punkt  $P$  in der Ebene identifiziert werden (siehe Abb. 1-2).

Ein Punkt  $P$  besitzt somit eine  $x$ - und eine  $y$ -Koordinate.

Die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen bezeichnet man mit  $\mathbb{R}^2$ . Offensichtlich ist  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  das kartesische Produkt von  $\mathbb{R}$  mit sich selbst. Dies erklärt auch den bekannten Begriff „kartesisches Koordinatensystem“. ◀◀

Abb. 1-2

## Die reelle Zahlenebene



So rechnet man mit Mengen.

Abschließend nennen wir einige Gesetzmäßigkeiten, die im Zusammenhang mit Mengenoperationen nützlich sind.

**Satz (Mengenoperationen):**

$M, N$  und  $P$  seien beliebige Mengen. Dann gilt

Idempotenzgesetz:  $M \cap M = M \cup M = M$

Kommutativgesetz:  $M \cap N = N \cap M$

$M \cup N = N \cup M$

Assoziativgesetze:  $M \cap (N \cap P) = (M \cap N) \cap P$

$M \cup (N \cup P) = (M \cup N) \cup P$

Distributivgesetze:  $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$

$M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$

Die Gültigkeit dieser Gesetzmäßigkeiten sieht man schnell unter Verwendung von Venn-Diagrammen ein. (Aufgabe!)

## 1.3 Zahlenmengen

### Natürliche Zahlen

Mithilfe der natürlichen Zahlen werden wir in die Lage versetzt, Mengen abzuzählen:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

Die natürlichen Zahlen sind (u.a.) dadurch charakterisiert, dass 1 eine natürliche Zahl ist und jede natürliche Zahl  $n$  einen Nachfolger  $n+1$  besitzt. Die kleinste natürliche Zahl ist die 1. Sie ist die einzige natürliche Zahl, die keinen natürlichen Vorgänger besitzt.

Hierauf beruht das Prinzip der vollständigen Induktion:

Weiß man, dass eine Behauptung  $A(n)$

- ▶ für  $n = 1$  richtig ist (Induktionsverankerung), und folgt aus logischen Gründen:
- ▶ Sofern  $A(n)$  für ein beliebiges  $n$  richtig ist (Induktionsvoraussetzung), dann ist auch  $A(n+1)$  richtig (Induktionsschluss),
- ▶ dann ist die Behauptung für jedes  $n$  korrekt.

---

Ein sehr wichtiges Prinzip  
in der Mathematik

### Beispiel 1.3 Vollständige Induktion

▶▶ Man kann durch direktes Nachrechnen nachweisen, dass folgendes richtig ist:

Die Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen ist  $n$  zum Quadrat.

Stellen wir uns vor, dass wir das nicht wüssten, sondern durch Beobachten und Ausprobieren lediglich vermuten würden. Dann könnten wir diese Vermutung auf die folgende Art und Weise bestätigen:

Induktionsverankerung:  $1 = 1^2$  ist sicherlich korrekt.

Induktionsvoraussetzung: *Nehmen wir an*, dass die Behauptung für beliebiges  $n$  richtig ist:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{n \text{ Zahlen}} = n^2.$$

Induktionsschluss: Dann zeigt die nachfolgende Rechnung, dass die Behauptung auch für  $n + 1$  gelten muss:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Damit aber muss unsere Vermutung nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für jede natürliche Zahl zutreffen. ◀◀

Fügen wir den natürlichen Zahlen die Null zu, erhalten wir

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Die natürlichen Zahlen sind abgeschlossen bezüglich der Addition. Das bedeutet: Wenn man zwei beliebige natürliche Zahlen addiert, erhält man wieder eine natürliche Zahl.

Venezianische Kaufleute benutzten die negativen Zahlen, um Guthaben von Schulden unterscheiden zu können.

Brüche bilden die rationalen Zahlen.

### Ganze Zahlen

Fügt man den natürlichen Zahlen die negativen natürlichen Zahlen hinzu, erhält man die Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \} = -\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_0.$$

In den ganzen Zahlen sind auch die Subtraktion und die Multiplikation abgeschlossen, nicht aber die Division. Hierfür benötigt man die Brüche.

### Rationale Zahlen

Die Brüche oder auch rationalen Zahlen sind definiert durch

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Der Nenner eines Bruches darf offensichtlich nicht null sein. Das wissen wir seit der frühesten Schulzeit: „Durch null darf man nicht teilen!“

Aber warum eigentlich nicht? Die folgende „Rechnung“ macht deutlich, dass die Mathematik ins Chaos führte, würde man das zulassen:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \cdot 2 \mid :0? \\ ?1 &= 2? \end{aligned}$$

Viele Fragestellungen des täglichen Lebens lassen sich durch die Berechnungen im Bereich der Brüche lösen.

#### Rechenregeln für Brüche:

Zwei Brüche werden addiert, indem man sie gleichnamig macht und die Zähler addiert:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Zwei Brüche werden multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dessen Kehrwert multipliziert:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

### Reelle Zahlen

Bereits die alten Griechen entdeckten, dass sich nicht alles in der Mathematik durch Proportionen, also Brüche, ausdrücken lässt. Schon Euklid bewies (ca. 300 v. Chr.), dass nicht jede Zahl (eigentlich jedes Verhältnis von geometrischen Längen) als Bruchzahl darstellbar ist. Es existieren Zahlen, die eine nichtendliche und nichtperiodische Dezimaldarstellung besitzen wie zum Beispiel

$$\sqrt{2} = 1,41421356237 \dots \text{ und die Kreiszahl } \pi = 3,14159265358 \dots$$



Es gibt jedoch Zahlen, die diese Eigenschaft nicht besitzen, die Nicht-Bruch-Zahlen oder auch irrationalen Zahlen. Die folgende Dezimalzahl ist weder abbrechend noch periodisch:

1,10100100010000100000100000010000001 . . . . .

Vor jeder Eins wird im Nachkommabereich stets einfach eine Null mehr eingefügt als bei der vorausgegangenen Eins. Nach diesem Muster erhält man offensichtlich eine unendliche Dezimaldarstellung, die auch nicht periodisch ist. Es kann sich also, so weit wir jetzt wissen, nicht um eine Dezimaldarstellung eines Bruches handeln. Und doch gibt es diese Zahl.

Die alten Griechen entdeckten die irrationalen Zahlen u.a. in der Zahl  $\sqrt{2}$ . Da wir als Ökonomen oft auf Gleichungen treffen, die Potenzen und Wurzeln enthalten, ist es auch für ökonomische Zwecke erforderlich, damit rechnen zu können.

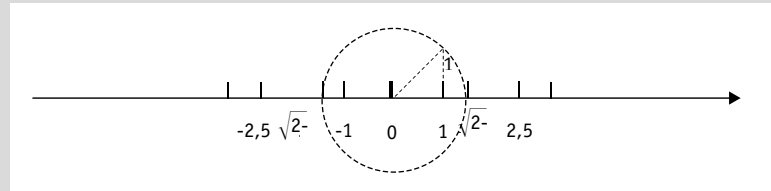
Fassen wir die irrationalen Zahlen  $\mathfrak{I}$  mit den Brüchen  $\mathbb{Q}$  zusammen, dann erhalten wir die reellen Zahlen

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathfrak{I}.$$

Der Zahlbereich der reellen Zahlen kann mithilfe der Zahlengeraden veranschaulicht werden. Hierbei handelt es sich um eine Gerade, auf der man die Null positioniert. Links davon befinden sich dann die negativen reellen Zahlen  $x < 0$  und rechts davon die positiven reellen Zahlen  $x > 0$ .

Abb. 1-4

#### Die reelle Zahlenachse



Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlengeraden. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Zahlengeraden einer reellen Zahl. Da der abgebildete Kreis nach dem Satz des Pythagoras den Radius  $\sqrt{2}$  hat, belegt Abb. 1-3, dass auf der Zahlengeraden auch die irrationalen Zahlen ihren Platz finden.

Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

#### Teilmengen der reellen Zahlen

In den ökonomischen Anwendungen ist es selten erforderlich, die gesamte Menge der reellen Zahlen zu betrachten. In der Regel reicht es aus, sich auf Teilmengen von  $\mathbb{R}$  zu beschränken.

Rational vereinigt mit irrational ergibt reell.

**Definition (reelle Intervalle):**

Für  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$  sind Intervalle zusammenhängende Teile der reellen Zahlenachse:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  ist ein abgeschlossenes Intervall.

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  ist ein offenes Intervall.

$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  heißt rechtsoffenes Intervall.

$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  heißt linksoffenes Intervall.

Es bezeichnet

$\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$  die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen,

$\mathbb{R}_{++} := (0, \infty)$  die Menge der positiven reellen Zahlen,

$\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$  die Menge der nichtpositiven reellen Zahlen,

$\mathbb{R}_{--} := (-\infty, 0)$  die Menge der negativen reellen Zahlen.

Ein offenes Intervall kann auch als eine Epsilon-Umgebung um seinen Mittelpunkt verstanden werden:

Für  $\varepsilon > 0$  ist  $U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$  die Epsilon-Umgebung von  $a$ .

Diese Definitionen erscheinen lästig, sind aber tatsächlich höchst hilfreich.

Die  $\varepsilon$ -Umgebung wird uns noch hilfreiche Dienste bei der Betrachtung von Grenzwerten leisten; sie ist das wohl wichtigste Konstrukt in der Analysis.

## 1.4 Summe und Produkt

Das griechische große „S“, das Symbol  $\Sigma$ , bedeutet mathematisch die Aufforderung zu summieren. Es ist nützlich, um umfangreiche Additionen übersichtlich zu notieren.

Das Summenzeichen hilft, eine Summation kurz zu notieren.

### Beispiel 1.4 Summation

►► Ein Unternehmen schreibt die Absatzzahlen  $a_i$  eines Produktes in Stück für die Kalenderwochen  $i = 1, \dots, 52$  und die jeweiligen Verkaufspreise  $p_i$  fortlaufend in eine

Abb. 1-5

Tabelle der Absatzdaten

Kalenderwoche	1	2	3	.....	51	52
Absatzmenge [Stück]	$a_1$	$a_2$	$a_3$	.....	$a_{51}$	$a_{52}$
Verkaufspreis [€]	$p_1$	$p_2$	$p_3$	.....	$p_{51}$	$p_{52}$
Korrektur [Stück]	$c_1$	$c_2$	$c_3$	.....	$c_{51}$	$c_{52}$

Tabelle. Zudem werden mit einer gewissen zeitlichen Verzögerung Korrekturbuchungen  $c_i$  nötig, die ebenfalls in dieser Tabelle erfasst werden.

Offensichtlich teilt sich der Jahresabsatz  $JA$  z.B. auf die Absätze im ersten und zweiten Halbjahr auf:

$$JA = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{52} = (a_1 + a_2 + \dots + a_{25} + a_{26}) + (a_{26} + a_{27} + \dots + a_{51} + a_{52}).$$

Unter Verwendung des Summenzeichens schreibt man hierfür kürzer:

$$JA = \sum_{i=1}^{52} a_i = \sum_{i=1}^{26} a_i + \sum_{i=27}^{52} a_i.$$

Für den Jahresumsatz  $JU$  gilt:

$$JU = \sum_{i=1}^{52} p_i a_i,$$

und der korrigierte Jahresabsatz beträgt:  $JA_{korrr} = \sum_{i=1}^{52} (a_i + c_i) = \sum_{i=1}^{52} a_i + \sum_{i=1}^{52} c_i.$  ◀◀◀

Das obige Beispiel macht die nachfolgende Definition und die Auflistung der wichtigsten Rechenregeln selbsterklärend.

#### Definition und Satz (Summenzeichen):

Es seien  $m$  und  $n$  gegebene ganze Zahlen. Dann ist der Ausdruck  $\sum_{k=m}^n a_k$

(lies Summe über  $a_k$  von  $k=m$  bis  $k=n$ ) eine abkürzende Schreibweise für die Summe der Zahlen  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ :

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n.$$

$k$  heißt Summationsindex;  $m$  und  $n$  heißen untere resp. obere Summationsgrenze.

Es gilt:

1. Für  $m < z < n$  ist  $\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^z a_k + \sum_{k=z+1}^n a_k$ .
2.  $\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k$ .
3.  $\sum_{k=m}^n c a_k = c \sum_{k=m}^n a_k, c \in \mathbb{R}$  konstant.
4.  $\sum_{i=1}^n c = nc$ .

In obiger Definition ist zu beachten, dass die Summationsgrenzen auch negativ sein können.

Viele mathematische Definitionen und auch mathematische Formeln werden mit dem Summenzeichen effizient notiert. Besonders nützlich wird die Verwendung des Summenzeichens, wenn die Summanden jeweils aus dem Summationsindex heraus zu berechnen sind. Häufig gibt es dabei hilfreiche Formeln für die resultierende Summe.

#### Beispiel 1.5 Summenformeln

▶▶ In der Statistik werden Sie folgende Formeln antreffen:

▶  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  arithmetisches Mittel der Zahlen  $x_1$  bis  $x_n$



$$\triangleright s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \text{ empirische Varianz der Zahlen } x_1 \text{ bis } x_n$$

In der Finanzmathematik trifft man oft auf:

$$\triangleright \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \text{ arithmetische Summe}$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^n q^{i-1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ geometrische Summe}$$

Aus den obigen Rechenregeln ergeben sich oftmals leicht neue Formeln:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1) &= \sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \sum_{k=1}^n k - n \\ &= 2 \frac{n \cdot (n+1)}{2} - n \\ &= n^2. \blacktriangleleft\blacktriangleleft \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hatten wir in Beispiel 1.3 bereits mithilfe der vollständigen Induktion bewiesen. Für die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen gilt:

$$1 + 3 + \dots + 2n - 1 = n^2.$$

In analoger Weise definiert man das Produktzeichen.

Diese beiden Summenformeln sind *die* Grundlage der Finanzmathematik.

Das Produktzeichen hilft, Produkte kurz zu notieren.

### Definition und Satz (Produktzeichen):

Es seien  $m$  und  $n$  gegebene ganze Zahlen. Dann ist der Ausdruck  $\prod_{k=m}^n a_k$

(lies Produkt über  $a_k$  von  $k=m$  bis  $k=n$ ) eine abkürzende Schreibweise für das Produkt der Zahlen  $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ :

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

$k$  heißt Multiplikationsindex;  $m$  und  $n$  heißen untere resp. obere Multiplikationsgrenze.

Es gilt:

$$1. \text{ Für } m < z < n \text{ ist } \prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m}^z a_k \cdot \prod_{k=z+1}^n a_k.$$

$$2. \prod_{k=m}^n (a_k \cdot b_k) = \prod_{k=m}^n a_k \cdot \prod_{k=m}^n b_k$$

$$3. \prod_{k=m}^n (c a_k) = c^{n+1-m} \prod_{k=m}^n a_k$$

$$4. \prod_{k=1}^n a = a^n \text{ für ein } a \in \mathbb{R} \text{ heißt } n\text{-te Potenz von } a.$$

$$5. \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n =: n! \text{ heißt } n \text{ Fakultät. Zudem setzt man } 0! := 1.$$

Die Methode der rekursiven Definition treffen wir in Kapitel 5.5 wieder an.

Die Fakultät einer natürlichen Zahl lässt sich auch rekursiv definieren. Eine rekursive Definition einer Funktion erklärt ihren Wert über den Wert des Vorgängers:

$$n! := n \cdot (n-1)!$$

$$0! := 1$$

Um die Rekursion abzuschließen, ist es erforderlich, dem letzten Vorgänger einen Wert zuzuweisen. Hier:  $0! := 1$ .

Dieses Prinzip findet in der Informatik in der rekursiven Prozedur vielfältige Anwendung. Man erkennt leicht, dass die Rekursion die Definition eines Wertes auf die identische Definition ihres Vorgängers zurückführt. Verfährt man so fortgesetzt, trifft man endlich auf den Rekursionsanfang (hier  $0! = 1$ ). Hiervon startend kann man die ursprüngliche Lösung auf dem „Rückweg“ lösen:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(n-1)) \cdot (n-n)! \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1. \end{aligned}$$

Zum Beispiel:  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$ .

## 1.5 Potenzen, Wurzeln und Logarithmen

Wir beginnen mit der Einführung der Potenzen reeller Zahlen und belegen dann, dass die sogenannten Wurzeln ebenfalls Potenzen reeller Zahlen sind.

### Potenzen und Wurzeln

Zunächst ist auch die Potenz eine abkürzende Schreibweise.

$a^n = \prod_{i=1}^n a_i$  ist  $n$ -fache Produkt von  $a$  mit sich selbst (vgl. Kap.1.4). Man spricht „ $a$  hoch  $n$ “ oder „ $a$  zur  $n$ -ten Potenz“. Eine Potenz ist nichts anderes als eine kurze Schreibweise für lange Produkte. Es sollte also nicht verwundern, dass die Regeln der Multiplikation direkt zu Regeln für die Potenzrechnung führen.

Für reelles  $a$  und natürliche Zahlen  $m$  und  $n$  gilt  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ .

Für  $m > n$  ist ebenfalls richtig  $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (*)$ .

Die Rechnungen

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m-n \text{ Faktoren}}} = a^{m-n}$$

Die Potenzrechnung kann noch mehr.

legen es nahe, Potenzen auch für nichtpositive Exponenten zu erklären:

#### Definition:

Für  $a \neq 0$  ist  $a^0 := 1$  und  $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ .

Auf diese Art und Weise bleibt die Rechenregel (\*) auch für beliebige Paare von  $m$  und  $n$  gültig und der Ausdruck „ $a$  hoch eine negative Zahl“ bekommt einen Sinn.

### Beispiel 1.6 Auf- und Abzinsen von Kapital

►► Auf dem Kapitalmarkt herrsche ein Anlagezins von  $i = 7\% = 0,07$  p.a. Damit definiert man den Aufzinsungsfaktor  $q := 1 + i = 1,07$ .

Wird ein Anfangskapital  $K_0$  am Anfang eines Zinsjahres angelegt und werden die Zinsen dem Kapital am Ende eines jeden Zinsjahres gutgeschrieben, dann entwickelt sich das Kapital auf folgende Art und Weise:

Am Ende des 1. Jahres:  $K_1 = K_0 \cdot q$ ,

am Ende des 2. Jahres:  $K_2 = K_1 \cdot q = K_0 \cdot q^2$ ,

am Ende des 3. Jahres:  $K_3 = K_2 \cdot q = K_0 \cdot q^3$ ,

...

am Ende des  $n$ . Jahres:  $K_n = K_{n-1} \cdot q = K_0 \cdot q^n$ .

Also ist  $K_{10} = K_0 \cdot 1,07^{10} = 1,967\dots \approx 2K_0$ . Die Rechnung belegt die bekannte kaufmännische Faustformel, dass sich ein Kapital bei 7% in etwa 10 Jahren mit Zins und Zinseszins verdoppelt. Den Vorgang, den Wert eines Kapitals in die Zukunft hochzurechnen, nennt man Aufzinsen.

Will man umgekehrt den heutigen Wert eines zukünftigen Kapitals berechnen, spricht man vom Abzinsen oder Diskontieren.  $q^{-1}$  heißt Diskontfaktor.

Will man also wissen wie viel Geld man heute zu 7% anlegen muss, damit daraus mit Zins und Zinseszins 2000 € werden, dann rechnet man

$$K_0 \cdot 1,07^{10} = 2000,$$

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{2000}{1,07^{10}} \\ &= 2000 \cdot 1,07^{-10} \\ &= 1016,70. \end{aligned}$$

1016,70 € ist der sogenannte Barwert eines Kapitals von 2000 €, das in 10 Jahren fällig wird bei einer Verzinsung von 7%.

$K_n = K_0 q^n$  ist die Kapitalendwertformel,

$K_n = K_0 q^{-n}$  ist die Kapitalbarwertformel. ◀◀

Wie wir gesehen haben, ist die Definition von Potenzen mit negativen Exponenten so getroffen worden, um mit einer Rechenregel allgemeiner rechnen zu können. Aus ähnlichem Grund ist es sinnvoll, auch für gebrochene Exponenten eine Potenz zu erklären.

Wurzeln sind auch nur  
Potenzen.

**Definition (Wurzeln):**

Für  $a \in \mathbb{R}_+$  und  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  ist  $a^{\frac{m}{n}}$  die eindeutige nicht negative Lösung der

$$\text{Gleichung} \quad x^n = a^m$$

$$x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Man nennt diese Potenz auch  $n$ -te Wurzel aus  $a^m$ .

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$  heißt  $n$ -te Wurzel aus  $a$ .

Anstelle von  $\sqrt[n]{a}$  schreibt man oft kürzer  $\sqrt{a}$ .

**Beispiele**

- ▶  $10^3 = 1000$ ;  $10^2 = 100$ ;  $10^1 = 10$ ;  $10^0 = 1$ ;  $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ ;  $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$
- ▶  $2^3 = 8$ ;  $2^2 = 4$ ;  $2^1 = 2$ ;  $2^0 = 1$ ;  $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$ ;  $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25$
- ▶  $(-2)^3 = -8$ ;  $(-2)^2 = 4$ ;  $(-2)^1 = -2$ ;  $(-2)^0 = 1$ ;  $(-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$ ;  
 $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$
- ▶  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = 2^{-2}$
- ▶  $1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$ ;  $100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$
- ▶  $1000^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{1000^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{10} = 0,1$
- ▶  $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$ ;  $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ ;  $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} = 0,5$ ;  $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$
- ▶  $8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$
- ▶  $(-4)^{\frac{1}{2}}$  ist nicht definiert! Die Gleichung  $x^2 = -4$  hat keine Lösung in  $\mathbb{R}$ .
- ▶  $(-27)^{\frac{1}{3}}$  ist nicht definiert! Auch ungerade Wurzeln sind für negative Zahlen nicht definiert, trotzdem ist  $(-3)^3 = -27$ .

Es ist stets zu beachten, dass Wurzeln aus negativen Zahlen nicht definiert sind. Auch nicht bei ungeraden Wurzelexponenten.