Daniel D. H. Lange (Hrsg.)

Versicherungs-management

Kohlhammer

Kohlhammer

Daniel D. H. Lange (Hrsg.)

Versicherungsmanagement

Verlag W. Kohlhammer

Kontaktadresse des Herausgebers:
Prof. Dr. Daniel D. H. Lange
Versicherungs- und Finanzmanagement
Hochschule RheinMain | Wiesbaden Business School
Postfach 3251
65022 Wiesbaden
E-Mail: Daniel.Lange@hs-rm.de

1. Auflage 2021

Gesamtherstellung: W. Kohlhammer GmbH, Stuttgart

Print:
ISBN 978-3-17-037796-7

E-Book-Formate:
pdf: ISBN 978-3-17-037797-4
epub: ISBN 978-3-17-037798-1
mobi: ISBN 978-3-17-037799-8

Vorwort des Herausgebers

Liebe Leserinnen und Leser,

das vorliegende Buch richtet sich an Dozierende, Studierende sowie Fach- und Führungskräfte der Versicherungswirtschaft. Das Ziel der Einzelbeiträge dieses Bandes ist es, praxisrelevante und wissenschaftlich anspruchsvolle Inhalte in einer leicht verständlichen Weise zu erklären, sodass die wesentlichen Aspekte der Versicherungswirtschaft und des Versicherungsmanagements in kürzester Zeit verstanden werden können. Die Mitwirkenden verfügen über umfangreiche Lehr- und Praxiserfahrung in den von ihnen behandelten Themengebieten. Ihre Beiträge haben einen engen Bezug zur beruflichen Wirklichkeit; die wesentlichen, theoretischen Konzepte werden durch praxisnahe Beispiele veranschaulicht und leicht nachvollziehbar aufbereitet.

Die ersten beiden Kapitel des Buches geben einen fundierten Einblick in die grundlegenden Themen des Versicherungsmanagements und die zahlreichen Herausforderungen im Umfeld der Versicherungsunternehmen. Es werden die zentralen Begriffe, Konzepte und Grundprinzipien der Versicherungswirtschaft eingeführt sowie die vielfältigen, äußeren Einflüsse, die beispielsweise technologischer, rechtlicher und gesamtwirtschaftlicher Art sein können, erläutert.

In den folgenden Kapiteln werden einzelne Bereiche der Versicherungsbetriebe betrachtet, die für den wirtschaftlichen Erfolg der Unternehmen von zentraler Bedeutung sind. Dazu gehören der Versicherungsvertrieb, die Produktentwicklung und das Schadenmanagement. Die digitale Transformation der Versicherungsbranche, welche insbesondere auch die zuvor genannten Bereiche der Versicherungsunternehmen betrifft, ist Gegenstand des fünften Kapitels. Im Anschluss werden im sechsten Kapitel die Grundzüge der handelsrechtlichen und internationalen Rechnungslegung der Versicherungsunternehmen behandelt. Auf der Aktivseite der Bilanzen der Versicherungsunternehmen sind die Kapitalanlagen der mit Abstand größte Posten. Letztere werden im siebten Kapitel ausführlich betrachtet. Das achte Kapitel bietet eine Einführung in das aufsichtsrechtliche Berichtswesen und die Offenlegungspflichten der Versicherungsunternehmen. Kapitel zu Spezialgebieten, wie der Krankenversicherung, der Rückversicherung sowie der Kredit- und Kautionsversicherung, runden den umfassenden und vielseitigen Charakter des Werkes ab.

Im Namen aller Mitwirkenden wünsche ich eine erhellende Lektüre und viel Erfolg mit den gewonnenen Erkenntnissen in Studium und Beruf!

Wiesbaden, im Oktober 2020 Daniel D. H. Lange

Inhaltsübersicht

1 Die Grundlagen des Versicherungsmanagements

Daniel D. H. Lange

1.1 Was ist eine Versicherung?

Schon immer waren Menschen mit dem Problem der Unsicherheit und Ungewissheit hinsichtlich zukünftiger Entwicklungen konfrontiert. In den meisten Situationen ist unklar, was uns die Zukunft bringen wird: Werden wir uns viele Jahre bester Gesundheit erfreuen oder werden wir krank werden? Werden unsere Felder reiche Ernte abwerfen oder wird uns das Wetter die Ernte »verhageln«? Werden uns unsere Vorhaben gelingen oder werden wir scheitern? Wir wissen es in den meisten Fällen nicht. Aus dieser Ungewissheit resultiert Unsicherheit und aus der Unsicherheit entsteht bei vielen Menschen schließlich Angst; Angst vor »negativen« zukünftigen Entwicklungen, welche das Erreichen unserer Ziele bedrohen.

Dieser Zustand der Angst ist ein unangenehmer und »unbequemer« Zustand und Menschen haben seit vielen Jahrtausenden nach Möglichkeiten gesucht, sich von der Unsicherheit und der damit verbundenen Angst zu befreien. Es wurden zahlreiche Strategien entwickelt, die Unsicherheit zu reduzieren, sorgenschwere Gemüter zu beruhigen und schließlich einen Zustand zu erreichen, in dem ein sorgenfreieres, angenehmeres Leben möglich ist. Eine dieser Strategien ist die Entwicklung von Versicherungen. Jenseits aller mathematischen, technischen, wirtschaftlichen und rechtlichen Besonderheiten unserer neuzeitlichen Entwicklung lässt sich der Begriff der Versicherung aus ihrem ursprünglichen Zweck im weitesten Sinne folglich recht einfach definieren:

Definition 1.A:

Eine Versicherung ist eine Absicherung gegen negative Folgen eines zukünftig möglichen Ereignisses.

Die negativen Folgen des Ereignisses müssen aus Sicht der Person, die sich absichern möchte, eine mögliche Bedrohung ihrer Ziele darstellen. Zudem muss die Versicherung im Fall des Eintritts des unerwünschten Ereignisses einen Mechanismus in Gang setzen, der die Folgen dieses Ereignisses für die versicherte Person »erträglicher« macht; sie muss für diesen Fall folglich eine Leistung versprechen.

Ein wesentlicher Vorteil der obigen Definition 1.A ist ihr umfassender Charakter. Sie erlaubt die Subsumption zahlreicher Arten von Versicherungen, die in verschiedenen historischen Zeiträumen und an unterschiedlichen Orten zu beobachten waren. Beispielsweise lassen sich sowohl die ersten Gefahrengemeinschaften – in denen sich z. B. Stammesmitglieder gegenseitig verpflichteten, einander zu helfen, falls ein Stammesmitglied einen Schaden erlitt – als auch moderne Verträge mit Versicherungsgesellschaften, die im Schadenfall einen finanziellen Ausgleich versprechen, unter dieser Definition zusammenfassen. Für ein erstes Verständnis der Versicherungsprodukte ist die Definition somit hilfreich, jedoch ist sie zur Verwendung in unserem heutigen Kontext nur begrenzt geeignet, da sie auch Finanzprodukte umfasst, die gewöhnlich nicht als klassische Versicherungsprodukte eingeordnet werden.

So gibt es bspw. eine Reihe von Finanzinstrumenten, wie Derivate und Katastrophenanleihen, die ebenfalls eine Absicherung gegen zukünftig mögliche, negative Ereignisse erlauben, die aber zumeist nicht als Versicherungen bezeichnet werden und für die andere rechtliche Vorgaben als für klassische Versicherungsprodukte gelten. Um Versicherungen – im engeren Sinne der klassischen Versicherungsprodukte unserer heutigen Zeit – genauer zu definieren, sind somit weitere Abgrenzungen erforderlich.

Zunächst ist zwischen Versicherungs*nehmern* und Versicherungs*unternehmen* zu unterscheiden. Der **Versicherungsnehmer**[1] **(VN)** erwirbt Versicherungsschutz gegen Zahlung eines vorab festgelegten Geldbetrages (die sog. *Versicherungsprämie*) an das Versicherungsunternehmen. Im Gegenzug verpflichtet sich das **Versicherungsunternehmen (VU)**, bei Eintritt eines für den VN negativen Ereignisses (Schadens), eine

1 Der Versicherungsnehmer kann eine natürliche oder juristische Person sein. Er oder sein Begünstigter erhalten mit Zahlung der Versicherungsprämie das Recht auf die Versicherungsleistung im Schadenfall.

Leistung zu erbringen, welche das Schadenereignis kompensiert. Das Risiko des VN, welches aus der Gefahr des Schadeneintritts resultiert, wurde also (zumindest teilweise) vom VN auf das VU übertragen. Diese Risikoübertragung wird in der Fachsprache auch *Risikotransfer* genannt.

Beispiel 1 (»Always Safe« von »Together Strong«):

Das Versicherungsunternehmen »Together Strong« bietet mit seinem Versicherungsprodukt »Always Safe« Versicherungsschutz gegen das negative Ereignis »FUTSCH« an, bei dem nicht sicher ist, ob es in der Zukunft eintreten wird. Falls es zu diesem Ereignis kommt, ist mit einem Schaden in Höhe von 1.000 EUR zu rechnen.

Personen (VN), denen der mögliche Eintritt des FUTSCH-Ereignisses Sorgen bereitet und welche das daraus resultierende Risiko nicht tragen möchten, können mit dem »Always Safe«-Produkt einen Versicherungsschutz erwerben. Dazu müssen die Versicherungsnehmer pro Jahr eine Versicherungsprämie in Höhe von 50 EUR an das VU »Together Strong« überweisen. Im Gegenzug verspricht das VU eine Leistung in Form einer Zahlung von 1.000 EUR an diejenigen Versicherungsnehmer zu erbringen, bei denen es in dem Jahr, für das die Versicherungsprämie gezahlt wurde, zu einem FUTSCH-Ereignis kommt.

Das »Always Safe«-Produkt wurde in den vergangenen Monaten gerne gekauft. Aktuell haben 1.000 Versicherungsnehmer einen »Always Safe«-Vertrag mit dem VU »Together Strong« abgeschlossen und ihre Versicherungsprämie für das zuvor genannte Produkt bezahlt.

Die Gemeinschaft der Versicherungsnehmer wird als *Versicherungskollektiv* bezeichnet. Die Mitglieder dieses Kollektivs stellen – typischerweise durch Zahlung der Versicherungsprämie – Ressourcen zur Verfügung, welche dazu dienen sollen, eintretende Schäden auszugleichen. Widerfährt somit einem Mitglied dieses Versicherungskollektivs ein Schaden, vor dem die Versicherung schützen soll, so wird ein Teil der zuvor vom Versicherungsunternehmen eingesammelten Geldbeträge verwendet, um das eingetretene, negative Ereignis zu kompensieren. Weil das mit diesem Ereignis verbundene **Risiko**[2] folglich im Kollektiv aufgeteilt und ausgeglichen wird, bezeichnet man diese Vorgehensweise auch als **Risikoausgleich im Kollektiv**.[3]

2 Mit dem Begriff »Risiko« ist in diesem Fall die Gefahr gemeint, gegen die versichert wird. In den Wirtschaftswissenschaften bezeichnet »Risiko« zumeist die Möglichkeit, dass ein Ergebnis ungünstig von einem erwarteten oder erhofften Ergebnis abweicht. Auch das Ausmaß der Variabilität einer relevanten Zielgröße (z. B. des Gewinns) wird oft als »Risiko« bezeichnet.

3 Der Risikoausgleich im Versicherungskollektiv wird in Abschnitt 4 dieses Beitrags ausführlich behandelt, nachdem die notwendigen mathematischen Grundlagen in Abschnitt 3 gelegt wurden.

Beispiel 2 (Risikoausgleich im Kollektiv):

Das Versicherungskollektiv, welches sich aus den 1.000 Versicherungsnehmern zusammensetzt, die das »Always Safe«-Produkt erworben haben, zahlt an das VU »Together Strong« insgesamt 50.000 EUR pro Jahr. Im laufenden Jahr ist es bei 33 Personen in diesem Kollektiv zu dem Schadenereignis FUTSCH gekommen, sodass an jede geschädigte Person 1.000 EUR (und somit insgesamt 33.000 EUR) ausgezahlt wurden.

Betrachtet man das Versicherungskollektiv im Zeitverlauf, so werden in unterschiedlichen Perioden[4] mit unterschiedlicher Häufigkeit Schadenereignisse eintreten, bei denen zudem unterschiedliche Schadenhöhen auftreten können. Es werden Perioden mit überdurchschnittlicher und unterdurchschnittlicher Gesamtschadenhöhe zu beobachten sein, sodass man in diesem Zusammenhang auch von Überschäden und Unterschäden spricht, welche sich im Zeitverlauf ausgleichen sollten. In Perioden mit Unterschäden können Reserven aufgebaut werden, die in Perioden mit Überschäden wieder abgebaut werden. Weil die Kompensation in diesem Fall im Zeitverlauf über verschiedene Perioden hinweg erfolgt, bezeichnet man diese Form des Ausgleichs auch als **Risikoausgleich in der Zeit**.

Beispiel 3 (Risikoausgleich in der Zeit):

Im Versicherungskollektiv des VU »Together Strong« kommt es im Zeitverlauf zu unterschiedlichen Gesamtschadenhöhen, die in Tabelle 1 und Abbildung 1 dargestellt sind. Auf Unterschäden in den Jahren 1 und 2, in denen Reserven aufgebaut werden können, folgen Überschäden in den Jahren 3 und 4, in denen die Reserven aufgezehrt werden. Ein leicht unterdurchschnittlicher Gesamtschaden (Reserveaufbau) ist in Jahr 5 zu beobachten, während im sechsten Jahr ein leicht überdurchschnittlicher Schaden auftritt (Reservenverzehr).[5]

Fasst man die vorherigen Erläuterungen zusammen, so lässt sich eine Versicherung im engeren Sinne der klassischen Versicherungsprodukte unserer heutigen Zeit also wie folgt definieren:

4 Hierbei wird unterstellt, dass Perioden mit gleicher Länge – also z. B. Monate oder Jahre – betrachtet werden.

5 Hinweis: Die Gesamtschadenhöhe ist in diesem Beispiel stets niedriger als die Einnahmen in Höhe von 50.000 EUR (Vgl. Beispiel 2), welche das VU von seinen VN erhält. Neben dem Schadenausgleich müssen aus den Einnahmen jedoch auch Kosten für Vertrieb und Verwaltung gedeckt werden. Außerdem erwarten die Eigentümer einen angemessenen Gewinn für ihren Kapitaleinsatz im VU.

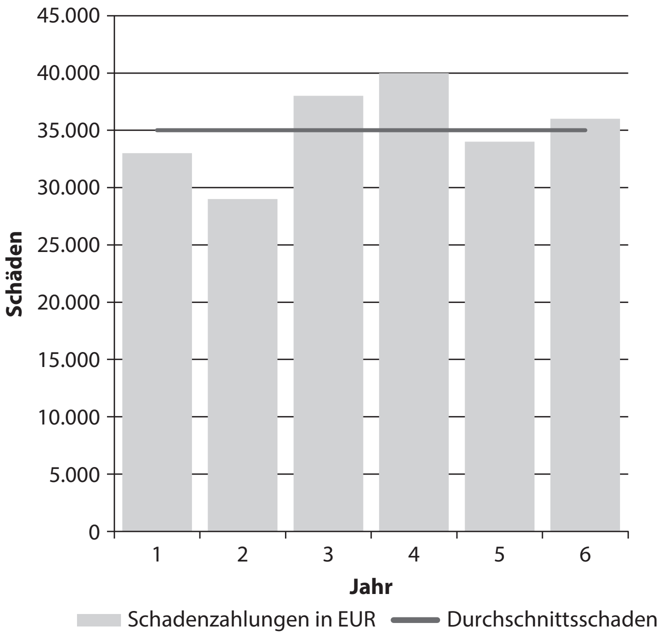

Abb. 1: Schäden im Versicherungskollektiv des VU »Together Strong« im Zeitverlauf

Tab. 1: Schäden im Versicherungskollektiv des VU »Together Strong« im Zeitverlauf

Jahr	1	2	3	4	5	6
Schadenzahlung in EUR	33.000	29.000	38.000	40.000	34.000	36.000

Definition 1.B:

Eine Versicherung ist eine entgeltliche Absicherung gegen negative Folgen eines zukünftig möglichen, im Einzelnen ungewissen Ereignisses auf der Basis des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit.[6]

1.2 Wie funktioniert das Versicherungsgeschäft?

Das Kerngeschäft eines Versicherungsunternehmens (VU), welches auch als **Risikogeschäft** bezeichnet wird, besteht darin, die Risiken der Versicherungsnehmer (VN)

6 Die Definition erfolgt in Anlehnung an Farny, Dieter (2011), S. 8-9.

gegen eine Prämienzahlung zu übernehmen, sodass die VN abgesichert sind. Versicherungsunternehmen fassen die übernommenen Risiken in einer Gefahrengemeinschaft (einem Kollektiv) zusammen und organisieren und verwalten die Teilung und den Ausgleich dieser Risiken. Aufgrund ihrer langjährigen Erfahrung im Umgang mit Risiken bewältigen Versicherungsunternehmen diese Aufgabe i. d. R. besonders effizient. Ein angestrebtes Absicherungsniveau wird daher sowohl auf einzelwirtschaftlicher als auch auf volkswirtschaftlicher Ebene meist kostengünstiger erreicht als bei individueller Vorsorge. Beim Versicherungsnehmer führt diese Absicherung zu finanzieller Sicherheit und in deren Folge zur Möglichkeit einer effizienteren Kapitalverwendung. Geldbeträge, die in einer Situation ohne Versicherung von Individuen vorgehalten werden müssen, um bei Eintritt eines Schadens über die notwendigen Mittel zu verfügen, den Schaden auszugleichen, können nach Abschluss einer Versicherung einer effizienteren Verwendung zugeführt werden. Die Versicherungsprämie ist deutlich niedriger als die mögliche Schadenhöhe.

Beispiel 4 (Effiziente Kapitalverwendung):

Michel hat große Sorge, dass er aufgrund einer Krankheit, einer Verletzung oder eines allgemeinen Kräfteverfalls nicht mehr in der Lage sein könnte, seinen Beruf auszuüben. Deshalb hat er 150.000 EUR angespart, die nun unter seiner Matratze liegen, damit er jederzeit Zugriff darauf hat und er im Fall der Berufsunfähigkeit einige Jahre von seinem Ersparten leben kann. Das Geld bringt ihm auf diese Weise jedoch keine jährlichen Erträge, wie z. B. Zinsen oder Dividenden.

Als Michel von einem Versicherungsvermittler das Angebot erhält, eine Berufsunfähigkeitsversicherung abzuschließen, die ihm eine Absicherung gegen das oben genannte Risiko ermöglicht, nimmt er dieses Angebot gerne an. Nach dem Abschluss dieser Versicherung weiß er, dass er im Fall der Berufsunfähigkeit vom Versicherungsunternehmen eine Rente erhält und somit versorgt ist. Die 150.000 EUR unter seiner Matratze kann er daher nun einer effizienteren Verwendungsform zuführen und bspw. in rentable Aktien und Anleihen investieren.

Die Übertragung der Risiken auf VU führt nicht nur zu der Möglichkeit einer effizienten Kapitalverwendung, sondern auch zu einer effizienten Risikoallokation. Letzteres bedeutet, dass die Risiken an den Ort (in unserem Fall das VU) gebracht werden, an dem sie besonders gut bewältigt werden können. Nicht nur auf der einzelwirtschaftlichen Ebene (im Beispiel 4 bei Michel) sondern auch auf volkswirtschaftlicher Ebene verbessert sich somit die Fähigkeit, Risiken einzugehen. Viele Unternehmen würden ohne die Möglichkeit, Versicherungen abzuschließen, vermutlich nicht existieren, weil ihre Eigentümer in vielen Fällen nicht bereit oder in der Lage wären, die Risiken, die mit ihrer Geschäftstätigkeit verbunden sind, selbst zu tragen. Die Versicherungsbranche ist somit eine wesentliche Grundlage für die Existenz zahlreicher Unternehmen und für eine florierende Volkswirtschaft von zentraler Bedeutung.

Aufgrund des zeitlichen Auseinanderfallens von Prämienzahlung und der Leistung des VU an die VN entsteht die Notwendigkeit, das von den VN erhaltene Geld anzulegen. Das daraus resultierende **Anlagegeschäft**, d. h. die Anlage des Teils der Prämieneinnahmen, der zu einem späteren Zeitpunkt für die Erbringung der zu erwartenden Leistungen an die VN zur Verfügung stehen soll, erfolgt dabei über unterschiedliche Zeiträume, die im Zusammenhang mit dem jeweils betriebenen Risikogeschäft und den daraus resultierenden Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern stehen. Werden bspw. die vom VU an die VN zu erbringenden Leistungen im Rahmen des Risikogeschäfts größtenteils erst in der fernen Zukunft (z. B. in einigen Jahrzehnten) erwartet, so kann auch die Kapitalanlage auf längere Zeiträume ausgerichtet werden.

Im Zusammenhang mit dem Anlagegeschäft wird oft auch das *Spar- und Entspargeschäft* genannt. Das Spargeschäft bezeichnet einen Prozess, bei dem der VN an das VU Zahlungen leistet, welche von letzterem zum Aufbau eines Kapitalstocks verwendet werden. Teil des Anlagegeschäfts im VU ist es dann, diesen Kapitalstock zu verwalten. Im Rahmen des Entspargeschäfts erfolgen zu späteren Zeitpunkten Entnahmen aus dem Kapitalstock, um Leistungen an den VN erbringen zu können.

Beispiel 5 (Private Krankenversicherung):

Die zu erbringenden Leistungen einer Krankenversicherung für einen Versicherten steigen i. d. R. mit dessen Alter. Tritt ein dreißigjähriger VN einer privaten Krankenversicherung bei, so ist seine jährliche Prämienzahlung üblicherweise höher als die jährlichen Leistungen, welche er von der Krankenversicherung erhält, sodass ein Teil seiner Zahlungen vom VU zum Aufbau eines Kapitalstocks verwendet werden kann. Das VU entscheidet, in welchen Anlageformen (z. B. Aktien oder Anleihen) die verfügbaren Gelder investiert werden. Der Kapitalstock wird vom VU verwaltet. Neben den Zahlungen des VN tragen auch Kapitalerträge (wie bspw. Zinsen und Dividenden) aus dem Kapitalstock zu seinem Aufbau bei. Erst wenn der VN ein hohes Alter erreicht hat, werden i. d. R. aufgrund häufiger auftretender gesundheitlicher Probleme die jährlichen Versicherungsleistungen die Prämienzahlungen übersteigen. Bis der VN dieses Alter erreicht hat, wird das VU aus seinen Zahlungen der vergangenen Jahre den Kapitalstock in einem angemessenen Umfang aufgebaut haben. Aus dem Kapitalstock können nun, im hohen Lebensalter des VN, Entnahmen getätigt werden, sodass er die nötigen Leistungen erhalten kann, ohne dass seine Prämienzahlungen an das VU erhöht werden müssen.

Eine ausführliche Behandlung der Kapitalanlagen im VU erfolgt in Kapitel 7 dieses Buches.

Im Rahmen des Versicherungsgeschäfts wird eine Reihe von Dienstleistungen gegenüber den VN aber auch innerhalb des Versicherungsunternehmens erbracht. Beispielsweise müssen Kunden vor (und gelegentlich auch nach) dem Abschluss eines

Versicherungsvertrags in vielfältiger Weise beraten werden. Schadenmeldungen müssen entgegengenommen und Schäden reguliert werden, sodass die Geschädigten letztlich eine Leistung des Versicherers erhalten, welche ihren Schaden kompensiert. Innerhalb des VU müssen Informationen beschafft, verarbeitet und gespeichert werden. Die Gesamtheit dieser zuvor genannten, unterschiedlichen Dienstleistungen bezeichnen wir als **Dienstleistungsgeschäft**.

Risiko-, Anlage- und Dienstleistungsgeschäft sind die wesentlichen Komponenten des Versicherungsgeschäfts. Das Risikogeschäft bildet den Kern des Versicherungsgeschäfts aus dem aufgrund des zeitlichen Auseinanderfallens von Prämienzahlung und Versicherungsleistung zwangsläufig das Anlagegeschäft entsteht. Das Dienstleistungsgeschäft umfasst eine Vielzahl von Tätigkeiten, die in unmittelbarem Zusammenhang mit den beiden zuvor genannten Teilgeschäften stehen.

Sieht man davon ab, dass sowohl Prämien als auch Schäden und Leistungen des VU mehrfach, d. h. zu einer ganzen Reihe von Zeitpunkten anfallen, so lässt sich das aus den drei zuvor beschriebenen Teilgeschäften bestehende Versicherungsgeschäft vereinfacht wie in Abbildung 2 darstellen.

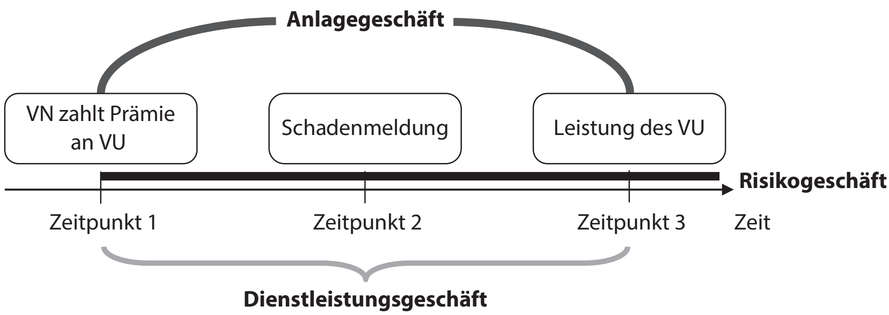

Abb. 2: Die Teilgeschäfte des Versicherungsgeschäfts

1.3 Grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

1.3.1 Zufall und Wahrscheinlichkeit

»Zufall ist ein Wort ohne Sinn; nichts kann ohne Ursachen existieren.«
(Voltaire)

Wie zuvor erläutert, besteht das Hauptziel der Versicherungswirtschaft in der Bewältigung der mit zukünftigen Ereignissen verbundenen Unsicherheit. Letztere resultiert aus dem Unvermögen, exakte Vorhersagen bezüglich zukünftiger Entwicklungen zu erstellen, weil wir nicht in der Lage sind, alle Faktoren, die für ein bestimmtes, zukünftiges Ereignis relevant und ausschlaggebend sind, zu beobachten, zu messen, zu berechnen oder gar zu steuern.

Wenn Menschen mit einer solchen Situation konfrontiert sind, wird oft behauptet, das Eintreten der Ereignisse sei »vom Zufall« abhängig. Es lohnt sich, kurz über diese Behauptung nachzudenken.

Im zuvor beschriebenen Sinne bezeichnet der Begriff **»Zufall«** eine Situation, bei der Menschen – aufgrund ihrer eingeschränkten Informationslage und Informationsverarbeitungskapazität – die Ursachen für ein bestimmtes zukünftiges Ereignis nicht exakt erkennen oder aufgrund der Komplexität des Zusammenwirkens ursächlicher Faktoren den Ausgang eines bestimmten Vorgangs im Vorhinein nicht verlässlich prognostizieren können. In solchen Situationen kann das Ursachensystem weder gedanklich noch rechentechnisch noch auf irgendeine andere Weise ausreichend durchdrungen und verstanden werden, sodass der zum Ergebnis führende Prozess für uns nicht nachvollziehbar ist und somit willkürlich – d. h. zufällig – erscheint. Die Betonung liegt dabei auf dem kleinen Wort »erscheint«, denn die Unsicherheit bezüglich des Ergebnisses eines Vorgangs resultiert meist nicht aus dem Fehlen von Ursachen, sondern aus der eingeschränkten Fähigkeit, alle Ursachen zu erkennen und ihr Zusammenwirken zu verstehen.[7] Oder anders ausgedrückt: Nur weil wir etwas nicht wissen oder erkennen, heißt dies nicht, dass es willkürlich ist.

Jenseits der vorherigen Überlegungen stellt sich für die Versicherungswirtschaft und Wissenschaft die Frage, wie mit solchen Unsicherheitssituationen bzw. Zufallsvorgängen umzugehen ist, denn schließlich möchte man die Unsicherheit gerne beherrschbar und handhabbar machen. Zu letzterem Zweck wurden theoretische Konstrukte sowie mathematische, wahrscheinlichkeitstheoretische Prinzipien und Methoden entwickelt, die – nicht nur in der Versicherungswirtschaft – heute vielfach verwendet werden. Die Wahrscheinlichkeitstheorie als Teilgebiet der Mathematik beschäftigt sich mit der wissenschaftlichen Behandlung und Untersuchung sog. Zufallsereignisse, -variablen und -prozesse. In der wissenschaftlichen Literatur zur Versicherungswirtschaft wird der Leser meist sehr früh mit dem Begriff »Wahrscheinlichkeit« konfrontiert, ohne dass vorab geklärt wurde, was Wahrscheinlichkeiten eigentlich sind. Die Autoren gehen häufig recht zügig dazu über, das Risikogeschäft der VU als eine Übertragung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen vom VN auf das VU zu beschreiben.[8]

Eine **Wahrscheinlichkeit** ist eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, die Auskunft über das Ausmaß der Gewissheit geben soll, mit der ein Ereignis in der Zukunft eintritt. Wird bspw. einem bestimmten Schadenereignis (z. B. dem FUTSCH-Ereignis aus Beispiel 1) eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet, so kann mit dieser Zahl eine Auskunft über den Grad der Sicherheit gegeben werden, mit dem dieser Schaden eintritt. Eine Wahrscheinlichkeit in Höhe von 0,95 (= 95 %) würde bedeuten, dass es ziemlich sicher ist, dass der Schaden eintritt. Eine Wahrscheinlichkeit in Höhe von 0,05 (= 5 %) würde hingegen besagen, dass es ziemlich sicher ist, dass der Schaden nicht eintritt.

---

7 Es sei erwähnt, dass es auch die These gibt, dass Vorgänge auf quantenmechanischer Ebene tatsächlich indeterminiert sind.

8 Siehe z. B. Farny, Dieter (2011), S. 22 oder Nguyen, Tristan/Romeike, Frank (2013), S. 11.

Die Frage ist nun, wie eine solche Zahl bestimmt werden soll, sodass man eine zuverlässige Wahrscheinlichkeitsaussage bezüglich des möglichen Eintritts eines Schadenereignisses erhält. Dafür gibt es im Wesentlichen drei Möglichkeiten: mittels Erfahrungswerten, mithilfe von Modellen und auf Basis subjektiver Schätzung.

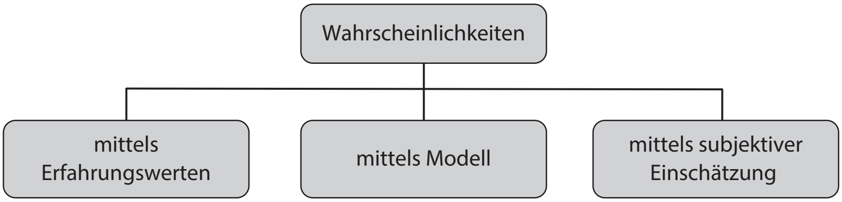

Abb. 3: Wege der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten

Die *Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten für Schadenereignisse mittels Erfahrungswerten* – d. h. mit Schadendaten aus vergangenen Perioden – dürfte den in der Versicherungswirtschaft am häufigsten anzutreffenden und zumeist auch zuverlässigsten Weg darstellen. Dazu bildet man relative Häufigkeiten, indem man für eine vergangene Periode die Anzahl der Schadenfälle ins Verhältnis zu der Anzahl der möglichen Fälle setzt. Ein klassischer Fall wäre bspw. die Ermittlung der Sterbewahrscheinlichkeit in der Lebensversicherung.

Beispiel 6 (Bestimmung der Sterbewahrscheinlichkeit):

Bei einer sog. Risikolebensversicherung ist das relevante, negative Ereignis (der Versicherungsfall) der Tod der versicherten Person. Bei Eintreten des Versicherungsfalls zahlt das VU an die im Versicherungsvertrag begünstigte(n) Person(en) (z. B. die Familienangehörigen) einen bestimmten, festen Geldbetrag.

Um eine Aussage bezüglich der Wahrscheinlichkeit des Todes versicherter Personen zu erhalten, unterstellt die Versicherung, dass Sterbewahrscheinlichkeiten mithilfe des Alters und des Geschlechts einer versicherten Person adäquat geschätzt werden können. Um bspw. die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, dass ein 60-jähriger Mann vor dem Erreichen seines 61. Geburtstages stirbt, wird eine große Gruppe 60-jähriger Männer betrachtet und festgestellt, wie viele von ihnen vor dem Erreichen des 61. Geburtstages sterben. Wenn in einer Gruppe von 10.000 60-jährigen Männern z. B. 80 vor dem Erreichen ihres 61. Geburtstages sterben, so lässt sich aus diesen beiden Angaben eine relative Häufigkeit berechnen:

$$\textit{relative Häufigkeit} = \frac{80}{10.000} = 0{,}008 = 0{,}8\,\%.$$

Wird nun zusätzlich unterstellt, dass sich dieses Verhältnis in der Zukunft nicht ändert, so lässt sich diese relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit interpretieren, die eine Einschätzung zukünftiger Ereignisse erlaubt. Das VU wird somit annehmen, dass auch in zukünftigen Perioden in einer großen Gruppe 60-jähriger Männer im Mittel 0,8 % vor dem Erreichen ihres 61. Geburtstages sterben.

Die ermittelten Wahrscheinlichkeiten können zur Berechnung zukünftig erwarteter Schäden bzw. Leistungen des VU an die VN sowie zur Festlegung der Versicherungsprämie genutzt werden. Es kann jedoch sein, dass die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten mittels Erfahrungswerten aus vergangenen Perioden nicht in allen Fällen möglich ist. Insbesondere wenn Risiken aus dem Einsatz neuer Technologien resultieren, bei denen es noch keine umfangreichen Erfahrungswerte gibt, kann die zuvor beschriebene Methode zur Wahrscheinlichkeitsermittlung nicht angewandt werden. Beispielhaft können an dieser Stelle die Risiken aus dem Einsatz künstlicher Intelligenz, autonomer Fahrzeuge oder der Gentechnik genannt werden. Wenn solche Risiken versichert werden sollen, müssen die Schadeneintrittswahrscheinlichkeiten mithilfe einer anderen Methode bestimmt werden als der zuvor beschriebenen. Wie vorab dargelegt, verbleiben in diesem Fall im Wesentlichen zwei Alternativen: die Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten auf der Basis von Modellen oder subjektiven Einschätzungen.

Die Modelle der Finanz- und Versicherungswissenschaft lassen sich als gedankliche Hilfskonstruktionen auffassen, welche die logische Behandlung der Wirklichkeit auf vereinfachter Grundlage erlauben. Um einen versicherungsrelevanten Sachverhalt zu modellieren, muss letzterer somit zunächst vereinfacht werden, indem man von bestimmten, als wenig bedeutsam erachteten Details absieht. Sodann erfolgt eine mathematische Beschreibung der Sachlage, die eine Ableitung von Wahrscheinlichkeiten aus den zu Grunde liegenden Annahmen des Modells ermöglicht. Beispielsweise können Zahlungsausfälle oder Wetterereignisse mithilfe von Zufallsvariablen und stochastischen Prozessen beschrieben und Wahrscheinlichkeitsaussagen bezüglich des Eintritts eines Schadenereignisses daraus abgeleitet werden. Um zu realitätsnahen Annahmen zu kommen, sind jedoch auch hier Erfahrungswerte und Daten aus vergangenen Perioden hilfreich.

Die dritte Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten für versicherungswirtschaftliche Zwecke zu bestimmen, ist die subjektive Schätzung. Konkret kann es sich dabei um Aussagen von Experten handeln, die versuchen, ihr Wissen über einen relevanten Sachverhalt zur Einschätzung zukünftiger Ereignisse zu nutzen. Die so gewonnenen Wahrscheinlichkeiten sind folglich Vermutungen einer oder mehrerer Person(en) bezüglich der Zukunft, die in Form einer Zahl zwischen 0 und 1 den Grad der Überzeugung angeben, mit dem diese Person(en) von dem Eintritt dieser Ereignisse ausgehen. Dabei ist zu beachten, dass subjektive Einschätzungen aufgrund der persönlichen Umstände, der Informationslage und der kognitiven Fähigkeiten der schätzenden Personen von den tatsächlichen Begebenheiten abweichen können, sodass unrealistische Wahrscheinlichkeitsaussagen getroffen werden.

Beispiel 7 (Subjektive Wahrscheinlichkeit):

Ein Sicherheitsexperte schätzt, dass die Wahrscheinlichkeit eines Terroranschlags in einer bestimmten Großstadt in den nächsten zwölf Monaten bei 0,2 % liegt. Aufgrund fehlerhafter Informationen, die er vor der Schätzung zu dieser Thematik erhielt, wurde die Wahrscheinlichkeit jedoch zu niedrig eingeschätzt.

1.3.2 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Eine Größe, deren Wert »vom Zufall« im zuvor beschriebenen Sinne abhängt, wird gewöhnlich als **Zufallsvariable** bezeichnet. Beispielsweise kann die Schadenhöhe, welche im Zusammenhang mit einem versicherten Ereignis entstehen kann, durch eine Zufallsvariable beschrieben werden.

Beispiel 8 (Hausbrand):

Der Wert eines Hauses, das gegen Feuer versichert wurde, betrage 500.000 EUR. Auf Basis von Vergangenheitswerten, welche die Versicherung über Gebäudebrände gesammelt hat, ermittelt sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: Die Wahrscheinlichkeit für einen Brandschaden in Höhe von

- 125.000 EUR beträgt 1,0 %,
- 250.000 EUR beträgt 2,5 %,
- 375.000 EUR beträgt 1,0 %,
- 500.000 EUR beträgt 0,5 %.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % kommt es zu keinem Brand und die Schadenhöhe beträgt somit 0 EUR.

Die Schadenhöhe in Beispiel 8 ist eine **diskrete Zufallsvariable**, weil sie nur eine endliche Anzahl von Werten (auch Ausprägungen oder Realisierungen genannt) annehmen kann.[9] Zufallsvariablen werden üblicherweise mit Großbuchstaben (meist X, Y oder Z) bezeichnet. Die Funktion f, die jeder Ausprägung x_i der Zufallsvariable X ihre Wahrscheinlichkeit zuordnet, wird **Wahrscheinlichkeitsverteilung** genannt.

9 Auch Zufallsvariablen mit abzählbar unendlich vielen Ausprägungen werden als diskrete Zufallsvariablen bezeichnet.

Beispiel 9 (Wahrscheinlichkeitsverteilung):

In Fortsetzung von Beispiel 8 würde die Wahrscheinlichkeitsverteilung (die Funktion f), die jeder möglichen Schadenhöhe x_i (Ausprägung der Zufallsvariable X) ihre Wahrscheinlichkeit ($W(X = x_i)$) zuordnet, wie folgt aussehen:

$$f(x_i) = W(X = x_i) \quad für\ i = 1{,}2{,}3{,}4{,}5.$$

Tab. 2: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X (Schadenhöhe)

Ausprägung x_i der Schadenhöhe		Wahrscheinlichkeit	
x_1	0	95,0 % = 0,95	$W(X = x_1)$
x_2	125.000	1,0 % = 0,01	$W(X = x_2)$
x_3	250.000	2,5 % = 0,025	$W(X = x_3)$
x_4	375.000	1,0 % = 0,01	$W(X = x_4)$
x_5	500.000	0,5 % = 0,005	$W(X = x_5)$

Der Ausprägung $x_1 = 0$ wird somit die Wahrscheinlichkeit $f(x_1) = W(X= x_1) = 0{,}95$ zugeordnet, der Ausprägung $x_2 = 125.000$ wird die Wahrscheinlichkeit $f(x_2) = W(X= x_2) = 0{,}01$ zugeordnet, usw.

Die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ausprägungen müssen in der Summe 1 (= 100 %) ergeben. In Beispiel 9 ist diese Bedingung erfüllt: $0{,}95 + 0{,}01 + 0{,}025 + 0{,}01 + 0{,}005 = 1$.

Wahrscheinlichkeitsverteilungen können auch grafisch dargestellt werden. Bei diskreten Zufallsvariablen bietet sich dazu bspw. ein Stabdiagramm an. Abbildung 4 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung aus Beispiel 9.

Die Annahme, dass die Schadenhöhe im Fall eines Hausbrandes nur fünf Werte annehmen kann, ist selbstverständlich eine Vereinfachung der Realität. Tatsächlich könnte der Schaden natürlich jeden beliebigen, in Euro oder einer anderen Währung darstellbaren, Wert zwischen null und dem Marktwert des Hauses annehmen.

Im Gegensatz zu diskreten Zufallsvariablen können **stetige Zufallsvariablen** in einem bestimmten Intervall jede beliebige reelle Zahl bzw. Ausprägung annehmen. Typische Beispiele für stetige Zufallsvariablen sind Zeitabstände, Strecken und Gewichte, weil zwischen zwei Ausprägungen dieser Variablen immer eine weitere Ausprägung eingefügt werden kann.

In der Finanz- und Versicherungswirtschaft ist zwangsläufig oft mit Geldbeträgen zu rechnen, die nur endlich viele Ausprägungen annehmen können, welche durch die Stückelung der kleinsten Währungseinheiten begrenzt sind. Beispielsweise können in Euro angegebene Preise oder Schäden nur in Cent-Beträge gestückelt werden, sodass nicht mehr als zwei Nachkommastellen zulässig sind. Sollen Geldbeträge durch

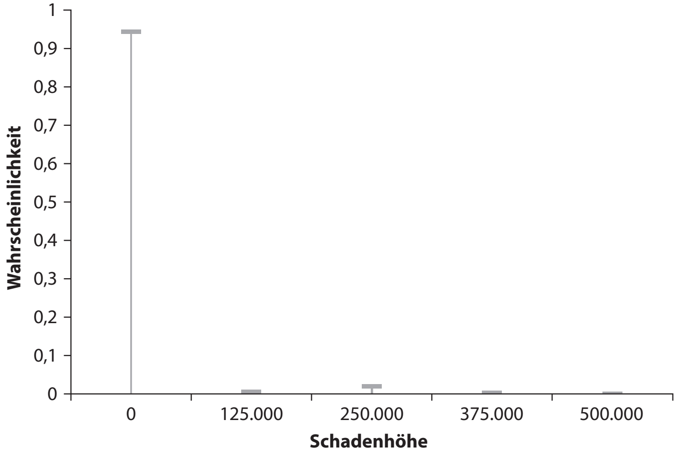

Abb. 4: Wahrscheinlichkeitsverteilung der diskreten Zufallsvariable X (Schadenhöhe) aus Beispiel 9 als Stabdiagramm

Zufallsvariablen beschrieben werden, so müssten sie genau genommen als diskrete Zufallsvariablen dargestellt werden. Weil die Anzahl ihrer möglichen Ausprägungen jedoch sehr hoch ist, werden sie dennoch oft durch stetige Zufallsvariablen beschrieben.

Wahrscheinlichkeiten stetiger Zufallsvariablen werden mittels Dichtefunktionen dargestellt. Abbildung 5 zeigt eine mögliche Dichtefunktion (auch Wahrscheinlichkeitsdichte) der Zufallsvariable Schadenhöhe.

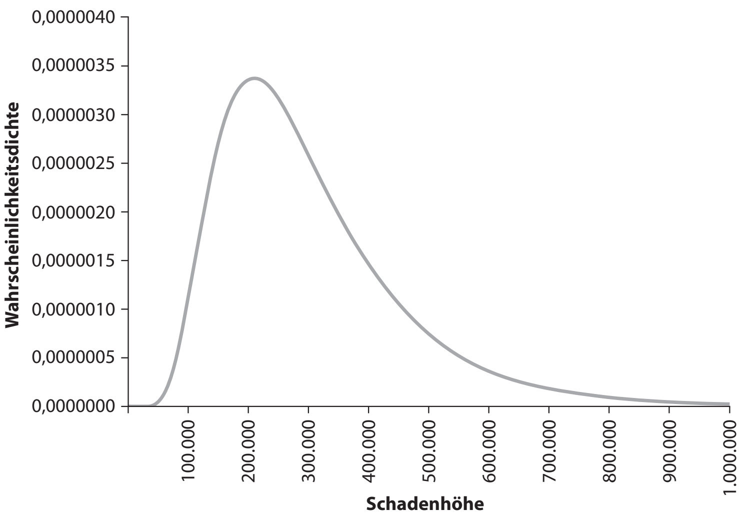

Abb. 5: Wahrscheinlichkeitsverteilung einer stetigen Zufallsvariable (Schadenhöhe)

Bei stetigen Zufallsvariablen ist zu beachten, dass auf der Ordinatenachse (Y-Achse) nicht mehr die Wahrscheinlichkeit abgelesen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsvariable *X* eine Ausprägung in einem bestimmten Bereich (z. B. im Intervall zwischen 100.000 und 200.000 Euro) annimmt, entspricht der Fläche zwischen der Dichtefunktion *f(x)* und der X-Achse innerhalb der Intervallgrenzen. Werden die Intervallgrenzen mit den Kleinbuchstaben a und b bezeichnet, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable *X* eine Ausprägung im Intervall [a, b] annimmt, gegeben durch

$$W(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Abbildung 6 zeigt beispielhaft die Fläche zwischen der Dichtefunktion und der X-Achse in den Grenzen von 100.000 bis 200.000 (Euro).

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ausprägungen muss auch im stetigen Fall wieder eins ergeben, sodass für das Integral über die gesamte Dichtefunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

gilt.

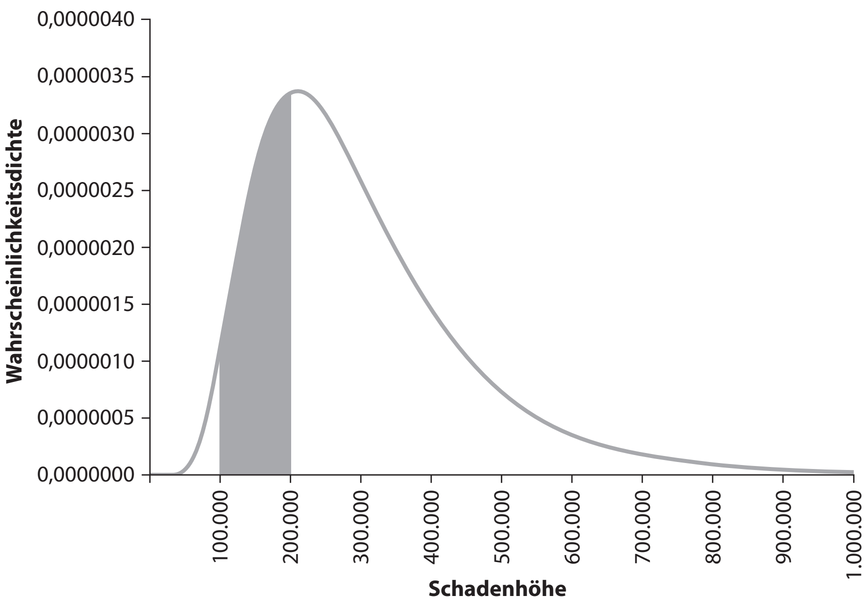

Abb. 6: Ermittlung der Wahrscheinlichkeit einer stetigen Zufallsvariable

1.3.3 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Um Verteilungen von Zufallsvariablen anhand weniger Kennzahlen zu charakterisieren oder zu vergleichen, bedient man sich üblicherweise bestimmter Parameter, wie bspw. des Erwartungswertes oder der Varianz.

Zur Erläuterung dieser Parameter gehen wir zunächst davon aus, dass der Vorgang, der zu einem »zufälligen« Ergebnis führt, beliebig oft wiederholt werden kann. Der **Erwartungswert** $E(X)$ einer Zufallsvariable X gibt dann eine Auskunft darüber, welchen Wert die Realisierungen dieser Variable nach zahlreichen Wiederholungen im Mittel annehmen werden. Um den Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable zu berechnen, werden die möglichen Realisierungen (die Ausprägungen x_i) mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W(X = x_i)$ multipliziert und anschließend summiert. Für diskrete Zufallsvariablen, bei denen $i = 1, 2, ..., n$ Ausprägungen auftreten können, gilt somit:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} W(X = x_i) \cdot x_i.$$

Beispiel 10 (Erwartungswert):

Mit den Wahrscheinlichkeiten und Ausprägungen der Beispiele 8 und 9 lässt sich der folgende Erwartungswert der Schadenhöhe berechnen:

$$\begin{aligned} E(X) &= W(X = x_1) \cdot x_1 + W(X = x_2) \cdot x_2 + \ldots + W(X = x_5) \cdot x_5 \\ &= 0{,}95 \cdot 0 + 0{,}01 \cdot 125.000 + 0{,}025 \cdot 250.000 + 0{,}01 \cdot 375.000 + 0{,}005 \\ &\quad \cdot 500.000 \\ &= 13.750. \end{aligned}$$

Die erwartete Höhe des Schadens beträgt somit 13.750 EUR.

Der Erwartungswert gibt eine Auskunft über die Lage bzw. den Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Abbildung 7 zeigt zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit unterschiedlichen Erwartungswerten, welche durch Pfeile gekennzeichnet sind. Die Verteilung auf der linken Seite hat einen Erwartungswert in Höhe von 500; der Erwartungswert der Verteilung auf der rechten Seite beträgt 1.750.

Neben dem erwarteten Wert ist bei der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X auch die Streuung der Ausprägungen um ihren Erwartungswert von Interesse. Ein Parameter mit dem diese Streuung üblicherweise charakterisiert wird, ist die **Varianz** $\sigma^2(X)$. Sie wird bei diskreten Zufallsvariablen berechnet, indem zunächst die Abweichungen der einzelnen Ausprägungen x_i (mit $i = 1, 2, ..., n$) von ihrem Erwartungswert $E(X)$ quadriert, sodann mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $W(X = x_i)$ multipliziert und schließlich die Einzelergebnisse der vorherigen Rechenschritte summiert werden:

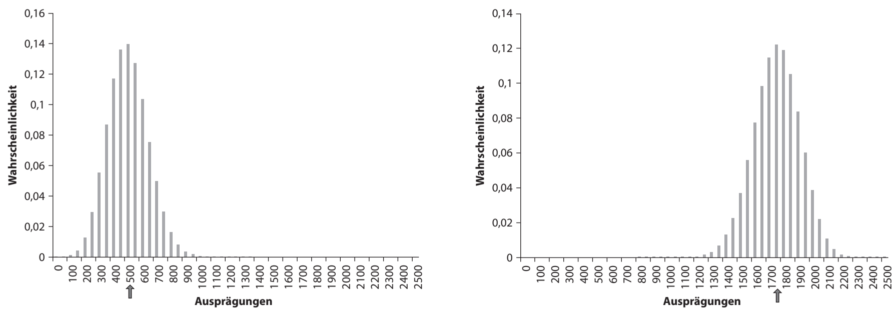

Abb. 7: Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit unterschiedlichen Erwartungswerten

$$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot W(X = x_i).$$

Beispiel 11 (Varianz):

Aufbauend auf den vorherigen Beispielen 8, 9 und 10 lässt sich mit den oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten und Ausprägungen auch die Varianz der Schadenhöhe berechnen:

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= (0 - 13.750)^2 \cdot 0{,}95 + (125.000 - 13.750)^2 \cdot 0{,}01 \\ &\quad + (250.000 - 13.750)^2 \cdot 0{,}025 + (375.000 - 13.750)^2 \cdot 0{,}01 \\ &\quad + (500.000 - 13.750)^2 \cdot 0{,}005 \\ &= 4.185.937.500\end{aligned}$$

Die Varianz der Schadenhöhe beträgt somit 4.185.937.500 EUR^2.

Die Varianz gibt Auskunft darüber, wie dicht die Ausprägungen der Zufallsvariable um ihren Erwartungswert streuen. Weil die quadrierten Abweichungen und Wahrscheinlichkeiten nicht kleiner als null werden können, kann auch die Varianz nicht negativ werden. Aufgrund der Quadrierung weicht die Einheit der Varianz (im Beispiel EUR^2) jedoch von der Einheit der Zufallsvariable (im Beispiel EUR) ab, sodass sich die Varianz nur schwer interpretieren lässt. Daher wird gewöhnlich die **Standardabweichung** $\sigma(X)$ berechnet, welche der Quadratwurzel der Varianz entspricht:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}.$$

Beispiel 12 (Standardabweichung):

Für die in den vorherigen Beispielen betrachteten Ausgangswerte ergibt sich die Standardabweichung aus

$\sigma(X) = \sqrt{4.185.937.500} = 64.698{,}82.$
Die Standardabweichung der Schadenhöhe ist also 64.698,82 EUR.

Die Einheit der Standardabweichung entspricht derjenigen der Zufallsvariable. Liegen die Ausprägungen der Zufallsvariable nahe beim Erwartungswert, so ist die Standardabweichung klein. Streuen sie weit um den Erwartungswert, so ist die Standardabweichung groß. Ebenso wie die Varianz kann auch die Standardabweichung nicht negativ werden. Bei manchen Wahrscheinlichkeitsverteilungen können mithilfe der Standardabweichung direkt Wahrscheinlichkeitsaussagen abgeleitet werden. Beispielsweise liegen bei der Normalverteilung 68 % der Realisierungen im Bereich von zwei Standardabweichungen um den Erwartungswert (d. h. im Bereich von $E(X) - \sigma(X)$ bis $E(X) + \sigma(X)$).

Im finanz- und versicherungswirtschaftlichen Kontext wird die Standardabweichung der Änderungen relevanter Größen auch **Volatilität** genannt und oft als einfaches Risikomaß verwendet, weil sie Informationen über das Ausmaß der Schwankung dieser Größen liefert.

Abbildung 8 zeigt zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit unterschiedlichen Varianzen und Standardabweichungen. Die Verteilung auf der linken Seite hat eine Standardabweichung in Höhe von $\sigma(X) = 104$. Die Standardabweichung der Verteilung auf der rechten Seite ist mit $\sigma(X) = 210$ mehr als doppelt so groß. Beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen haben einen Erwartungswert von ca. 1.050.

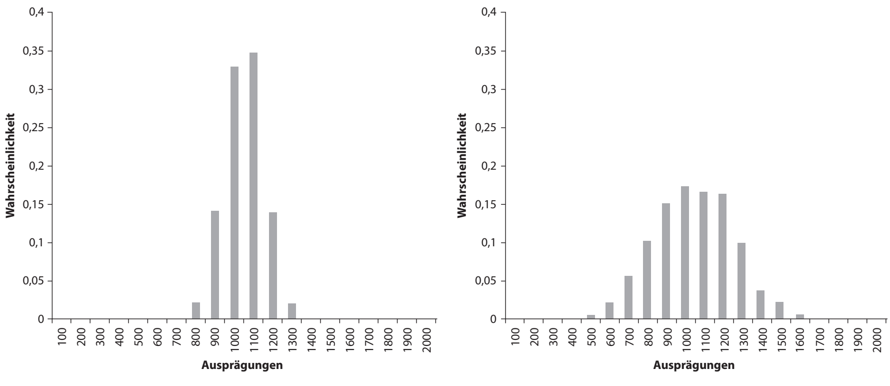

Abb. 8: Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit unterschiedlichen Standardabweichungen

1.3.4 Gesetz der großen Zahlen

In großen Versicherungskollektiven kommt ein zentraler Satz der Wahrscheinlichkeitstheorie zum Tragen, der als **Gesetz der großen Zahlen** bezeichnet wird. Letzteres besagt sinngemäß, dass mit zunehmender Anzahl der Beobachtungen eines

Zufallsvorgangs der Erwartungswert des Zufallsvorgangs immer zuverlässiger durch den Mittelwert der Beobachtungen abgebildet wird. Das Gesetz wird zunächst anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht, um im Anschluss seine Bedeutung im Rahmen der Versicherungswirtschaft darzulegen.

Beispiel 13 (Gesetz der Großen Zahlen):

Ist X eine diskrete Zufallsvariable, welche der geworfenen Augenzahl beim einmaligen Werfen eines sechsflächigen, »fairen« Würfels entspricht, so ist ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die folgende Tabelle gegeben:

Tab. 3: Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable X (Augenzahl beim Werfen eines Würfels)

Ausprägung x_i (Augenzahl)		**Wahrscheinlichkeit**
x_1	1	$f(x_1) = W(X = x_1) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$
x_2	2	$f(x_2) = W(X = x_2) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$
x_3	3	$f(x_3) = W(X = x_3) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$
x_4	4	$f(x_4) = W(X = x_4) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$
x_5	5	$f(x_5) = W(X = x_5) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$
x_6	6	$f(x_6) = W(X = x_6) = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$

Der Erwartungswert *E(X)* der Zufallsvariable *X* ist dann

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3{,}5.$$

Der Würfel wird nun mehrmals hintereinander geworfen und es werden die Anzahl n der Würfe sowie die jeweils geworfenen Augenzahlen festgehalten, sodass der Mittelwert der Augenzahlen berechnet werden kann. Wird der Würfel bspw. $n = 5$ mal hintereinander geworfen, wobei die Augenzahlen 5, 3, 6, 1 und nochmals 1 fallen, so ist der Mittelwert $\frac{(5+3+6+1+1)}{5} = 3{,}2$. Nach 5, 10, 25, 50, 100 und 500 Würfen ergeben sich die in Tabelle 4 angegebenen Mittelwerte.

Der Mittelwert kommt dem Erwartungswert beliebig nah; er konvergiert gegen den Erwartungswert für *n* gegen unendlich. Abbildung 9 veranschaulicht diesen Sachverhalt grafisch.

Tab. 4: Mittelwerte der Augenzahlen nach n-maligem Werfen eines Würfels

Anzahl der Würfe (n)	Mittelwert
5	3,2
10	2,9
25	3,64
50	3,520
100	3,490
500	3,502

Ebenso kann man auch zeigen, dass die relative Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Augenzahl gegen die zugehörige, theoretische Wahrscheinlichkeit[10] konvergiert.

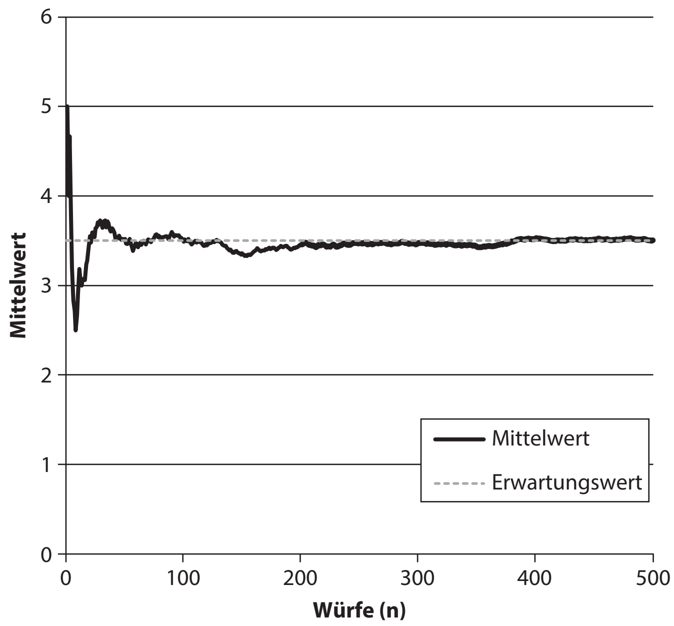

Abb. 9: Mittelwerte der Augenzahlen nach *n*-maligem Werfen eines Würfels

10 In Beispiel 13 beträgt diese Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

1.4 Ausgleich im Versicherungskollektiv

Die Erkenntnisse des Würfelbeispiels lassen sich in ähnlicher Weise auf ein Versicherungskollektiv übertragen. Anstelle der Augenzahl des Würfels betrachten wir im Versicherungskollektiv als Zufallsvariable die Schadenhöhe, welche im Laufe einer Periode bei einer versicherten Person oder Sache[11] auftritt. So wie der Mittelwert der beobachteten Würfe gegen den Erwartungswert der Augenzahl konvergiert, so konvergiert auch der durchschnittliche Schaden im Versicherungskollektiv gegen den erwarteten Schaden, wenn die Anzahl der Risiken im Kollektiv steigt. Mit zunehmender Kollektivgröße können die tatsächlich eintretenden Schäden pro Person (bzw. Risiko) somit immer besser durch die erwarteten Schäden prognostiziert werden, weil die Abweichungen zwischen den tatsächlichen Schäden und den Schadenerwartungswerten tendenziell kleiner werden. Das Risiko, welches für den Einzelnen in einem zumeist höchst ungewissen, zukünftigen Schaden besteht, wird im Kollektiv somit beherrschbar, weil auf der Ebene des Kollektivs – bei ausreichender Kollektivgröße – eine präzise Vorhersage über die zukünftige Schadenhöhe pro Person (bzw. Risiko) getroffen werden kann. Damit schließt sich der Kreis zum ersten Abschnitt dieses Kapitels, in dem die Versicherung als eine Technik zur Überwindung von Unsicherheit eingeführt wurde. Das Gesetz der großen Zahlen ist die zentrale wahrscheinlichkeitstheoretische Erkenntnis, welche letzteres ermöglicht.

Um die Wirkung der Zusammenfassung von Risiken in einem Versicherungskollektiv weiter zu ergründen, betrachten wir beispielhaft ein einfaches Kollektiv, welches zunächst aus lediglich zwei Personen besteht, deren Risiken voneinander unabhängig sind, sodass anhand des Eintretens eines Schadens bei der ersten Person keine genauere Vorhersage über das Eintreten eines Schadens bei der zweiten Person getroffen werden kann.

Beispiel 14 (Zusammenfassung von Risiken im Kollektiv – Teil 1):

Lena und Paul haben sich gegen Unfälle versichert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich innerhalb des nächsten Jahres ein Unfall ereignet, sei bei beiden gleich groß und betrage sowohl bei Lena als auch bei Paul jeweils $p = 10\,\%$. Die beiden kennen sich nicht und haben unterschiedliche Wohnorte, sodass man davon ausgehen kann, dass das Eintreten eines Unfallschadens bei Lena **unabhängig** von dem Eintreten eines Unfallschadens bei Paul ist.

Um das Beispiel einfach zu halten, modellieren wir die Schadenhöhe bei den beiden Versicherungsnehmern (Lena und Paul) als diskrete Zufallsvariable, die lediglich zwei Ausprägungen annehmen kann. Falls es bei einer der beiden Personen zu einem Unfall kommt, betrage die Schadenhöhe 1.000 Euro; wenn es zu

11 Die versicherten Personen oder Sachen werden in der Versicherungsterminologie auch kurz als Risiken bezeichnet.