

Andrés Raya \ Alfonso Ríder
Rafael Rubio

Álgebra y Geometría lineal

EDITORIAL REVERTÉ

Álgebra y Geometría lineal

Andrés Raya
Alfonso Ríder
Rafael Rubio



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Álgebra y Geometría lineal

Copyright © Andrés Raya.
Copyright © Alfonso Ríder.
Copyright © Rafael Rubio.

Edición en papel:

©Editorial Reverté, S. A., 2007
ISBN 978-84-291-5038-4

Edición e-book (PDF):

©Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9292-6

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

Tel: (34) 93 419 33 36

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

Prefacio

Del contenido de este libro

El presente libro está dedicado al estudio de los **Espacios Vectoriales** y temas relacionados con ellos (**matrices, determinantes, sistemas lineales, espacios afines y clasificación de endomorfismos**). Forma parte, con otros en fase de redacción, de un **Curso de Álgebra y Geometría**, que pretendemos *ofrecer* a nuestros alumnos de la Licenciatura en Ciencias Físicas. Sin embargo, ni la materia en sí ni el *enfoque personal* que perseguimos en su redacción son específicos de estos estudiantes. Nuestro curso podría ser válido igualmente para otros alumnos de Ciencias (químicos, biólogos e incluso *futuros matemáticos*), así como para los de cualquier Ingeniería, lo mismo media que superior.

El libro concebido como referencia

Bueno es advertir desde ahora que el libro no pretende ser *completo* en el sentido que los *topólogos y matemáticos en general* damos a este término. Como le ocurre a los números racionales, tiene *huecos y lagunas* por doquier. Más bien está concebido como una especie de *guión* (aunque en realidad es bastante más que eso) donde aparecen todas las definiciones y demostraciones de teoremas que un profesor necesitaría para el desarrollo de la clase real. Los *huecos*, las *lagunas*, se refieren principalmente a lo que llamaríamos *motivaciones, introducciones históricas, razonamientos plausibles, uso de figuras* y mayor abundancia de *ejemplos y ejercicios*.

Claro está que, ante tan grande *ausencia*, debemos justificar nuestra postura: no es que no seamos partidarios de redactar estos *complementos*, sino que nos inclinamos a pensar que su exposición es algo que pertenece al acto lectivo en sí (la clase) y debe llevar la impronta de la persona que lo cuenta (el profesor). Cualquier antiguo alumno nuestro puede atestiguar cómo en clase *usamos* y hasta *abusamos* de este *material complementario*. En otras palabras: nosotros mismos al impartir las clases seríamos los primeros en no seguir *al pie de la letra* el texto que ahora presentamos: éste quedaría como una especie de *referencia* donde lo esencial queda *pulido y fijado*, cosa que por otra parte no siempre se consigue en los sesenta minutos de clase *presencial*.

Los vectores libres

El origen del concepto de espacio vectorial está en los llamados **vectores libres**. En realidad, *copia* de ellos las operaciones de adición de vectores y la multiplicación de números por vectores y se *obliga* a que estas operaciones tengan las mismas propiedades fundamentales que tienen las operaciones con vectores.

Una vez hecho esto, la teoría de espacios vectoriales se convierte en un capítulo más del Álgebra, entendida ésta como el estudio de conjuntos dotados de operaciones que a su vez están sujetas a cumplir determinadas propiedades. Sin embargo, como iremos viendo a lo largo de este libro, los espacios vectoriales toman una y otra vez como prestado el indudablemente *lenguaje geométrico* propio de los vectores libres. De esta forma conseguimos *geometriz*ar, con toda la carga positiva que ello arrastra, este capítulo sobre la muchas veces llamada *Álgebra Abstracta*, con cierto matiz peyorativo para el adjetivo, procedente tal vez de la *aridez y frialdad* que muchos dicen ver en las operaciones y en los desarrollos formales.

Para poder dar este *barniz geométrico* a nuestra teoría es conveniente hacer un amplio repaso de vectores libres. Nosotros lo planteamos en el primer capítulo del libro, y bueno será adelantar un detalle sobre el que nos extenderemos al comienzo del mismo, que así dicho, no deja de ser una *verdad de Perogrullo*: el estudio de los vectores libres requiere conocimientos previos y sólidos de Geometría.

Fundamentación de la Geometría

Hemos escrito *conocimientos sólidos*; o sea, debidamente fundamentados. La Geometría sin duda está dotada de unos cimientos casi perfectos desde que el matemático griego Euclides redactara sus Elementos hacia el año 300 antes de Jesucristo. Además, sus imperfecciones fueron limadas por el alemán Hilbert al comienzo del siglo XX. Colocada, por otra parte, como *ámbito real* en el que se ha desarrollado durante siglos la Física (especialmente la Mecánica y no digamos la Óptica), su aprendizaje ha sido ineludible para toda persona *culta* de nuestra civilización occidental.

La Geometría, a la manera de Euclides, ha formado parte de cualquier programa educativo (en sus etapas primaria y secundaria sobre todo) para generaciones enteras hasta muy avanzado el siglo XX, y, además, con carácter casi exclusivo respecto de otros posibles *enfoques y ampliaciones* de la propia Geometría.

Y al hablar de otros enfoques y ampliaciones podemos pensar, por ejemplo, en la llamada Geometría Analítica, creada en la primera mitad del siglo XVII por los franceses Fermat y Descartes, la cual, mediante el uso de coordenadas, permitió el estudio de cuestiones geométricas con técnicas numéricas y Algebraicas. O en la Geometría Proyectiva de Desargues, o la Geometría Diferencial de Monge. Todas ellas contribuyeron al nacimiento de la Geometría Vectorial, en pleno siglo XIX, siendo sus principales promotores Grassmann, Cayley y Hamilton, pero todas ellas, a su vez, seguían fundamentándose en la Geometría de Euclides.

Sólo en épocas más cercanas ha sido posible un *cambio radical* en la manera de fundamentar la Geometría, consistente en tomar los espacios vectoriales como punto de partida. Este cambio precisaba una *clarificación*, o mejor, una *formalización* de los números reales, labor que se culminó en la segunda mitad del XIX y a la que contribuyeron entre otros Weierstrass, Dedekind y Cantor. Y lo precisaba porque los espacios vectoriales descansan a su vez en los *escalares* o *números*, elementos en definitiva de lo que en Álgebra se llaman *cuerpos conmutativos*, y de los que números reales y números complejos son sus dos ejemplos más importantes.

Es decir, *modernamente*, se procede al revés: los *elementos primitivos*, por decirlo de alguna manera, son los **vectores** entendidos como miembros de un espacio vectorial, y con ellos vamos construyendo todo un edificio que, si bien es puramente algebraico, como ya hemos tenido ocasión de señalar, lo vamos *geometrizando* paulatinamente siempre con la guía, como también hemos señalado, de lo que pasaba con los vectores libres. Al hablar de espacios vectoriales irán apareciendo, en efecto, los subespacios que generalizan a las rectas y planos clásicos, el concepto de aplicación lineal (inspirado y generalizador de las transformaciones geométricas), el concepto de dimensión, etc. En etapas posteriores hablaremos de los espacios afines, ligados a un espacio vectorial, en los que *reaparece* el concepto de **punto** y en los que se incluyen todas las cuestiones de **paralelismo** e **incidencia**. Y también lo haremos (no en este volumen sino en otro que titularemos *Álgebra y Geometría Cuadrática*) de los espacios vectoriales euclídeos, éstos siempre con los números reales como cuerpo de base, en los que el *instrumento básico* será el **producto escalar**, generalización abstracta del conocido en vectores libres, dando así entrada a conceptos como **perpendicularidad**, **longitudes**, **ángulos**, etc; y llegarán por fin los espacios afines euclídeos en los que confluyen todos los conceptos de la Geometría tradicional.

Dentro de todas estas elaboraciones jugarán un papel destacado los *espacios analíticos* o *cartesianos*, entendidos como conjuntos de parejas ordenadas, ternas ordenadas, etc., de elementos de un cuerpo. Cuando éste sea el \mathbb{R} de los números reales, llegamos a que el plano euclídeo tradicional se sustituye sin más por el espacio afín euclídeo de las parejas, mientras que el espacio lo hace por el de las ternas.

Polivalencia del Álgebra Vectorial

El alumno suele dudar de la necesidad de *tanto edificio* para llegar finalmente a algo que históricamente ya era conocido. Tenemos que decirles que están cargados de razón: si se trata únicamente de obtener una nueva fundamentación de la Geometría, el Álgebra Vectorial es un lujo. Pero es que hay más . . .

También les diremos que, conforme avancen en sus estudios, eleven su nivel y vayan abandonando las formulaciones puramente elementales, irán comprobando por sí mismos cómo la Teoría de Espacios Vectoriales, además de servir para *otra* fundamentación de la Geometría de Euclides, es una herramienta *cuasi* imprescindible del Análisis y la Física Clásica, y desde luego *totalmente* imprescindible en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales, el Análisis Funcional o la Mecánica Cuántica. Sin

el Álgebra de los espacios vectoriales queda *coja* la moderna Geometría Diferencial, incluidas las *coordenadas generalizadas* de la Mecánica Analítica. Sin ella se carece de *lenguaje* para las geometrías no euclídeas dotadas de *métricas generalizadas*. Por ejemplo, la *Geometría* asociada a las *transformaciones* de Lorentz, que no es otra que la del famoso *espacio-tiempo* de Einstein, o, si se quiere, el *espacio tetradimensional* de Minkowski.

Dimensiones arbitrarias

La inercia mental tiende a asociar el concepto de **dimensión** con *magnitudes* que se dicen extraídas del mundo real: *unidimensionales* son los objetos que sólo tienen *largo*, *bidimensionales* los que poseen *largo* y *ancho*, *tridimensionales* los dotados de *largo*, *ancho* y *alto*. Y no hay más, dicen algunos. Los físicos *relativistas* se encargaron de romper este aserto: otra magnitud, el *tiempo*, puede jugar y juega el papel de *cuarta dimensión* en el citado espacio de Minkowski.

Pero he aquí que los matemáticos hablan de *espacios n -dimensionales*, siendo n un entero positivo arbitrario. ¿Dónde *están* las dimensiones superiores a cuatro? Respondemos con otra pregunta, desconcertante tal vez para el estudiante que se inicia: ¿quién ha dicho que estén en alguna parte?

Insistiremos una vez más en nuestras ideas: el concepto de dimensión será algebraico y por tanto no cabe esperar que *el olmo nos ofrezca peras*. Pero al estar inspirado en los casos geométricos elementales, lo *barnizamos*, como hemos dicho en párrafos anteriores, hasta conseguir que el fruto del olmo se *geometrice* y nos dé la apariencia de *pera*.

En definitiva, todo proceso para cuya descripción o determinación se precisen n datos independientes será n -dimensional. Por ejemplo, cualquier función de n variables de las que se estudian en Análisis o cualquier sistema dinámico que dependa de n coordenadas generalizadas. Si se quiere, désele a cada dimensión la interpretación concreta de esa variable o de esa coordenada.

Y puestos a generalizar, ¿por qué no infinitas dimensiones? Por ejemplo, los desarrollos en serie de Fourier, fundamentales en todas las cuestiones *ondulatorias* de la Física, dependen de sus infinitos sumandos y el ámbito en que hoy se estudian son los espacios (infinito-dimensionales) de Hilbert. Los mismos espacios que se hicieron imprescindibles en la formulación matemática de la Mecánica Cuántica una vez que Heisenberg enunciara su *Principio de Incertidumbre* en 1927.

Índice general

Índice general	9
1. Vectores libres	21
1.1. Nota	21
1.2. El plano geométrico	21
1.3. Semirrectas o rayos	22
1.4. Segmentos	22
1.5. Vectores fijos	22
1.6. Longitudes y distancias	23
1.7. Módulo de un vector	23
1.8. Paralelismo de rectas. El concepto de dirección	24
1.9. Dirección de un vector	24
1.10. Semiplanos	25
1.11. Sentido de un vector	25
1.12. Multiplicación de números por vectores fijos	26
1.13. El Teorema de Thales	27
1.14. Puntos medios	27
1.15. Simetrías centrales	28
1.16. Equipolencia de vectores fijos	29
1.17. Paralelogramos	31
1.18. El concepto de vector libre	31
1.19. Adición de vectores libres	33
1.20. Multiplicación de números por vectores libres	35
1.21. Dependencia lineal	38
1.22. Bidimensionalidad del plano	41
1.23. Coordenadas	41
1.24. La recta geométrica	42
1.25. El espacio geométrico	42
2. Espacios vectoriales	45
2.1. El concepto de espacio vectorial	45
2.2. Primeras propiedades de los espacios vectoriales	46
2.3. Los vectores libres	48

2.4.	Los cuerpos como espacios vectoriales sobre sí mismos	48
2.5.	Espacios cartesianos	48
2.6.	Espacios de sucesiones	49
2.7.	Espacios de polinomios	50
2.8.	Espacios de funciones	51
2.9.	Álgebras asociativas	51
2.10.	Espacios vectoriales sobre cuerpos no conmutativos	51
2.11.	Módulos	52
2.12.	Complementos y ejercicios	52
3.	Subespacios vectoriales	55
3.1.	Definición de subespacio vectorial	55
3.2.	Caracterizaciones	55
3.3.	Combinaciones lineales	57
3.4.	Intersección de subespacios vectoriales	57
3.5.	Subespacio generado por un conjunto de vectores	58
3.6.	Suma de subespacios	59
3.7.	Subespacios de vectores libres	60
3.8.	El espacio l^∞ de las sucesiones acotadas	60
3.9.	El espacio c de las sucesiones convergentes	61
3.10.	El espacio c_0 de las sucesiones infinitésimas	62
3.11.	El espacio $\mathbb{K}_n[\xi]$ de polinomios de grado a lo sumo n	62
3.12.	Subálgebras asociativas	63
3.13.	El álgebra de las funciones convergentes en un punto	63
3.14.	Álgebras de funciones continuas	64
3.15.	Álgebras de funciones derivables	64
3.16.	Álgebras de funciones integrables	65
3.17.	Complementos y ejercicios	66
4.	Sistemas generadores	69
4.1.	Sistemas generadores de un espacio	69
4.2.	Reducción de sistemas generadores	69
4.3.	Espacios vectoriales de generación finita e infinita	70
4.4.	Concepto de dependencia e independencia lineal	71
4.5.	Propiedades elementales de la dependencia	71
4.6.	Conjuntos ligados y conjuntos libres	73
4.7.	Ampliación de conjuntos libres	73
4.8.	Concepto de base	74
4.9.	Complementos y ejercicios	74
5.	Espacios de generación finita	77
5.1.	Teorema fundamental de los espacios de generación finita	77
5.2.	Obtención de bases a partir de un sistema generador	79
5.3.	Equicardinalidad de bases para generación finita	79
5.4.	Concepto de dimensión de un espacio	80

5.5. La dimensión como cardinal mínimo de un sistema generador	80
5.6. Caracterización de la finito-dimensionalidad	81
5.7. Obtención de bases a partir de un conjunto libre	81
5.8. La dimensión como cardinal máximo de un conjunto libre	82
5.9. Rango de varios vectores	82
5.10. Coordenadas de un vector en una base	83
5.11. Las deltas de Kronecker	84
5.12. Espacios de vectores libres	85
5.13. Espacios analíticos	85
5.14. El espacio f de las sucesiones casi nulas	86
5.15. Espacios de polinomios	87
5.16. Complementos y ejercicios	88
6. Aplicaciones lineales	91
6.1. Definición de aplicación lineal	91
6.2. Propiedades	92
6.3. Imagen y núcleo de una aplicación lineal	93
6.4. Linealidad y generación	94
6.5. Linealidad y dependencia	95
6.6. Linealidad y bases	96
6.7. Composición e inversión de aplicaciones lineales	96
6.8. Isomorfía de espacios vectoriales. Espacios abstractos	97
6.9. El isomorfismo de Descartes	98
6.10. Isomorfía y dimensión	99
6.11. Igualación de los espacios f y $\mathbb{R}[\xi]$	100
6.12. Isomorfía y rango	100
6.13. El grupo lineal de un espacio vectorial	100
6.14. Espacios de aplicaciones lineales	101
6.15. Otras propiedades de la composición	103
6.16. El álgebra de los endomorfismos de un espacio	104
6.17. Homotecias vectoriales	104
6.18. Subespacios invariantes por un endomorfismo	106
6.19. Vectores dobles	108
6.20. Linealidad en el Análisis	108
6.21. Morfismos de álgebras asociativas	109
6.22. Complementos y ejercicios	110
7. Suma directa	113
7.1. Suma directa de subespacios	113
7.2. Descomposición de un espacio en suma directa de subespacios	114
7.3. Sumas directas en vectores libres	114
7.4. Producto directo de dos espacios vectoriales	115
7.5. Relación entre los productos directos y las sumas directas	116
7.6. Proyecciones asociadas a una descomposición en suma directa	117
7.7. Endomorfismos proyectores	120

7.8. Simetrías oblicuas	120
7.9. Complementos y ejercicios	122
8. Dimensión y codimensión de subespacios	125
8.1. Subespacios de un espacio de dimensión finita	125
8.2. Infinito-dimensionalidad de los espacios de funciones	126
8.3. El lema de ampliación de bases	126
8.4. Existencia de complementarios	126
8.5. Dimensión de la suma e intersección	127
8.6. Dimensión de un espacio producto	129
8.7. Subespacios de dimensión finita. Rectas y planos	130
8.8. Ecuaciones paramétricas de un subespacio	130
8.9. Codimensión de un subespacio	132
8.10. Subespacios de codimensión finita. Hiperplanos	132
8.11. Complementos y ejercicios	133
9. Espacios cociente	137
9.1. Congruencias en un espacio, módulo un subespacio	137
9.2. Espacio cociente	138
9.3. Epimorfismo canónico sobre un subespacio	138
9.4. Primer Teorema de Isomorfía	139
9.5. Inyección canónica de un subespacio	140
9.6. Descomposición canónica de una aplicación lineal	140
9.7. Isomorfía del espacio cociente con los complementarios	140
9.8. Complementos y ejercicios	141
10. Subespacios y aplicaciones afines	143
10.1. Comentarios a un capítulo de Geometría	143
10.2. Subespacios afines de un espacio vectorial	144
10.3. Caracterización de los subespacios afines	144
10.4. Dimensión de un subespacio afín	145
10.5. Contenido entre subespacios afines	145
10.6. Combinaciones afines	146
10.7. Dependencia e independencia afín	148
10.8. Ecuaciones paramétricas de subespacios afines	150
10.9. Imagen inversa de un vector en una aplicación lineal	151
10.10. Traslaciones en un espacio vectorial	152
10.11. Aplicaciones afines	153
10.12. Morfismos y combinaciones afines	156
10.13. El grupo afín	158
10.14. Complementos y ejercicios	159

11. Matrices y sus operaciones	161
11.1. Definiciones	161
11.2. Igualdad de matrices	162
11.3. Tipos particulares de matrices	162
11.4. Espacios vectoriales de matrices	164
11.5. Dimensión del espacio de matrices	165
11.6. Multiplicación de matrices	166
11.7. Propiedades de la multiplicación de matrices	167
11.8. El álgebra de las matrices cuadradas	168
11.9. El grupo lineal de grado n	169
11.10. Traza de una matriz cuadrada	169
11.11. Trasposición de matrices	170
11.12. Matrices simétricas y antisimétricas	172
11.13. Parte simétrica y parte antisimétrica de una matriz cuadrada	173
11.14. Matrices hermíticas y antihermíticas	174
11.15. Complementos y ejercicios	175
12. Rango de una matriz	179
12.1. Rango de una matriz	179
12.2. Matrices cuadradas regulares	181
12.3. Caracterización del rango mediante submatrices principales	182
12.4. Método del orlado para el cálculo del rango	183
12.5. Complementos y ejercicios	185
13. Determinantes	189
13.1. Aplicaciones multilineales	189
13.2. Aplicaciones multilineales alternadas	190
13.3. Formas multilineales y multilineales alternadas	191
13.4. Formas n -lineales alternadas de un espacio n -dimensional	192
13.5. La función determinante del espacio K^n	195
13.6. Determinante de una matriz cuadrada	196
13.7. Determinantes y trasposición	198
13.8. Determinante de un producto	199
13.9. Determinantes y regularidad	199
13.10. El grupo lineal especial de grado n	200
13.11. Adjuntos y menores complementarios	200
13.12. Cálculo de determinantes	203
13.13. Triangularización de determinantes	204
13.14. Matriz adjunta de una matriz cuadrada	205
13.15. Cálculo de la matriz inversa	207
13.16. Determinantes y rango de una matriz	207
13.17. Complementos y ejercicios	207

14. Aplicaciones lineales en dimensión finita	213
14.1. Aplicaciones lineales de rango finito	213
14.2. Endomorfismos de un espacio finito-dimensional	214
14.3. Automorfismos de un espacio finito-dimensional	215
14.4. Igualdad de dos morfismos que empiezan en dimensión finita	215
14.5. Matriz de un morfismo lineal entre espacios finito-dimensionales	216
14.6. Ecuaciones de una aplicación lineal	217
14.7. Matriz de un endomorfismo	217
14.8. Matriz de una homotecia	218
14.9. Matriz de una forma lineal	218
14.10. Determinación de aplicaciones lineales mediante matrices	218
14.11. El isomorfismo lineal $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') : \mathcal{AL}(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}(m, n, \mathbb{K})$	219
14.12. Dimensión del espacio de aplicaciones lineales	220
14.13. Matriz de una compuesta	221
14.14. Matriz de la inversa de un isomorfismo lineal	222
14.15. El isomorfismo de álgebras unitarias $M^t(\mathcal{B}) : \mathcal{E}nd(\mathbf{V}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$	222
14.16. El isomorfismo de grupos $M^t(\mathcal{B}) : \mathcal{GL}(\mathbf{V}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{GL}(n, \mathbb{K})$	223
14.17. Dimensión y una base de la imagen	224
14.18. Coordenadas de un vector imagen	224
14.19. Dimensión y una base del núcleo	225
14.20. Imagen inversa	226
14.21. Complementos y ejercicios	227
15. Sistemas lineales	233
15.1. Ecuaciones lineales	233
15.2. Sistemas lineales	233
15.3. Interpretación geométrica de un sistema lineal	235
15.4. La condición de Rouché Frobenius	235
15.5. Sistemas y regla de Cramer	236
15.6. Estudio y resolución de los sistemas homogéneos	237
15.7. Estudio de la resolución de los sistemas completos	238
15.8. Complementos y ejercicios	240
16. Dualidad	243
16.1. Espacio dual de uno dado. Bases duales	243
16.2. El espacio bidual	245
16.3. Hiperplanos y formas lineales	246
16.4. Ecuación implícita de un hiperplano	248
16.5. Proyecciones sobre hiperplanos y rectas. Ecuaciones	249
16.6. Simetrías especulares axiales. Ecuaciones	249
16.7. Ecuaciones implícitas de un subespacio	250
16.8. Paso de las ecuaciones implícitas a las paramétricas	251
16.9. Complementos y ejercicios	254

17. Trasposición de aplicaciones lineales	263
17.1. Trasposición de una aplicación lineal	263
17.2. Traspuesta de una traspuesta	265
17.3. Trasposición entre espacios finito-dimensionales	265
17.4. Matriz y rango de la aplicación lineal traspuesta	266
17.5. Complementos y ejercicios	268
18. Cambios de bases	271
18.1. Matriz de un cambio de base	271
18.2. Cambios de bases y matrices regulares	271
18.3. Cambios de bases y automorfismos lineales	272
18.4. Composición de dos cambios	272
18.5. Cambio idéntico y cambio recíproco	273
18.6. Orientación de bases en espacios vectoriales reales	273
18.7. Cambio entre bases duales	274
18.8. Cambio de coordenadas	275
18.9. Complementos y ejercicios	276
19. Equivalencia y semejanza de matrices	281
19.1. Matriz de una aplicación lineal al cambiar de bases	281
19.2. Matrices equivalentes	282
19.3. Interpretación geométrica de la equivalencia de matrices	283
19.4. Equivalencia y rango. Matriz canónica de una clase	284
19.5. Matriz de un endomorfismo lineal al cambiar de base	285
19.6. Semejanza de matrices cuadradas	286
19.7. Interpretación geométrica de la semejanza de matrices	287
19.8. Traza y determinante de un endomorfismo	287
19.9. El grupo lineal especial de un espacio finito-dimensional	288
19.10. Paridad o imparidad de un automorfismo de un espacio real	289
19.11. Complementos y ejercicios	289
20. Clasificación de endomorfismos lineales. Preliminares	295
20.1. Semejanza de matrices y endomorfismos lineales	295
20.2. El problema de la diagonalización	295
20.3. El problema de la triangularización	296
20.4. Las formas canónicas de Jordan	297
21. Autovalores y autovectores de un endomorfismo lineal	299
21.1. Autovalores y autovectores	299
21.2. Subespacios invariantes por un endomorfismo	299
21.3. Autoespacio asociado a un autovalor	300
21.4. Caso finito-dimensional. Polinomio característico	301
21.5. Restricción de un endomorfismo a un subespacio invariante	303
21.6. Una cota para la dimensión del autoespacio de un autovalor	306
21.7. Suma directa de subespacios invariantes	307

21.8. Autovectores asociados a autovalores distintos	307
21.9. Complementos y ejercicios	309
22. Triangularización y diagonalización de endomorfismos	315
22.1. Endomorfismos triangularizables y diagonalizables	315
22.2. Una condición necesaria	315
22.3. Caracterización de la triangularización	316
22.4. Diagonalización en el caso de espectro simple	318
22.5. Caracterización de la diagonalización	318
22.6. Complementos y ejercicios	320
23. Polinomio mínimo de un endomorfismo	325
23.1. Potencias naturales de un endomorfismo	325
23.2. Polinomios en un endomorfismo	326
23.3. El álgebra $\mathbb{K}[f]$	326
23.4. Caso finito-dimensional. Polinomio mínimo de un endomorfismo . .	327
23.5. Teorema de Hamilton-Cayley	328
23.6. Raíces del polinomio mínimo	329
23.7. Polinomio mínimo en un subespacio invariante	330
23.8. Polinomio mínimo y suma directa	331
23.9. Espacios indescomponibles	331
23.10. Complementos y ejercicios	332
24. Descomposición primaria	335
24.1. Núcleo de un polinomio respecto de un endomorfismo	335
24.2. Existencia de subespacios f -invariantes propios	337
24.3. Descomposición primaria	339
24.4. Descomposición primaria para un endomorfismo triangularizable . .	341
24.5. Cálculo del polinomio mínimo de un endomorfismo triangularizable .	342
24.6. Caracterización de la diagonalización mediante el polinomio mínimo	343
24.7. Complementos y ejercicios	344
25. Introducción a las formas de Jordan	347
25.1. El problema	348
25.2. Matrices de Jordan en dimensión 2	349
25.3. Matrices de Jordan en dimensión 3	351
25.4. Matrices de Jordan en dimensión 4	356
25.5. Comentarios finales	369
25.6. Complementos y ejercicios	372
26. Endomorfismos nilpotentes	377
26.1. Endomorfismos nilpotentes	377
26.2. Polinomio característico y mínimo de un endomorfismo nilpotente .	377
26.3. Restricción a un subespacio invariante	378
26.4. Subespacios anuladores	378
26.5. Descomposición por complementación de un endomorfismo nilpotente	379

26.6. Base asociada a la descomposición por complementación	381
26.7. Espacios cíclicos respecto de un endomorfismo	383
26.8. Espacios cíclicos respecto de un endomorfismo nilpotente	383
26.9. Matriz de un endomorfismo nilpotente de un espacio cíclico	384
26.10. Subespacios cíclicos respecto de un endomorfismo nilpotente	385
26.11. Descomposición canónica de un endomorfismo nilpotente	385
26.12. Complementos y ejercicios	388
27. El Teorema de Jordan	391
27.1. Endomorfismos triangularizables con un solo autovalor	391
27.2. Teorema de Jordan para endomorfismos triangularizables	393
27.3. Complementos y ejercicios	394
28. Espacios vectoriales complejos	399
28.1. Motivación	399
28.2. Conjugación en el cuerpo de los números complejos	400
28.3. Aplicaciones semilineales	401
28.4. Conjugación de vectores complejos	402
28.5. Conjugación de matrices complejas	404
28.6. Conjugación de endomorfismos lineales complejos	405
28.7. Dimensión real de un espacio vectorial complejo	405
28.8. Complexificación de un espacio vectorial real	407
28.9. Complementos y ejercicios	409
29. Endomorfismos de espacios reales	411
29.1. Raíces imaginarias de un polinomio de coeficientes reales	411
29.2. Extensión de los endomorfismos reales al campo complejo	413
29.3. Autovectores de un autovalor imaginario	415
29.4. Autoespacio real de una pareja de autovalores complejos conjugados	416
29.5. Matriz canónica reducida real	418
29.6. Endomorfismos reales en dimensión 2 con autovalores imaginarios . .	422
29.7. Endomorfismos reales en dimensión 3 con autovalores imaginarios . .	422
29.8. Endomorfismos reales en dimensión 4 con autovalores imaginarios . .	423
29.9. Complementos y ejercicios	425
30. Espacios afines	429
30.1. El concepto de espacio afín. Dimensión	429
30.2. Los espacios vectoriales como espacios afines	429
30.3. Primeras propiedades de los espacios afines	430
30.4. Vector de posición de un punto	430
30.5. Subespacios afines	431
30.6. Caracterización de los subespacios afines	432
30.7. Subespacios afines de un espacio vectorial	433
30.8. Determinación de subespacios afines	433
30.9. Contenido entre subespacios afines	434

30.10. Incidencia de subespacios afines	434
30.11. Subespacios afines complementarios	435
30.12. Paralelismo de subespacios afines	436
30.13. Proyecciones paralelas	437
30.14. Combinaciones afines	437
30.15. Dependencia e independencia afín	440
30.16. Puntos medios y baricentros	443
30.17. Complementos y ejercicios	443
31. Coordenadas en espacios afines	447
31.1. Sistemas de referencia. Coordenadas	447
31.2. Ecuaciones paramétricas de un subespacio afín	448
31.3. Ecuaciones implícitas de un subespacio afín	450
31.4. Incidencia en dimensión finita	451
31.5. Paralelismo en dimensión finita	452
31.6. Posiciones relativas	453
31.7. Dependencia e independencia afín en dimensión finita	454
31.8. Complementos y ejercicios	456
32. Aplicaciones afines	461
32.1. Traslaciones en un espacio afín	461
32.2. El concepto de aplicación afín	463
32.3. Aplicaciones afines entre espacios vectoriales	464
32.4. Ejemplos de morfismos afines	464
32.5. Composición e inversión de aplicaciones afines	465
32.6. Ecuación vectorial de una aplicación afín	467
32.7. Determinación y descomposición de aplicaciones afines	468
32.8. Isomorfía de espacios afines	470
32.9. Aplicaciones afines y dependencia afín	470
32.10. Aplicaciones afines y subespacios afines	472
32.11. Aplicaciones afines y paralelismo	473
32.12. Puntos dobles de un endomorfismo afín	473
32.13. Matriz de una aplicación afín	474
32.14. Complementos y ejercicios	477
33. El grupo afín. Cambio de coordenadas	479
33.1. El grupo afín de un espacio afín	479
33.2. Grupo de las afinidades que tienen como doble un punto dado	480
33.3. Descomposición semidirecta del grupo afín	481
33.4. Matriz de una afinidad	481
33.5. Cambio de coordenadas en un espacio afín	482
33.6. Orientación de sistemas de referencia en espacios afines reales	483
33.7. Paridad e imparidad de las afinidades de un espacio real	484
33.8. Complementos y ejercicios	484

34. Simetrías, traslaciones y homotecias	487
34.1. Simetrías centrales	487
34.2. El grupo $\mathcal{TC}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$	488
34.3. Homotecias afines	489
34.4. El grupo $\mathcal{H}_P^*(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ de las homotecias concéntricas	491
34.5. El grupo $\mathcal{TH}^*(\mathcal{E}, \mathbb{K})$	491
34.6. Composición de traslaciones con homotecias y simetrías centrales	494
34.7. Estructura de los grupos $\mathcal{TH}^*(\mathcal{E}, \mathbb{K})$ y $\mathcal{TC}(\mathcal{E}, \mathbb{K})$	496
34.8. Proyecciones paralelas y simetrías oblicuas	497
34.9. Simetrías especulares y simetrías axiales	502
34.10. Complementos y ejercicios	503
Bibliografía	507

Capítulo 1

Vectores libres

1.1. Nota

Los vectores libres fueron incorporados al saber matemático hacia mitad del siglo XIX y desde entonces su uso se ha hecho imprescindible en muchos cursos de Geometría Elemental, y, por supuesto, en todos los de Física General. Debemos, pues, suponer que forman parte del actual *bagaje cultural-científico* de nuestros alumnos. Nosotros, *humildemente*, sólo pretendemos hacer un recordatorio de los mismos.

Ahora bien, puesto que su introducción (lo mismo para geómetras que para físicos) se hace partiendo de un conocimiento previo de la **recta**, el **plano** y el **espacio geométricos**, nuestra *inquietud*, antes de iniciar la redacción del tema, podría sintetizarse en estas preguntas:

- ¿Qué nivel *exacto* de conocimientos debemos presuponer?
- ¿Qué **Geometría** es la que *realmente* conocen los estudiantes recién incorporados a la Universidad?
- ¿Se basa su conocimiento geométrico en alguna de las versiones de la **axiomática de Euclides**, o, simplemente, se limita a una *exploración intuitiva y empírica* de los tres *ámbitos geométricos*?

1.2. El plano geométrico

Aunque más adelante añadamos alguna cuestión relativa a la **recta** o al **espacio**, centremos ahora nuestra atención en el **plano geométrico**.

Se trata de un conjunto \mathcal{P} cuyos elementos reciben el nombre de **puntos** en el que se destacan ciertos subconjuntos llamados **rectas**; unos y otros se *relacionan* mediante enunciados cuya validez admitimos de entrada. Son los **postulados** o **axiomas**, de los que, a modo de ejemplo, recordamos uno:

Por dos puntos distintos pasa una recta y sólo una.

A la vez que se van añadiendo los diversos postulados, se establecen conceptos como *paralelismo* y *corte de rectas*, *segmentos* y *ángulos*, se introducen *magnitudes* como *longitudes*, *áreas*, etc., y se definen *transformaciones* como *giros*, *simetrías axiales*, *homotecias*. En nuestro repaso no reseñaremos ningún sistema completo de axiomas, no pretenderemos agotar conceptos y teoremas de la geometría del plano, sino que nos ceñiremos a lo que sea imprescindible para la construcción de los vectores libres.

El lector interesado puede encontrar una exposición exhaustiva en

PUIG ADAM, PEDRO (1986), *Curso de Geometría Métrica, Tomo I*, Euler Editorial, Madrid.

Más escueta, aunque mejor adaptada a nuestros fines, es la contenida en

CHOQUET, GUSTAVE (1964), *L'enseignement de la géometrie*, Hermann, Paris.

1.3. Semirrectas o rayos

Fijada una recta r del plano geométrico \mathcal{P} y un punto A en ella, el conjunto $r - \{A\}$ es la unión de dos subconjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, llamados **semirrectas abiertas** (o **rayos de origen** (o **frontera**) A). Se dice que cada una de ellas es **opuesta** de la otra. Dos puntos X, Y de $r - \{A\}$ se dice que **están al mismo lado de A** si pertenecen a la misma semirrecta. En caso contrario se dice que **están en distinto lado**. Si a una semirrecta le añadimos el origen, hablaremos de **semirrecta cerrada**.

Dados dos puntos distintos A, B del plano, denotaremos por $\langle A, B \rangle$ la recta que pasa por ellos. La semirrecta cerrada de origen A a la que pertenece B se denotará como $[A, B \rangle$, lo mismo que $[B, A \rangle$ indicará la semirrecta cerrada de origen B que pasa por A .

1.4. Segmentos

El conjunto

$$[A, B] = [A, B \rangle \cap [B, A \rangle$$

se conoce como **segmento de extremos A y B** . Entre sus puntos están A y B ; de los restantes, se dice que **están situados entre A y B** . El orden en que se nombren los extremos es indiferente, de manera que, en tanto que conjuntos, se tiene $[A, B] = [B, A]$. También cabe la consideración de segmentos *degenerados* como el $[A, A]$, que se reduce a un punto.

1.5. Vectores fijos

Llamamos **vector fijo de origen A y extremo B** a una pareja ordenada (A, B) de puntos de \mathcal{P} . Su *representación* sería una *flecha* que va de A a B .

Que la pareja sea ordenada significa que, como vectores, (A, B) será distinto de (B, A) , siempre que $A \neq B$. Precisamente en el caso $A = B$ (o sea, vectores con origen y extremo coincidentes), el vector (A, A) se nombra como **nulo** y se *representa* por el propio punto.

Si $A \neq B$, $\langle A, B \rangle$ se nombra como el *soporte* del vector. Dos vectores fijos (A, B) y (C, D) no nulos pueden tener el mismo o distinto soporte.

No debe confundirse el vector (A, B) con el segmento $[A, B]$, pues en éste no importa el orden en que se nombren los puntos. Este matiz justifica cierto lenguaje que entiende los vectores fijos como *segmentos orientados*.

1.6. Longitudes y distancias

Previo fijación de una *unidad* o *escala*, a los segmentos se le asigna una magnitud llamada **longitud**. Su resultado (como se sabe cuando menos desde la época de Pitágoras) es un número no siempre racional, es decir, se trata de un número real, al que también llamaremos **distancia de A a B** y denotaremos como $d(A, B)$. Será positivo o nulo, siendo nulo cuando y sólo cuando $A = B$. Como $[A, B] = [B, A]$, se tendrá una propiedad simétrica para la distancia: $d(B, A) = d(A, B)$. Euclides ya probó que para tres puntos distintos y no alineados (es decir, formando *triángulo*) A, B, C , se cumple

$$d(A, C) < d(A, B) + d(B, C),$$

Por el contrario:

La igualdad $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ se cumple si y sólo si A, B, C están alineados y $B \in [A, C]$.

Dado un número $\lambda \geq 0$, siempre existen segmentos que lo tienen por longitud, o, lo que es igual, parejas de puntos que lo tienen por distancia. En particular, se tiene un resultado que usaremos con frecuencia:

Fijado un punto O en una recta r y un número $\lambda > 0$, hay dos puntos en r situados a distancia λ de O , cada uno de ellos en una de las semirrectas de origen O .

1.7. Módulo de un vector

El número $d(A, B)$ también se nombra como **módulo del vector** (A, B) , y se denota $\| (A, B) \|$.

Coincidirá con el módulo de (B, A) , y será nulo si y sólo si se trata de un vector nulo.

1.8. Paralelismo de rectas. El concepto de dirección

En el conjunto de rectas del plano \mathcal{P} se define la siguiente relación binaria: se dice que **la recta r es paralela a la recta s** cuando

$$r = s, \text{ o bien } r \cap s = \emptyset.$$

Un postulado que ahora usaremos dice lo siguiente:

por un punto B no perteneciente a una recta r , pasa una recta s y sólo una que sea paralela a r .

Proposición 1.1 *El paralelismo entre rectas es una relación de equivalencia.*

Demostración:

1. Toda recta r es paralela a sí misma porque $r = r$.
2. Si $r = s$, también $s = r$, y si $r \cap s = \emptyset$, también $s \cap r = \emptyset$, o sea, si r es paralela a s , s es paralela a r .
3. Si r es paralela a s y s es paralela a t , pueden presentarse las siguientes situaciones:
 - a) $r = s, s = t$. Entonces, $r = t$.
 - b) $r = s, s \cap t = \emptyset$. Entonces, $r \cap t = \emptyset$.
 - c) $r \cap s = \emptyset, s = t$. Entonces, $r \cap t = \emptyset$.
 - d) $r \cap s = \emptyset, s \cap t = \emptyset$. Si $r \cap t \neq \emptyset$, aplicando que por un punto exterior (uno de los de corte de r y t) a una recta (la s) pasa una única recta paralela a ella, se tiene $r = t$. En caso contrario, obtenemos $r \cap t = \emptyset$.

En todas las alternativas hemos llegado a que r es paralela a t . □

La clase asociada a cada recta r por esta relación se llama su **dirección**. Esto, en definitiva, significa que dos rectas tienen igual dirección si y sólo si son paralelas.

1.9. Dirección de un vector

Dado un vector fijo no nulo (A, B) , su dirección es la de la recta $\langle A, B \rangle$. De otra forma: (A, B) y (C, D) tienen la misma dirección cuando sus rectas soporte son paralelas. A veces se escribe $Sen(A, B)$.

¿Tienen dirección los vectores nulos (A, A) ? Por no haber una única recta que pase por A , se suele decir que su dirección es *indeterminada*. Ahora bien, como por A pasa una paralela a una dirección dada arbitrariamente, la *indeterminación* cabe ser interpretada en el sentido de que (A, A) posee cualquier dirección. Esto justifica que en la frase *dos vectores de igual dirección* pueda incluirse la posibilidad de que uno de ellos sea nulo.

1.10. Semiplanos

Dada una recta r del plano geométrico \mathcal{P} , el conjunto $\mathcal{P} - r$ es unión de dos subconjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, llamados **semiplanos abiertos de borde (arista o frontera) r** . Se dice que cada uno de ellos es **opuesto** del otro. Dos puntos X, Y de $\mathcal{P} - r$ se dice que **están al mismo lado de r** si pertenecen al mismo semiplano. En caso contrario se dice que **están en distinto lado**. Si a un semiplano le añadimos su arista, hablaremos de **semiplano cerrado**.

Dada una recta r y un punto $C \notin r$, el semiplano cerrado de arista r al que pertenece C se denotará como $[r, C >$. Si r está determinada por dos puntos A y B , escribimos $[A, B, C >$.

Si dos puntos X y Y exteriores a r están al mismo lado de r , lo está todo el segmento $[X, Y]$; si están en lados opuestos, el segmento $[X, Y]$ tiene un punto de corte con la arista. Si dos rectas distintas r y s son paralelas, s queda incluida en uno de los semiplanos de borde r ; si se cortan en un punto A , las semirrectas de origen A en que se divide s se quedan en distintos lados de r .

1.11. Sentido de un vector

Muchos textos elementales afirman que el **sentido de un vector fijo** (A, B) es el *marcado desde A a B* . Colocan al lado una *flecha* (A, B) , el lector fija su vista en ella, mira el punto A y luego el B y se queda tan conforme: ha entendido lo del **sentido**. Sin embargo, haciendo un juego de palabras, nosotros afirmamos que *hablar del sentido de un solo vector, carece de todo sentido*. El **sentido**, en efecto, va a ser una *comparación* entre dos vectores fijos. Otros autores vienen a decir que es la *cualidad que distingue al vector (A, B) del (B, A)* . Aquí ya hay mejora porque se hace intervenir a dos vectores distintos, pero no se aclara cómo se va a saber si tal *distinción* existe o no entre parejas arbitrarias (A, B) y (C, D) .

Empecemos por fijar la idea de que la *comparación en sentido* sólo se va a definir para dos vectores fijos (A, B) y (C, D) , no nulos, que tengan previamente la misma dirección.

Si los vectores están en la misma recta, se dice que (A, B) **tiene el mismo sentido que** (C, D) cuando

$$[A, B > \subseteq [C, D >, \text{ o bien } [C, D > \subseteq [A, B > .$$

En particular, si $A = C$, tienen el mismo sentido cuando $[A, B > = [A, D >$, es decir, cuando sus extremos están en la misma semirrecta de origen A .

Si los vectores están en rectas paralelas distintas, se dice que (A, B) **tiene el mismo sentido que** (C, D) cuando $[A, C, B > = [A, C, D >$, o sea, cuando los extremos estén en un mismo semiplano de los determinados por la recta que une los orígenes.

En todo caso, la frase (A, B) **tiene distinto sentido** (o **sentido opuesto**) **que** (C, D) se define por negación de las anteriores afirmaciones.

Puede escribirse $Sen(A, B) = Sen(C, D)$ para indicar la igualdad de sentido, y $Sen(A, B) = -Sen(C, D)$ para indicar sentidos opuestos. En particular, se comprueba sin más que

$$Sen(A, B) = -Sen(B, A).$$

1.12. Multiplicación de números por vectores fijos

Sea $a \in \mathbb{R}$ un número y sea (X, Y) un vector fijo. Mediante las siguientes reglas, definiremos un nuevo vector, denotado $a(X, Y)$, al que llamaremos **producto de a por (X, Y)** :

$$a(X, Y) = (X, X) \text{ si } a = 0$$

$$a(X, Y) = (X, X) \text{ si } X = Y$$

Si $X \neq Y$ y $a \neq 0$, se buscan en la recta $\langle X, Y \rangle$ dos puntos equidistantes de X en la cantidad $\lambda = |a| d(X, Y)$, uno P en la semirrecta $[X, Y \rangle$ y otro Q en la opuesta. Entonces,

$$a(X, Y) = (X, P) \text{ si } a > 0$$

$$a(X, Y) = (X, Q) \text{ si } a < 0.$$

En todo caso, se cumple

$$\| a(X, Y) \| = |a| \| (X, Y) \|.$$

Si los datos son ambos no nulos, se cumple

$$Sen(a(X, Y)) = Sen(X, Y).$$

En cuanto al sentido, se tendrá

$$Sen(a(X, Y)) = Sign(a) Sen(X, Y),$$

donde *Sign* es la **función signo** de los números reales, es decir,

$$Sign(a) = \begin{cases} +1 & \text{si } a > 0 \\ -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Un hecho a destacar es que si $O \neq X$, dado cualquier punto Y de $\langle O, X \rangle$, siempre existe un número λ tal que $(O, Y) = \lambda(O, X)$: basta tomar

$$\lambda = \pm \| (O, Y) \| / \| (O, X) \|,$$

con signo $+$ si $Y \in [O, X \rangle$, y con signo $-$ en caso contrario.

1.13. El Teorema de Thales

Prescindiendo del origen y nivel del bagaje geométrico de nuestros alumnos, por mínimo que éste fuere, supondremos de *conocimiento universal* un enunciado atribuido al matemático griego Thales de Mileto. Hay muchas maneras de presentarlo. En nuestro *lenguaje actual* valdría ésta:

Dadas dos rectas p y q incidentes en un punto O , cortémoslas por dos paralelas disjuntas r y s , y sean

$$A = r \cap p, A' = s \cap p, B = r \cap q, B' = s \cap q.$$

Entonces,

$$(O, A') = \lambda(O, A) \Rightarrow (O, B') = \lambda(O, B).$$

(Por ser r y s disjuntas, al menos una de estas dos rectas no puede pasar por O . En el enunciado se ha supuesto implícitamente que $O \notin r$, lo que permite asegurar la existencia del número λ que en él aparece; si r pasara por O , bastaría cambiar r por s).

De inmediato se prueba una especie de recíproco:

Dadas dos rectas p y q incidentes en un punto O , si se tienen parejas de puntos $A, A' \in p$ y $B, B' \in q$, de manera que $O \notin \langle A, B \rangle$ y exista un número λ para el cual

$$(O, A') = \lambda(O, A), (O, B') = \lambda(O, B),$$

se demuestra que $\langle A, B \rangle$ es paralela a $\langle A', B' \rangle$.

En ambas hipótesis, también se demuestra que

$$(A', B') = \lambda(A, B).$$

1.14. Puntos medios

Proposición 1.2 *Dados dos puntos distintos X e Y , existe un punto único $O \in [X, Y]$ que equidista de X e Y .*

Demostración:

Existencia. Sea O el punto tal que $(X, O) = (X, Y)/2$. Por propia construcción, se cumple que $d(X, O) = d(X, Y)/2$ y que $O \in [X, Y >$. Este punto también está en $[Y, X >$, pues de lo contrario tendríamos

$$d(X, O) = d(X, Y) + d(Y, O) \Rightarrow 0 = d(X, Y)/2 + d(Y, O),$$

relación que evidentemente es absurda. Estando en $[X, Y >$ y en $[Y, X >$, queda probado que $O \in [X, Y]$. Además, O equidista de X e Y porque

$$d(X, Y) = d(X, O) + d(O, Y) = d(X, Y)/2 + d(O, Y) \Rightarrow d(O, Y) = d(X, Y)/2.$$

Unicidad. Como en $[X, Y >$ no puede haber dos puntos distintos a la misma distancia de X , tampoco en $[X, Y]$. \square

El punto O de este teorema recibe el nombre de **punto medio de X e Y** , o **punto medio del segmento $[X, Y]$** .

Señalemos que también *procede* hablar del punto medio de segmentos $[X, X]$, si lo tomamos como el propio punto X .

Proposición 1.3 *Dados dos puntos distintos X y O , existe un punto único $Y \in < X, O >$ de manera que O es punto medio de $[X, Y]$.*

Demostración:

Para la existencia basta tomar el punto Y de manera que $(X, Y) = 2(X, O)$. La unicidad se razona como en la anterior proposición. \square

Naturalmente, si $X = O$, se tomaría $Y = O$.

1.15. Simetrías centrales

Fijado O , según la proposición 1.3, a cada punto X del plano le asignamos otro X' , único, tal que O es punto medio de X y X' . Este punto se conoce como **simétrico de X respecto de O** . La aplicación $X \mapsto X'$, que denotaremos por S_O , se llama **simetría central**, siendo O nombrado como **centro de la simetría**.

Tomando los vectores con origen en O , al multiplicar (O, X) por el número -1 , se obtiene un vector (O, Y) cuyo extremo dista de O lo mismo que X , pero con sentido opuesto. Es claro que Y no puede ser otro que el simétrico $X' = S_O(X)$ de X . Esta observación justifica la escritura

$$(O, X') = -(O, X),$$

que es una *ecuación vectorial* de la simetría central, a la vez que permite usar el Teorema de Thales y sus consecuencias, adaptadas al caso del factor $\lambda = -1$. Con la definición de simetría y el citado teorema, se pueden demostrar las siguientes propiedades de las simetrías:

1. O se aplica sobre sí mismo y es el único con esta propiedad.
2. X y X' están alineados con O y a distintos lados del mismo.
3. Si aplicamos dos veces consecutivas una simetría central, cada X vuelve a su posición inicial, con lo cual (siendo I la aplicación identidad del plano), se tiene

$$S_O \circ S_O = I \Leftrightarrow (S_O)^{-1} = S_O.$$

4. Dados dos puntos X e Y , distintos entre sí y distintos de O , la recta $< X', Y' >$ que pasa por sus simétricos es paralela a la $< X, Y >$.

5. El simétrico de un vector no nulo (X, Y) es otro vector (X', Y') de igual módulo y dirección, pero de sentido opuesto.
6. Las simetrías centrales son **movimientos geométricos**, entendiendo por tales las transformaciones que conservan la distancia entre puntos.
7. Las simetrías son **transformaciones afines**, es decir, cambian rectas en rectas, conservando, además, la posición relativa de sus puntos. En concreto, si una recta pasa por el centro, se transforma en sí misma, mientras que si no pasa por ese punto se transforma en otra recta disjunta y paralela a ella.

1.16. Equipolencia de vectores fijos

Se dice que el vector fijo (A, B) es **equipolente** al (C, D) cuando el punto medio del segmento $[A, D]$, que une el origen del primero con el extremo del segundo, coincide con el punto medio del segmento $[B, C]$ que une el extremo del primero con el origen del segundo. Lo denotamos como

$$(A, B) \equiv (C, D).$$

Proposición 1.4 $(A, B) \equiv (C, D) \Leftrightarrow (A, C) \equiv (B, D)$.

Demostración:

Basta aplicar la definición y observar que los segmentos $[B, C]$ y $[C, B]$ coinciden. \square

Proposición 1.5 *Dos vectores nulos son equipolentes.*

Demostración:

Si en la definición ponemos $A = B, C = D$, los segmentos $[A, D]$ y $[B, C]$ son idénticos, luego comparten el punto medio. \square

Siendo P el punto medio común de $[A, D]$ y $[B, C]$, de la definición de equipolencia se deduce que en la simetría S_P las parejas A, D y B, C se corresponden entre sí. Recíprocamente, si existe un punto P tal que $S_P(A) = D, S_P(B) = C$, entonces P es punto medio común de ambos segmentos, luego los vectores son equipolentes. Es decir,

Proposición 1.6 *Para que $(A, B) \equiv (C, D)$ es necesario y suficiente que exista un punto P tal que $S_P(A) = D, S_P(B) = C$.*

Proposición 1.7 *Dos vectores equipolentes tienen el mismo módulo, dirección y sentido.*

Demostración:

Supongamos $(A, B) \equiv (C, D)$. Si P es el punto medio de $[A, D]$ y $[B, C]$, puesto que $S_P(A, B) = (D, C)$, estos vectores son de igual módulo y dirección. Como (D, C) y (C, D) comparten dirección y módulo, lo mismo le pasará a (A, B) y (C, D) . Si los vectores son no nulos, (A, B) tiene sentido opuesto al de su simétrico (D, C) ; éste, a su vez, tiene sentido opuesto al de (C, D) , luego (A, B) y (C, D) son de igual sentido. \square

Si (C, D) es equipolente a (A, A) , tendrá módulo nulo, luego $C = D$. Así completamos la proposición 1.4 de esta otra forma:

Proposición 1.8 *Para que un vector (C, D) sea equipolente a uno nulo (A, A) es necesario y suficiente que (C, D) también sea nulo.*

Proposición 1.9 *Dos vectores de igual módulo, dirección y sentido son equipolentes.*

Demostración:

1. Si el módulo común es 0, se trata de vectores nulos y por tanto equipolentes.
2. En caso contrario, sean (A, B) y (C, D) vectores de igual módulo, dirección y sentido, y sea P el punto medio de $[A, D]$. El simétrico B' de B mediante S_P está en la paralela a $\langle A, B \rangle$ que pasa por $A' = D$. Como las rectas $\langle A, B \rangle$ y $\langle C, D \rangle$ son paralelas, esto quiere decir que $B' \in \langle C, D \rangle$. El vector $(A', B') = (D, B')$ tiene sentido opuesto al de (A, B) , luego también opuesto al de (C, D) , o sea igual sentido que (D, C) . Estando B' y C a un mismo lado de D , puesto que

$$d(C, D) = d(A, B) = d(A', B') = d(D, B'),$$

necesariamente es $B' = C$. Así, $S_P(A) = D$ y $S_P(B) = C$, y basta aplicar la proposición 1.6. \square

Uniendo las proposiciones 1.7 y 1.9, llegamos al habitual **criterio de equipolencia**:

Proposición 1.10 *Para que dos vectores sean equipolentes es necesario y suficiente que tengan igual módulo, dirección y sentido.*

Proposición 1.11 *La equipolencia es una relación de equivalencia en el conjunto de los vectores fijos.*

Demostración:

Basta aplicar la proposición anterior, recordando que todas las igualdades son reflexivas, simétricas y transitivas. \square