Andrés Raya \ Alfonso Ríder
Rafael Rubio

Álgebra y Geometría lineal

EDITORIAL REVERTÉ

Álgebra y Geometría lineal

Andrés Raya
Alfonso Ríder
Rafael Rubio

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Álgebra y Geometría lineal

Edición en papel:
©Editorial Reverté, S. A., 2007
ISBN 978-84-291-5038-4

Edición e-book (PDF):
©Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9292-6

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

Prefacio

Del contenido de este libro

El presente libro está dedicado al estudio de los **Espacios Vectoriales** y temas relacionados con ellos (**matrices**, **determinantes**, **sistemas lineales**, **espacios afines** y **clasificación de endomorfismos**). Forma parte, con otros en fase de redacción, de un **Curso de Álgebra y Geometría**, que pretendemos *ofrecer* a nuestros alumnos de la Licenciatura en Ciencias Físicas. Sin embargo, ni la materia en sí ni el *enfoque personal* que perseguimos en su redacción son específicos de estos estudiantes. Nuestro curso podría ser válido igualmente para otros alumnos de Ciencias (químicos, biólogos e incluso *futuros* matemáticos), así como para los de cualquier Ingeniería, lo mismo media que superior.

El libro concebido como referencia

Bueno es advertir desde ahora que el libro no pretende ser *completo* en el sentido que los *topólogos* y *matemáticos en general* damos a este término. Como le ocurre a los números racionales, tiene *huecos* y *lagunas* por doquier. Más bien está concebido como una especie de *guión* (aunque en realidad es bastante más que eso) donde aparecen todas las definiciones y demostraciones de teoremas que un profesor necesitaría para el desarrollo de la clase real. Los *huecos*, las *lagunas*, se refieren principalmente a lo que llamaríamos *motivaciones*, *introducciones históricas*, *razonamientos plausibles*, *uso de figuras* y mayor abundancia de *ejemplos* y *ejercicios.*

Claro está que, ante tan grande *ausencia*, debemos justificar nuestra postura: no es que no seamos partidarios de redactar estos *complementos*, sino que nos inclinamos a pensar que su exposición es algo que pertenece al acto lectivo en sí (la clase) y debe llevar la impronta de la persona que lo cuenta (el profesor). Cualquier antiguo alumno nuestro puede atestiguar cómo en clase *usamos* y hasta *abusamos* de este *material complementario.* En otras palabras: nosotros mismos al impartir las clases seríamos los primeros en no seguir *al pie de la letra* el texto que ahora presentamos: éste quedaría como una especie de *referencia* donde lo esencial queda *pulido* y *fijado*, cosa que por otra parte no siempre se consigue en los sesenta minutos de clase *presencial.*

Los vectores libres

El origen del concepto de espacio vectorial está en los llamados **vectores libres**. En realidad, *copia* de ellos las operaciones de adición de vectores y la multiplicación de números por vectores y se *obliga* a que estas operaciones tengan las mismas propiedades fundamentales que tienen las operaciones con vectores.

Una vez hecho esto, la teoría de espacios vectoriales se convierte en un capítulo más del Álgebra, entendida ésta como el estudio de conjuntos dotados de operaciones que a su vez están sujetas a cumplir determinadas propiedades. Sin embargo, como iremos viendo a lo largo de este libro, los espacios vectoriales toman una y otra vez como prestado el indudablemente *lenguaje geométrico* propio de los vectores libres. De esta forma conseguimos *geometrizar*, con toda la carga positiva que ello arrastra, este capítulo sobre la muchas veces llamada *Álgebra Abstracta*, con cierto matiz peyorativo para el adjetivo, procedente tal vez de la *aridez* y *frialdad* que muchos dicen ver en las operaciones y en los desarrollos formales.

Para poder dar este *barniz geométrico* a nuestra teoría es conveniente hacer un amplio repaso de vectores libres. Nosotros lo planteamos en el primer capítulo del libro, y bueno será adelantar un detalle sobre el que nos extenderemos al comienzo del mismo, que así dicho, no deja de ser una *verdad de Perogrullo*: el estudio de los vectores libres requiere conocimientos previos y sólidos de Geometría.

Fundamentación de la Geometría

Hemos escrito *conocimientos sólidos*; o sea, debidamente fundamentados. La Geometría sin duda está dotada de unos cimientos casi perfectos desde que el matemático griego Euclides redactara sus Elementos hacia el año 300 antes de Jesucristo. Además, sus imperfecciones fueron limadas por el alemán Hilbert al comienzo del siglo XX. Colocada, por otra parte, como *ámbito real* en el que se ha desarrollado durante siglos la Física (especialmente la Mecánica y no digamos la Óptica), su aprendizaje ha sido ineludible para toda persona *culta* de nuestra civilización occidental.

La Geometría, a la manera de Euclides, ha formado parte de cualquier programa educativo (en sus etapas primaria y secundaria sobre todo) para generaciones enteras hasta muy avanzado el siglo XX, y, además, con carácter casi exclusivo respecto de otros posibles *enfoques* y *ampliaciones* de la propia Geometría.

Y al hablar de otros enfoques y ampliaciones podemos pensar, por ejemplo, en la llamada Geometría Analítica, creada en la primera mitad del siglo XVII por los franceses Fermat y Descartes, la cual, mediante el uso de coordenadas, permitió el estudio de cuestiones geométricas con técnicas numéricas y Álgebraicas. O en la Geometría Proyectiva de Desargues, o la Geometría Diferencial de Monge. Todas ellas contribuyeron al nacimiento de la Geometría Vectorial, en pleno siglo XIX, siendo sus principales promotores Grassmann, Cayley y Hamilton, pero todas ellas, a su vez, seguían fundamentándose en la Geometría de Euclides.

Sólo en épocas más cercanas ha sido posible un *cambio radical* en la manera de fundamentar la Geometría, consistente en tomar los espacios vectoriales como punto de partida. Este cambio precisaba una *clarificación*, o mejor, una *formalización* de los números reales, labor que se culminó en la segunda mitad del XIX y a la que contribuyeron entre otros Weierstrass, Dedekind y Cantor. Y lo precisaba porque los espacios vectoriales descansan a su vez en los *escalares* o *números*, elementos en definitiva de lo que en Álgebra se llaman *cuerpos conmutativos*, y de los que números reales y números complejos son sus dos ejemplos más importantes.

Es decir, *modernamente*, se procede al revés: los *elementos primitivos*, por decirlo de alguna manera, son los **vectores** entendidos como miembros de un espacio vectorial, y con ellos vamos construyendo todo un edificio que, si bien es puramente algebraico, como ya hemos tenido ocasión de señalar, lo vamos *geometrizando* paulatinamente siempre con la guía, como también hemos señalado, de lo que pasaba con los vectores libres. Al hablar de espacios vectoriales irán apareciendo, en efecto, los subespacios que generalizan a las rectas y planos clásicos, el concepto de aplicación lineal (inspirado y generalizador de las transformaciones geométricas), el concepto de dimensión, etc. En etapas posteriores hablaremos de los espacios afines, ligados a un espacio vectorial, en los que *reaparece* el concepto de **punto** y en los que se incluyen todas las cuestiones de **paralelismo** e **incidencia**. Y también lo haremos (no en este volumen sino en otro que titularemos *Álgebra* y *Geometría Cuadrática*) de los espacios vectoriales euclídeos, éstos siempre con los números reales como cuerpo de base, en los que el *instrumento básico* será el **producto escalar**, generalización abstracta del conocido en vectores libres, dando así entrada a conceptos como **perpendicularidad**, **longitudes**, **ángulos**, etc; y llegarán por fin los espacios afines euclídeos en los que confluyen todos los conceptos de la Geometría tradicional.

Dentro de todas estas elaboraciones jugarán un papel destacado los *espacios analíticos* o *cartesianos*, entendidos como conjuntos de parejas ordenadas, ternas ordenadas, etc., de elementos de un cuerpo. Cuando éste sea el $I\!R$ de los números reales, llegamos a que el plano euclídeo tradicional se sustituye sin más por el espacio afín euclídeo de las parejas, mientras que el espacio lo hace por el de las ternas.

Polivalencia del Álgebra Vectorial

El alumno suele dudar de la necesidad de *tanto edificio* para llegar finalmente a algo que históricamente ya era conocido. Tenemos que decirles que están cargados de razón: si se trata únicamente de obtener una nueva fundamentación de la Geometría, el Álgebra Vectorial es un lujo. Pero es que hay más ...

También les diremos que, conforme avancen en sus estudios, eleven su nivel y vayan abandonando las formulaciones puramente elementales, irán comprobando por sí mismos cómo la Teoría de Espacios Vectoriales, además de servir para *otra* fundamentación de la Geometría de Euclides, es una herramienta *cuasi* imprescindible del Análisis y la Física Clásica, y desde luego *totalmente* imprescindible en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales, el Análisis Funcional o la Mecánica Cuántica. Sin el Álgebra de los espacios vectoriales queda *coja* la moderna Geometría Diferencial, incluidas las *coordenadas generalizadas* de la Mecánica Analítica. Sin ella se carece de *lenguaje* para las geometrías no euclídeas dotadas de *métricas generalizadas*. Por ejemplo, la *Geometría* asociada a las *transformaciones* de Lorentz, que no es otra que la del famoso *espacio-tiempo* de Einstein, o, si se quiere, el *espacio tetradimensional* de Minkowski.

Dimensiones arbitrarias

La inercia mental tiende a asociar el concepto de **dimensión** con *magnitudes* que se dicen extraídas del mundo real: *unidimensionales* son los objetos que sólo tienen *largo*, *bidimensionales* los que poseen *largo* y *ancho*, *tridimensionales* los dotados de *largo*, *ancho* y *alto*. Y no hay más, dicen algunos. Los físicos *relativistas* se encargaron de romper este aserto: otra magnitud, el *tiempo*, puede jugar y juega el papel de *cuarta dimensión* en el citado espacio de Minkowski.

Pero he aquí que los matemáticos hablan de *espacios n-dimensionales*, siendo n un entero positivo arbitrario. ¿Dónde *están* las dimensiones superiores a cuatro? Respondemos con otra pregunta, desconcertante tal vez para el estudiante que se inicia: ¿quién ha dicho que estén en alguna parte?

Insistiremos una vez más en nuestras ideas: el concepto de dimensión será algebraico y por tanto no cabe esperar que *el olmo nos ofrezca peras*. Pero al estar inspirado en los casos geométricos elementales, lo *barnizamos*, como hemos dicho en párrafos anteriores, hasta conseguir que el fruto del olmo se *geometrice* y nos dé la apariencia de *pera*.

En definitiva, todo proceso para cuya descripción o determinación se precisen n datos independientes será n-dimensional. Por ejemplo, cualquier función de n variables de las que se estudian en Análisis o cualquier sistema dinámico que dependa de n coordenadas generalizadas. Si se quiere, désele a cada dimensión la interpretación concreta de esa variable o de esa coordenada.

Y puestos a generalizar, ¿por qué no infinitas dimensiones? Por ejemplo, los desarrollos en serie de Fourier, fundamentales en todas las cuestiones *ondulatorias* de la Física, dependen de sus infinitos sumandos y el ámbito en que hoy se estudian son los espacios (infinito-dimensionales) de Hilbert. Los mismos espacios que se hicieron imprescindibles en la formulación matemática de la Mecánica Cuántica una vez que Heisenberg enunciara su *Principio de Incertidumbre* en 1927.

Índice general

Capítulo 1

Vectores libres

1.1. Nota

Los vectores libres fueron incorporados al saber matemático hacia mitad del siglo `XIX` y desde entonces su uso se ha hecho imprescindible en muchos cursos de Geometría Elemental, y, por supuesto, en todos los de Física General. Debemos, pues, suponer que forman parte del actual *bagaje cultural-científico* de nuestros alumnos. Nosotros, *humildemente*, sólo pretendemos hacer un recordatorio de los mismos.

Ahora bien, puesto que su introducción (lo mismo para geómetras que para físicos) se hace partiendo de un conocimiento previo de la **recta**, el **plano** y el **espacio geométricos**, nuestra *inquietud*, antes de iniciar la redacción del tema, podría sintetizarse en estas preguntas:

- ¿Qué nivel *exacto* de conocimientos debemos presuponer?
- ¿Qué **Geometría** es la que *realmente* conocen los estudiantes recién incorporados a la Universidad?
- ¿Se basa su conocimiento geométrico en alguna de las versiones de la **axiomática de Euclides**, o, simplemente, se limita a una *exploración intuitiva* y *empírica* de los tres *ámbitos geométricos*?

1.2. El plano geométrico

Aunque más adelante añadamos alguna cuestión relativa a la **recta** o al **espacio**, centremos ahora nuestra atención en el **plano geométrico**.

Se trata de un conjunto $\mathcal{P}$ cuyos elementos reciben el nombre de **puntos** en el que se destacan ciertos subconjuntos llamados **rectas**; unos y otros se *relacionan* mediante enunciados cuya validez admitimos de entrada. Son los **postulados** o **axiomas**, de los que, a modo de ejemplo, recordamos uno:

Por dos puntos distintos pasa una recta y *sólo una.*

A la vez que se van añadiendo los diversos postulados, se establecen conceptos como *paralelismo* y *corte de rectas*, *segmentos* y *ángulos*, se introducen *magnitudes* como *longitudes*, *áreas*, etc., y se definen *transformaciones* como *giros*, *simetrías axiales*, *homotecias.* En nuestro repaso no reseñaremos ningún sistema completo de axiomas, no pretenderemos agotar conceptos y teoremas de la geometría del plano, sino que nos ceñiremos a lo que sea imprescindible para la construcción de los vectores libres.

El lector interesado puede encontrar una exposición exhaustiva en

PUIG ADAM, PEDRO (1986), *Curso de Geometría Métrica, Tomo I*, Euler Editorial, Madrid.

Más escueta, aunque mejor adaptada a nuestros fines, es la contenida en

CHOQUET, GUSTAVE (1964), *L'enseignement de la géometrie*, Hermann, Paris.

1.3. Semirrectas o rayos

Fijada una recta r del plano geométrico $\mathcal{P}$ y un punto A en ella, el conjunto $r-\{A\}$ es la unión de dos subconjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, llamados **semirrectas abiertas** (o **rayos**) **de origen** (o **frontera**) A. Se dice que cada una de ellas es **opuesta** de la otra. Dos puntos X, Y de $r-\{A\}$ se dice que **están al mismo lado de** A si pertenecen a la misma semirrecta. En caso contrario se dice que **están en distinto lado**. Si a una semirrecta le añadimos el origen, hablaremos de **semirrecta cerrada**.

Dados dos puntos distintos A, B del plano, denotaremos por $< A, B >$ la recta que pasa por ellos. La semirrecta cerrada de origen A a la que pertenece B se denotará como $[A, B >$, lo mismo que $[B, A >$ indicará la semirrecta cerrada de origen B que pasa por A.

1.4. Segmentos

El conjunto

$$[A, B] = [A, B > \cap [B, A >$$

se conoce como **segmento de extremos** A **y** B. Entre sus puntos están A y B; de los restantes, se dice que **están situados entre** A **y** B. El orden en que se nombren los extremos es indiferente, de manera que, en tanto que conjuntos, se tiene $[A, B] = [B, A]$. También cabe la consideración de segmentos *degenerados* como el $[A, A]$, que se reduce a un punto.

1.5. Vectores fijos

Llamamos **vector fijo de origen** A **y extremo** B a una pareja ordenada (A, B) de puntos de $\mathcal{P}$. Su *representación* sería una *flecha* que va de A a B.

Que la pareja sea ordenada significa que, como vectores, (A, B) será distinto de (B, A), siempre que $A \neq B$. Precisamente en el caso $A = B$ (o sea, vectores con origen y extremo coincidentes), el vector (A, A) se nombra como **nulo** y se *representa* por el propio punto.

Si $A \neq B$, $< A, B >$ se nombra como el *soporte* del vector. Dos vectores fijos (A, B) y (C, D) no nulos pueden tener el mismo o distinto soporte.
No debe confundirse el vector (A, B) con el segmento $[A, B]$, pues en éste no importa el orden en que se nombren los puntos. Este matiz justifica cierto lenguaje que entiende los vectores fijos como *segmentos orientados.*

1.6. Longitudes y distancias

Previa fijación de una *unidad* o *escala*, a los segmentos se le asigna una magnitud llamada **longitud**. Su resultado (como se sabe cuando menos desde la época de Pitágoras) es un número no siempre racional, es decir, se trata de un número real, al que también llamaremos **distancia de** A **a** B y denotaremos como $d(A, B)$. Será positivo o nulo, siendo nulo cuando y sólo cuando $A = B$. Como $[A, B] = [B, A]$, se tendrá una propiedad simétrica para la distancia: $d(B, A) = d(A, B)$. Euclides ya probó que para tres puntos distintos y no alineados (es decir, formando *triángulo*) A, B, C, se cumple

$$d(A, C) < d(A, B) + d(B, C),$$

Por el contrario:
La igualdad $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ se *cumple si* y *sólo si* A, B, C *están alineados* y $B \in [A, C]$.

Dado un número $\lambda \geq 0$, siempre existen segmentos que lo tienen por longitud, o, lo que es igual, parejas de puntos que lo tienen por distancia. En particular, se tiene un resultado que usaremos con frecuencia:
Fijado un punto O en *una recta* r y *un número* $\lambda > 0$, *hay dos puntos en* r *situados a distancia* λ *de* O, *cada uno de ellos en una de las semirrectas de origen* O.

1.7. Módulo de un vector

El número $d(A, B)$ también se nombra como **módulo del vector** (A, B), y se denota $\| (A, B) \|$.

Coincidirá con el módulo de (B, A), y será nulo si y sólo si se trata de un vector nulo.

1.8. Paralelismo de rectas. El concepto de dirección

En el conjunto de rectas del plano $\mathcal{P}$ se define la siguiente relación binaria: se dice que **la recta r es paralela a la recta s** cuando

$$r = s, \text{ o bien } r \cap s = \emptyset.$$

Un postulado que ahora usaremos dice lo siguiente:

por un punto B no perteneciente a una recta r, pasa una recta s y *sólo una que sea paralela a s.*

Proposición 1.1 *El paralelismo entre rectas es una relación de equivalencia.*

Demostración:

1. Toda recta r es paralela a sí misma porque $r = r$.
2. Si $r = s$, también $s = r$, y si $r \cap s = \emptyset$, también $s \cap r = \emptyset$, o sea, si r es paralela a s, s es paralela a r.
3. Si r es paralela a s y s es paralela a t, pueden presentarse las siguientes situaciones:
   a) $r = s$, $s = t$. Entonces, $r = t$.
   b) $r = s$, $s \cap t = \emptyset$. Entonces, $r \cap t = \emptyset$.
   c) $r \cap s = \emptyset$, $s = t$. Entonces, $r \cap t = \emptyset$.
   d) $r \cap s = \emptyset$, $s \cap t = \emptyset$. Si $r \cap t \neq \emptyset$, aplicando que por un punto exterior (uno de los de corte de r y t) a una recta (la s) pasa una única recta paralela a ella, se tiene $r = t$. En caso contrario, obtenemos $r \cap t = \emptyset$.

En todas las alternativas hemos llegado a que r es paralela a t.

□

La clase asociada a cada recta r por esta relación se llama su **dirección**. Esto, en definitiva, significa que dos rectas tienen igual dirección si y sólo si son paralelas.

1.9. Dirección de un vector

Dado un vector fijo no nulo (A, B), su dirección es la de la recta $< A, B >$. De otra forma: (A, B) y (C, D) tienen la misma dirección cuando sus rectas soporte son paralelas. A veces se escribe $Sen(A, B)$.

¿Tienen dirección los vectores nulos (A, A)? Por no haber una única recta que pase por A, se suele decir que su dirección es *indeterminada.* Ahora bien, como por A pasa una paralela a una dirección dada arbitrariamente, la *indeterminación* cabe ser interpretada en el sentido de que (A, A) posee cualquier dirección. Esto justifica que en la frase *dos vectores de igual dirección* pueda incluirse la posibilidad de que uno de ellos sea nulo.

1.10. Semiplanos

Dada una recta r del plano geométrico $\mathcal{P}$, el conjunto $\mathcal{P} - r$ es unión de dos subconjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, llamados **semiplanos abiertos de borde** (**arista** o **frontera**) r. Se dice que cada uno de ellos es **opuesto** del otro. Dos puntos X, Y de $\mathcal{P} - r$ se dice que **están al mismo lado de** r si pertenecen al mismo semiplano. En caso contrario se dice que **están en distinto lado**. Si a un semiplano le añadimos su arista, hablaremos de **semiplano cerrado**.

Dada una recta r y un punto $C \notin r$, el semiplano cerrado de arista r al que pertenece C se denotará como $[r, C >$. Si r está determinada por dos puntos A y B, escribimos $[A, B, C >$.

Si dos puntos X e Y exteriores a r están al mismo lado de r, lo está todo el segmento $[X, Y]$; si están en lados opuestos, el segmento $[X, Y]$ tiene un punto de corte con la arista. Si dos rectas distintas r y s son paralelas, s queda incluida en uno de los semiplanos de borde r; si se cortan en un punto A, las semirrectas de origen A en que se divide s se quedan en distintos lados de r.

1.11. Sentido de un vector

Muchos textos elementales afirman que el **sentido de un vector fijo** (A, B) es el *marcado desde* A a B. Colocan al lado una *flecha* (A, B), el lector fija su vista en ella, mira el punto A y luego el B y se queda tan conforme: ha entendido lo del **sentido**. Sin embargo, haciendo un juego de palabras, nosotros afirmamos que *hablar del* **sentido** *de un solo vector, carece de todo sentido*. El **sentido**, en efecto, va a ser una *comparación* entre dos vectores fijos. Otros autores vienen a decir que es la *cualidad que distingue al vector* (A, B) *del* (B, A). Aquí ya hay mejora porque se hace intervenir a dos vectores distintos, pero no se aclara cómo se va a saber si tal *distinción* existe o no entre parejas arbitrarias (A, B) y (C, D).

Empecemos por fijar la idea de que la *comparación en sentido* sólo se va a definir para dos vectores fijos (A, B) y (C, D), no nulos, que tengan previamente la misma dirección.

Si los vectores están en la misma recta, se dice que (A, B) **tiene el mismo sentido que** (C, D) cuando

$$[A, B >\subseteq [C, D >, \text{ o bien } [C, D >\subseteq [A, B > .$$

En particular, si $A = C$, tienen el mismo sentido cuando $[A, B >= [A, D >$, es decir, cuando sus extremos están en la misma semirrecta de origen A.

Si los vectores están en rectas paralelas distintas, se dice que (A, B) **tiene el mismo sentido que** (C, D) cuando $[A, C, B >= [A, C, D >$, o sea, cuando los extremos estén en un mismo semiplano de los determinados por la recta que une los orígenes.

En todo caso, la frase (A, B) **tiene distinto sentido** (o **sentido opuesto**) **que** (C, D) se define por negación de las anteriores afirmaciones.

Puede escribirse $Sen(A,B) = Sen(C,D)$ para indicar la igualdad de sentido, y $Sen(A,B) = -Sen(C,D)$ para indicar sentidos opuestos. En particular, se comprueba sin más que

$$Sen(A,B) = -Sen(B,A).$$

1.12. Multiplicación de números por vectores fijos

Sea $a \in \mathbb{R}$ un número y sea (X,Y) un vector fijo. Mediante las siguientes reglas, definiremos un nuevo vector, denotado $a(X,Y)$, al que llamaremos **producto de** a **por** (X,Y):

$$a(X,Y) = (X,X) \text{ si } a = 0$$

$$a(X,Y) = (X,X) \text{ si } X = Y$$

Si $X \neq Y$ y $a \neq 0$, se buscan en la recta $< X,Y >$ dos puntos equidistantes de X en la cantidad $\lambda =| a \mid d(X,Y)$, uno P en la semirrecta $[X,Y >$ y otro Q en la opuesta. Entonces,

$$a(X,Y) = (X,P) \text{ si } a > 0$$

$$a(X,Y) = (X,Q) \text{ si } a < 0.$$

En todo caso, se cumple

$$\| a(X,Y) \| =| a | \| (X,Y) \| .$$

Si los datos son ambos no nulos, se cumple

$$Sen(a(X,Y)) = Sen(X,Y).$$

En cuanto al sentido, se tendrá

$$Sen(a(X,Y)) = Sign(a)Sen(X,Y),$$

donde $Sign$ es la **función signo** de los números reales, es decir,

$$Sign(a) = \begin{cases} +1 \text{ si } a > 0 \\ -1 \text{ si } a < 0 \end{cases}$$

Un hecho a destacar es que si $O \neq X$, dado cualquier punto Y de $< O,X >$, siempre existe un número λ tal que $(O,Y) = \lambda(O,X)$: basta tomar

$$\lambda = \pm \| (O,Y) \| / \| (O,X \|,$$

con signo $+$ si $Y \in [O,X >$, y con signo $-$ en caso contrario.

1.13. El Teorema de Thales

Prescindiendo del origen y nivel del bagaje geométrico de nuestros alumnos, por mínimo que éste fuere, supondremos de *conocimiento universal* un enunciado atribuido al matemático griego Thales de Mileto. Hay muchas maneras de presentarlo. En nuestro *lenguaje actual* valdría ésta:

Dadas dos rectas p y q *incidentes en un punto* O, *cortémoslas por dos paralelas disjuntas* r y s, y *sean*

$$A = r \cap p,\ A' = s \cap p,\ B = r \cap q,\ B' = s \cap q.$$

Entonces,

$$(O, A') = \lambda(O, A) \Rightarrow (O, B') = \lambda(O, B).$$

(Por ser r y s disjuntas, al menos una de estas dos rectas no puede pasar por O. En el enunciado se ha supuesto implícitamente que $O \notin r$, lo que permite asegurar la existencia del número λ que en él aparece; si r pasara por O, bastaría cambiar r por s).

De inmediato se prueba una especie de recíproco:

Dadas dos rectas p y q *incidentes en un punto* O, *si se tienen parejas de puntos* $A,\ A' \in p$ y $B,\ B' \in q$, *de manera que* $O \notin < A, B >$ y *exista un número* λ *para el cual*

$$(O, A') = \lambda(O, A),\ (O, B') = \lambda(O, B),$$

se demuestra que $< A, B >$ es *paralela* a $< A', B' >$.

En ambas hipótesis, también se demuestra que

$$(A', B') = \lambda(A, B).$$

1.14. Puntos medios

Proposición 1.2 *Dados dos puntos distintos* X *e* Y, *existe un punto único* $O \in [X, Y]$ *que equidista de* X *e* Y.

Demostración:

Existencia. Sea O el punto tal que $(X, O) = (X, Y)/2$. Por propia construcción, se cumple que $d(X, O) = d(X, Y)/2$ y que $O \in [X, Y >$. Este punto también está en $[Y, X >$, pues de lo contrario tendríamos

$$d(X, O) = d(X, Y) + d(Y, O) \Rightarrow 0 = d(X, Y)/2 + d(Y, O),$$

relación que evidentemente es absurda. Estando en $[X, Y >$ y en $[Y, X >$, queda probado que $O \in [X, Y]$. Además, O equidista de X e Y porque

$$d(X, Y) = d(X, O) + d(O, Y) = d(X, Y)/2 + d(O, Y) \Rightarrow d(O, Y) = d(X, Y)/2.$$

Unicidad. Como en $[X, Y >$ no puede haber dos puntos distintos a la misma distancia de X, tampoco en $[X, Y]$. □

El punto O de este teorema recibe el nombre de **punto medio de X e Y**, o **punto medio del segmento** $[X, Y]$.

Señalemos que también *procede* hablar del punto medio de segmentos $[X, X]$, si lo tomamos como el propio punto X.

Proposición 1.3 *Dados dos puntos distintos X y O, existe un punto único $Y \in < X, O >$ de manera que O es punto medio de $[X, Y]$.*

Demostración:

Para la existencia basta tomar el punto Y de manera que $(X, Y) = 2(X, O)$. La unicidad se razona como en la anterior proposición. □

Naturalmente, si $X = O$, se tomaría $Y = O$.

1.15. Simetrías centrales

Fijado O, según la proposición 1.3, a cada punto X del plano le asignamos otro X', único, tal que O es punto medio de X y X'. Este punto se conoce como **simétrico de X respecto de O**. La aplicación $X \mapsto X'$, que denotaremos por S_O, se llama **simetría central**, siendo O nombrado como **centro de la simetría**.

Tomando los vectores con origen en O, al multiplicar (O, X) por el número -1, se obtiene un vector (O, Y) cuyo extremo dista de O lo mismo que X, pero con sentido opuesto. Es claro que Y no puede ser otro que el simétrico $X' = S_O(X)$ de X. Esta observación justifica la escritura

$$(O, X') = -(O, X),$$

que es una *ecuación vectorial* de la simetría central, a la vez que permite usar el Teorema de Thales y sus consecuencias, adaptadas al caso del factor $\lambda = -1$. Con la definición de simetría y el citado teorema, se pueden demostrar las siguientes propiedades de las simetrías:

1. O se aplica sobre sí mismo y es el único con esta propiedad.
2. X y X' están alineados con O y a distintos lados del mismo.
3. Si aplicamos dos veces consecutivas una simetría central, cada X vuelve a su posición inicial, con lo cual (siendo I la aplicación identidad del plano), se tiene

$$S_O \circ S_O = I \Leftrightarrow (S_O)^{-1} = S_O.$$

4. Dados dos puntos X e Y, distintos entre sí y distintos de O, la recta $< X', Y' >$ que pasa por sus simétricos es paralela a la $< X, Y >$.

5. El simétrico de un vector no nulo (X, Y) es otro vector (X', Y') de igual módulo y dirección, pero de sentido opuesto.

6. Las simetrías centrales son **movimientos geométricos**, entendiendo por tales las trasformaciones que conservan la distancia entre puntos.

7. Las simetrías son **transformaciones afines**, es decir, cambian rectas en rectas, conservando, además, la posición relativa de sus puntos. En concreto, si una recta pasa por el centro, se transforma en sí misma, mientras que si no pasa por ese punto se transforma en otra recta disjunta y paralela a ella.

1.16. Equipolencia de vectores fijos

Se dice que el vector fijo (A, B) es **equipolente** al (C, D) cuando el punto medio del segmento $[A, D]$, que une el origen del primero con el extremo del segundo, coincide con el punto medio del segmento $[B, C]$ que une el extremo del primero con el origen del segundo. Lo denotamos como

$$(A, B) \equiv (C, D).$$

Proposición 1.4 $(A, B) \equiv (C, D) \Leftrightarrow (A, C) \equiv (B, D)$.

Demostración:

Basta aplicar la definición y observar que los segmentos $[B, C]$ y $[C, B]$ coinciden. □

Proposición 1.5 *Dos vectores nulos son equipolentes.*

Demostración:

Si en la definición ponemos $A = B$, $C = D$, los segmentos $[A, D]$ y $[B, C]$ son idénticos, luego comparten el punto medio. □

Siendo P el punto medio común de $[A, D]$ y $[B, C]$, de la definición de equipolencia se deduce que en la simetría S_P las parejas A, D y B, C se corresponden entre sí. Recíprocamente, si existe un punto P tal que $S_P(A) = D$, $S_P(B) = C$, entonces P es punto medio común de ambos segmentos, luego los vectores son equipolentes. Es decir,

Proposición 1.6 *Para que $(A, B) \equiv (C, D)$ es necesario y suficiente que exista un punto P tal que $S_P(A) = D$, $S_P(B) = C$.*

Proposición 1.7 *Dos vectores equipolentes tienen el mismo módulo, dirección y sentido.*

Demostración:

Supongamos $(A, B) \equiv (C, D)$. Si P es el punto medio de $[A, D]$ y $[B, C]$, puesto que $S_P(A, B) = (D, C)$, estos vectores son de igual módulo y dirección. Como (D, C) y (C, D) comparten dirección y módulo, lo mismo le pasará a (A, B) y (C, D). Si los vectores son no nulos, (A, B) tiene sentido opuesto al de su simétrico (D, C); éste, a su vez, tiene sentido opuesto al de (C, D), luego (A, B) y (C, D) son de igual sentido. $\square$

Si (C, D) es equipolente a (A, A), tendrá módulo nulo, luego $C = D$. Así completamos la proposición 1.4 de esta otra forma:

Proposición 1.8 *Para que un vector (C, D) sea equipolente a uno nulo (A, A) es necesario y suficiente que (C, D) también sea nulo.*

Proposición 1.9 *Dos vectores de igual módulo, dirección y sentido son equipolentes.*

Demostración:

1. Si el módulo común es 0, se trata de vectores nulos y por tanto equipolentes.
2. En caso contrario, sean (A, B) y (C, D) vectores de igual módulo, dirección y sentido, y sea P el punto medio de $[A, D]$. El simétrico B' de B mediante S_P está en la paralela a $< A, B >$ que pasa por $A' = D$. Como las rectas $< A, B >$ y $< C, D >$ son paralelas, esto quiere decir que $B' \in < C, D >$. El vector $(A', B') = (D, B')$ tiene sentido opuesto al de (A, B), luego también opuesto al de (C, D), o sea igual sentido que (D, C). Estando B' y C a un mismo lado de D, puesto que

$$d(C, D) = d(A, B) = d(A', B') = d(D, B'),$$

necesariamente es $B' = C$. Así, $S_P(A) = D$ y $S_P(B) = C$, y basta aplicar la proposición 1.6.

$\square$

Uniendo las proposiciones 1.7 y 1.9, llegamos al habitual **criterio de equipolencia**:

Proposición 1.10 *Para que dos vectores sean equipolentes es necesario y suficiente que tengan igual módulo, dirección y sentido.*

Proposición 1.11 *La equipolencia es una relación de equivalencia en el conjunto de los vectores fijos.*

Demostración:

Basta aplicar la proposición anterior, recordando que todas las igualdades son reflexivas, simétricas y transitivas. $\square$