# Principios de Análisis Matemático

E. Linés

EDITORIAL REVERTÉ

# Principios de **Análisis Matemático**

## E. Linés

Catedrático de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Nacional de Educación a Distancia.
Numerario de la Real Academia de Ciencias

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

**Principios de Anàlisis Matemático**



Edición en papel:
© Editorial Reverté S. A., 1991
ISBN 978-84-291-5072-8

Edición ebook (PDF):
© Editorial Reverté S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9267-4

*Propiedad de:*

**EDITORIAL REVERTE, S.A.**
Loreto 13-15 Local B
08029 Barcelona, España
Tel.: 93 419 33 36
reverte@reverte.com

# Prólogo

*La finalidad de este libro sobre «principios«, destinado a los estudiantes que inician el estudio del Análisis Matemático, es presentar las teorías básicas y los métodos propios de esta rama de la Matemática, que han de servir de fundamento y referencia a los que se dediquen al cultivo de esta ciencia, o a aquellos que usen de ella en las aplicaciones.*

*No es fácil precisar el contenido y los límites de una obra de esta naturaleza y mucho menos acertar en el estilo de su redacción, que ha de ser vivo y estimulante, aspirando a que su lectura sea más encuentro personal con una ciencia que información sobre una valiosa herencia cultural.*

*Por otra parte, estos textos de iniciación tienen características comunes que conviene tener presente y respetar. En primer lugar han de servir para ordenar los conocimientos y vivencias científicas que el lector haya adquirido y experimentado con anterioridad, y que es probable le inclinaran a seguir una vía de dedicación. Ha de ser también motivo de cuidadoso examen la selección de los temas de estudio, en la que primará el carácter básico sobre otras consideraciones de brillantez o gusto personal. Finalmente, como el método es lo que transforma en ciencia un conjunto de resultados y noticias de una determinada área del conocimiento y además le imprime un carácter abierto, es ineludible una presentación matemática, es decir, lógico-deductiva, de la teoría. El razonamiento y el fino ejercicio de la deducción lógica habrán de aparecer como una regla y un adiestramiento en el juego del descubrimiento matemático. En esta ciencia, como en ninguna otra, el estudiante no puede ser espectador, y sólo podrá asegurar que ha llegado al conocimiento de una teoría cuando la haya recreado tras una reflexión personal.*

*No es fácil escribir un texto de acuerdo con las características apuntadas, y toda posible redacción puede dar ocasión a juicios encontrados. Tanto en la selección de los temas como en su desarrollo, nos ha servido la experiencia directa universitaria. La mayoría de ellos han sido expuestos en lecciones ante los alumnos, cuyas observaciones se han tenido presentes al redactar el texto.*

*Tanto en la exposición de una teoría como en el desarrollo de un razonamiento matemático, es indispensable que el lector tenga una idea clara y precisa de los objetivos que se persiguen. A tal fin, se principia cada uno de los capítulos con una exposición detallada de los conceptos y proposiciones que se tratan en el mismo, pero con un estilo libre de instrumento lógico, buscando despertar una intuición matemática de las teorías abstractas.*

*Como indicábamos, siempre es discutible el alcance que se debe dar a un tratado de esta clase, y reconocemos nuestras dudas sobre el que le hemos dado. Hay capítulos que se podrían omitir en un primer estudio, así como algunos temas más especializados, aunque de gran contenido conceptual. De forma indicativa citamos algunos que podrían dejarse para una segunda lectura: Construcción efectiva del cuerpo real* R. *— Análisis arquimediano de los cuerpos. — Teoremas de extensión por continuidad. — Exponencial imaginaria y medida de ángulos. — Teorema de Lebesgue. — Límites en integrales impropias. — Permutabilidad del paso al límite. — Teorema de Schwarz, entre otros.*

*Al final de cada uno de los capítulos se han dispuesto colecciones de ejercicios relativos a la materia tratada, cuya resolución es complemento indispensable del estudio teórico.*

*Al terminar estas líneas introductorias es justo que dedique las últimas a agradecer a Editorial Reverté, S. A., su interés, buena acogida y cuidados que han puesto en la publicación de esta obra. Agradecimiento que hago extensivo a amigos, colegas y alumnos a los que tanto debo y de los que tanto he aprendido.*

E. LINÉS ESCARDÓ

# Índice analítico

## 18. Los teoremas del valor medio del Cálculo diferencial *335*



## 19. Fórmula de Taylor y aplicaciones *357*



## 20. La integral de Rieman *385*



## 21. Funciones integrables Riemann *411*

## 22. Los teoremas fundamentales del Cálculo integral *427*



## 23. Cálculo de primitivas *445*



## 24. Integrales impropias *491*



## 25. Sucesiones de funciones *517*

## 26. Series funcionales *545*



## 27. Series de potencias *559*



## 28. El espacio euclídeo $R^n$ *587*



## 29. Límites y continuidad de funciones entre espacios euclídeos *603*



## 30. Cálculo diferencial de funciones entre espacios euclídeos *623*

## 31. Integrales múltiples *661*



## Índice alfabético *693*

# Principios de Análisis Matemático

# 1. Elementos de la teoría de conjuntos

1. *Conjuntos.*
2. *Producto de dos conjuntos. Relaciones.*
3. *Relaciones de orden.*
4. *Aplicaciones.*
5. *Sucesiones.*
6. *Cardinalidad de conjuntos.*
7. *Ejercicios.*

Este primer capítulo es introductorio, y en él se recopilan los principios de la teoría elemental de conjuntos, que se supone conocida. El objeto es exponer en forma concisa las principales definiciones y propiedades de esta teoría, así como las notaciones más frecuentemente usadas. Por otra parte se supone que todas las propiedades referentes a los sistemas de números naturales, enteros y racionales son igualmente conocidas. No así la teoría del número real que será objeto de estudio detallado en los próximos capítulos.

A partir de las nociones de *conjunto* y *elemento*, se definen las operaciones de *unión*, *intersección*, *diferencia* y *paso al complemento*, así como sus propiedades (1.2, 1.4). Con la noción de *par ordenado*, se construye el *producto* de dos conjuntos, y a partir de éste se define el concepto básico de *relación* (2.3).

La relación de *equivalencia* (2.4) que es la más natural que se puede definir en un conjunto, origina en éste una *partición* asociada. Otra relación fundamental es la de *orden* (3), que interviene en todas las definiciones de convergencia en los principios del Análisis. Entre todos los tipos de ordenación, la *total* es la más simple (3.3), y de ella se dan algunos ejemplos notables. Anejas a la ordenación están las nociones de *cotas* y *extremos* (3.5, 3.6), de tal importancia, que sin ellas no se podría ni enunciar el *principio del extremo*, característico del cuerpo de los números reales.

El concepto de *aplicación* (4), que es un caso particular del de relación, se destaca con tal fuerza, pues es el objeto del estudio del Análisis, que en parte obscurece a los demás. Tanto la nomenclatura (5.2, 4.3), como la clasificación (4.4) se exponen con detalle, y se consideran igualmente las *restricciones* y *extensiones* (4.8) de una aplicación, y la *composición* de aplicaciones (4.7).

Una clase de aplicaciones, sin duda las primeras que se presentaron al análisis del matemático, son las *sucesiones*: aplicaciones de **N** en un conjunto (5). Aparte del interés intrínseco de las sucesiones, tienen un carácter instrumental en el estudio de otras aplicaciones más complicadas.

En los casos elementales, la *cardinalidad* de un conjunto (6) está definida por el número de sus elementos. En los casos más generales, Cantor define la igualdad del número cardinal de dos conjuntos, por la posibilidad de establecer una *coordinación*, es decir, una biyección (6.1), entre ambos. Entre los conjuntos *no finitos* (6.3), el más simple es **N**, y todos los conjuntos coordinables con él son los *numerables* (6.4). El conjunto **Q** de los números racionales es numerable (6.7).

## 1. CONJUNTOS

1.1. Se supondrán conocidos los principios de la teoría elemental de conjuntos. En este apartado y en los siguientes se expondrán en forma resumida, las principales definiciones y proposiciones de esta teoría, así como las notaciones más frecuentemente usadas.

Los *conjuntos* suelen designarse por letras mayúsculas: $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, y los *elementos* por letras minúsculas: $a, b, \ldots, x, y, \ldots$.

Para asegurar que " *$x$ es un elemento de $A$*", se escribe

$$x \in A.$$

La negación "*$x$ no es un elemento de $A$*", se escribe

$$x \notin A.$$

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos, se escribe

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A,$$

para expresar que $A$ es un *subconjunto* de $B$; es decir, que cada elemento $x \in A$ es un elemento de $B$.

Dos conjuntos $A$ y $B$ son *iguales* ($A = B$) si tienen los mismos elementos.

Si $A \subset B$ y $A \neq B$, es $A$ un subconjunto estricto de $B$.

La relación $\subset$ entre conjuntos es una *relación de orden*; es decir, si $A, B$ y $C$ son conjuntos, se tiene:

*a*) $A \subset A$.
*b*) Si $A \subset B$ y $B \subset A$ es $A = B$.
*c*) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ es $A \subset C$.

Si $A \subset B$, se dice que $A$ *está contenido en* $B$, o que $B$ contiene a $A$. La negación de $A \subset B$ se escribe $A \not\subset B$.

1.2. Dado un conjunto $X$ y una *propiedad* $P$ que poseen algunos (o todos, o ninguno) de los elementos de $X$, entonces queda determinado un *subconjunto* $A$ de $X$, *cuyos elementos son los que tienen la propiedad* $P$. Se escribe

$$A = \{x \in X : P(x)\} \quad \text{o} \quad \{x \in X \mid P(x)\}.$$

Si no hay ambigüedad, se puede prescindir del símbolo $X$, escribiendo simplemente $\{x : P(x)\}$.

Dadas dos propiedades $P$ y $Q$ que se refieren a elementos del mismo conjunto $X$, la igualdad

$$\{x \in X : P(x)\} = \{x \in X : Q(x)\}$$

también se expresa por

$$\forall x \in X, \quad P(x) \Leftrightarrow Q(x):$$

"*para todo $x$ de $X$ (o en $X$) la propiedad $P$ es equivalente a la $Q$*".

Si es

$$\{x \in X : P(x)\} \subset \{x \in X : Q(x)\},$$

esta relación también se expresa por

$$\forall x \in X, \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$$

"*para todo $x \in X$ (o en $X$) la propiedad $P$ implica a la $Q$*".

El *conjunto vacío* $\phi$, está definido por

$$\phi = \{x : x \neq x\},$$

que es un subconjunto de cualquier conjunto. El conjunto vacío no tiene elementos.

Se ha de distinguir entre el objeto $x$ y el conjunto cuyo único elemento es $x$, que se designa por $\{x\}$, y que a veces se denomina *singulete.* Esta notación se generaliza de manera natural; así, el conjunto cuyos únicos elementos son $x$ e $y$ es el par $\{x, y\}$ y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es el conjunto cuyos elementos son $x_1, \ldots, x_n$.

1.2. La *unión* de los dos conjuntos $A$ y $B$, que se designa por $A \cup B$, es

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\},$$

en donde la conjunción "o" no es excluyente.

La *intersección* de los dos conjuntos $A$ y $B$, que se designa por $A \cap B$, es

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$

Los conjuntos $A$ y $B$ son *disjuntos* si $A \cap B = \phi$; es decir, no tienen elementos comunes.

Estas definiciones se generalizan cuando se pasa de dos conjuntos a una colección $\mathcal{F}$ (finita o no) de conjuntos. Al escribir $A \in \mathcal{F}$, se indica que $A$ es un conjunto de la colección $\mathcal{F}$.

La *unión* de $\mathcal{F}$ es

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A \textit{ para algún } A \in \mathcal{F}\}.$$

La *intersección* de $\mathcal{F}$ es

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A \textit{ para cada } A \in \mathcal{F}\}.$$

Si $A$ y $B$ son dos conjuntos cualesquiera, el conjunto diferencia $A - B$ es

$$A - B = \{x : x \in A \quad \text{y} \quad x \notin B\},$$

a veces se lee "*A menos B*".

Cuando $A$ es un subconjunto de un $X$, el conjunto diferencia $A' = X - A$, se denomina frecuentemente "*complementario de A respecto de X*".

1.3. Los resultados siguientes son simples consecuencias de las definiciones:

a) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$
b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

que son las propiedades *conmutativas, asociativas* y *distributivas* de las operaciones $\cup$ e $\cap$, válidas cualesquiera que sean los conjuntos $A$, $B$ y $C$.

Si $A$ es un conjunto cualquiera, son evidentes los resultados:

d) $A = A \cup A, \quad A = A \cap A.$
e) $\phi \cup A = A, \ \phi \cap A = \phi.$

Las propiedades distributivas c) se generalizan cuando se trata de una colección $\mathcal{F}$ de conjuntos:

$$A \cup \left( \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B \right) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} (A \cup B), \quad A \cap \left( \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} (A \cap B).$$

Finalmente, se suelen llamar *relaciones de Morgan* las siguientes:

f) $X - \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} (X - B), \quad X - \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} (X - B),$

que en el caso particular de contener $X$ a todos los conjuntos de la colección $\mathcal{F}$, utilizando la notación de los complementarios, se escriben:

g) $\left( \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B \right)' = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B', \qquad \left( \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right)' = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B'.$

## 2. PRODUCTO DE DOS CONJUNTOS. RELACIONES

2.1. Un *par ordenado* $(x, y)$, consta de dos objetos $x$ e $y$ (sin excluir que sea $x = y$) y se distingue uno de ellos como *primero* del otro que es el *segundo.* En el par ordenado $(x, y)$, el primer elemento $x$ se denomina también primera componente, proyección o coordenada, y el segundo elemento $y$ es la segunda componente, proyección o coordenada.

La relación de igualdad $(x, y) = (x', y')$ entre pares ordenados, equivale a $x = x'$ e $y = y'$.

Si $A$ y $B$ son conjuntos, $A \times B$ *es el conjunto de todos los pares* $(a, b)$, donde $a \in A$ y $b \in B$. El conjunto $A \times B$ se denomina *producto cartesiano* de $A$ por $B$, o simplemente *producto* de $A$ por $B$.

Los siguientes resultados son consecuencia de la definición:

*a*) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$.
$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$

b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

2.2. Es conveniente considerar como iguales los conjuntos $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$, identificando el elemento $(a, (b, c))$ de $A \times (B \times C)$ con el elemento $((a, b), c)$ de $(A \times B) \times C$. Hecha esta identificación, al definir el producto cartesiano de un número finito de conjuntos, se puede prescindir de los paréntesis. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos, los elementos del producto $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ son las *n-tuplas* ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $a_i \in A_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.3. **Definición:** *Una relación* $\mathcal{R}$ *entre los conjuntos* $X$ *e* $Y$, *está definida por tres elementos: el conjunto* $X$, *el conjunto* $Y$, *y un subconjunto cualquiera* $G \subset X \times Y$; *es decir,* $\mathcal{R} = \{X, Y, G\}$.

El conjunto $G \subset X \times Y$ se denomina *grafo* de la relación $\mathcal{R}$.

La *primera proyección* del grafo es el conjunto $G_1 \subset X$ cuyos elementos son los primeros $x$ de los pares $(x, y) \in G$; y análogamente la *segunda proyección* del grafo es el conjunto $G_2 \subset Y$ cuyos elementos son los segundos $y$ de los pares $(x, y) \in G$.

Si $(x, y) \in G$, se dice que el par $(x, y)$ *pertenece a la relación* $\mathcal{R}$, y también se escribe $x \mathcal{R} y$.

Una relación $\mathcal{R}$ entre el conjunto $X$ y el mismo $X$, se dice que es una *relación definida en* X. En este caso $\mathcal{R} = \{X, G\}$, donde $G \subset X \times X$, o $G \subset X^2$.

2.4. **Definición:** *Una relación de equivalencia* $\mathcal{E}$ *definida en* $X$, *es una relación* $\mathcal{E} = \{X, G\}$ *que tiene las siguientes propiedades.*

a) *Si* $x \in X$ *es* $(x, x) \in G$, (*reflexiva*).
b) *Si* $(x, y) \in G$ *es* $(y, x) \in G$, (*simétrica*).
c) *Si* $(x, y) \in G$ *e* $(y, z) \in G$ *es* $(x, z) \in G$, (*transitiva*).

**Definición:** *Una partición de un conjunto* $X$, *es una colección* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos* $B \subset X$ *tal que:*

a) *Dos conjuntos cualesquiera de* $\mathcal{F}$ *son disjuntos.*
b) *La unión de los conjuntos de* $\mathcal{F}$ *es* $X$:

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = X$$

Entre las relaciones de equivalencia definidas en un conjunto $X$, y las particiones de $X$ hay una correspondencia biunívoca, que se establece por medio de las *clases de equivalencia.*

En la relación de equivalencia $\mathscr{E} = \{X, G\}$ la clase de equivalencia que contiene el elemento $a \in X$, es

$$X_a = \{x \in X : (a, x) \in G\}.$$

**Proposición:** *Una relación de equivalencia definida en un conjunto $X$, determina una partición de $X$, cuyas partes son las clases de equivalencia. Recíprocamente, toda partición de $X$ da lugar a una relación de equivalencia, en la que el conjunto de las clases de equivalencia coincide con la partición.*

Si $\mathscr{E}$ es la relación de equivalencia, el conjunto de las clases de equivalencia, se denomina conjunto *cociente* de $X$ respecto de la relación $\mathscr{E}$ y se designa por

$$\frac{X}{\mathscr{E}}.$$

## 3. RELACIONES DE ORDEN

3.1. Entre las relaciones que se pueden definir en un conjunto $X$ las de orden son de especial interés.

**Definición:** *Una relación de orden en un conjunto $X$ es una relación $\mathscr{O} = \{X, G\}$ que tiene las siguientes propiedades.*

a) *Si $x \in X$ es $(x, x) \in G$.*
b) *Si $(x, y) \in G$ e $(y, x) \in G$ es $x = y$.*
c) *Si $(x, y) \in G$ e $(y, z) \in G$ es $(x, z) \in G$.*

Ordinariamente se emplea el símbolo $\leqslant$ para la relación de orden, y se escribe $x \leqslant y$ en vez de $(x, y) \in G$. Con esta notación las propiedades anteriores tienen la siguiente forma.

a) Si $x \in X$ es $x \leqslant x$ (*reflexiva*).
b) Si $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ es $y = x$ (*antisimétrica*).
c) Si $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ es $x \leqslant z$ (*transitiva*).

A veces se escribe $y \geqslant x$ en vez de $x \leqslant y$. Las dos formas de escritura se consideran equivalentes.

Un conjunto en el que se ha definido una relación de orden es un *conjunto ordenado.*

3.2. Al prescindir de la condición b) de antisimetría en la relación de orden se obtiene la de preorden.

Una *relación de preorden* en un conjunto $X$, es una relación reflexiva y transitiva.

Conservando la notación $\leqslant$, en una relación de preorden en $X$, pueden existir elementos distintos $x, y \in X$, para los que simultáneamente sea $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$. Desde el punto de vista de la relación $\leqslant$, estos elementos son equivalentes, y se puede definir en X una equivalencia $\mathcal{E}$ por la siguiente condición: *Dos elementos $x, y \in X$ son equivalentes en $\mathcal{E}$ cuando simultáneamente es $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$.*

**Proposición:** *Toda relación de preorden en X, determina una relación de orden en $\frac{X}{\mathcal{E}}$. Para dos clases $X_a, X_b \in \frac{X}{\mathcal{E}}$, es $X_a \leqslant X_b$ si, y sólo si, $a \leqslant b$.*

3.3. Una relación de orden, que verifica además de las a), b) y c) la propiedad:

d) Para cada dos $x, y \in X$ es $x < y$, o $x = y$, o $y < x$ (*tricotomia*), es una relación de *orden total.*

En contraposición, el orden antes definido, se denomina a veces *orden parcial.* En este caso, dos elementos $x, y \in X$, pueden ser *comparables,* cuando, al menos se verifica una de las condiciones $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$; o *no ser com parables,* cuando no se verifica ninguna de ellas.

El orden total, también se denomina *orden lineal.*

3.4. Sea $X$ un conjunto ordenado. Un elemento $m \in E$ es el *mínimo* de $X$ si es $m \leqslant x$, para todo $x \in X$. Un elemento $M \in X$ es el *máximo* de $X$ si es $x \leqslant M$, para todo $x \in X$.

El mínimo y el máximo son elementos de $X$, cuando existen.

De ordinario no existen en $X$ mínimo ni máximo.

3.5. **Definición:** *Sea $X$ un conjunto ordenado y $A$ un subconjunto de X. Un elemento $k \in X$ es una cota inferior de $A$ si es $k \leqslant x$, para todo $x \in A$. Un elemento $K \in X$ es una cota superior de $A$ si es $x \leqslant K$, para todo $x \in A$.*

Se dice que $A$ está *acotado inferiormente* en X, si existe, al menos, una cota inferior de $A$; y que $A$ está *acotado superiormente* en X, si existe, al menos, una cota superior de $A$. Si existen las dos cotas, se dice simplemente que el conjunto $A$ está *acotado* en $X$.

La propiedad de estar acotado un conjunto $A$, no depende sólo de $A$, sino del conjunto $X$ en el que está contenido.

3.6. **Definición:** *Sea $X$ un conjunto ordenado y $A$ un subconjunto de $X$. Un elemento $\omega \in X$ es el extremo superior, o supremo, de $A$ en $X$, si $\omega$ es el mínimo de las cotas superiores de $A$ en $X$.*

Se escribe,

$$\omega = \text{ext. sup}_X A, \qquad \omega = \sup_X A, \qquad \text{o} \qquad \omega = \sup A$$

cuando se sobreentiende cuál es el conjunto $X$ que contiene a $A$.

**Definición:** *Un elemento $\alpha \in X$ es el extremo inferior o ínfimo de $A$ en $X$, si $\alpha$ es el máximo de las cotas inferiores de $A$ en $X$.*

Se escribe,

$$\alpha = \text{ext. inf}_X A, \qquad \alpha = \inf_X A, \qquad \text{o} \qquad \alpha = \inf A$$

cuando se sobreentiende cuál es el concepto $X$ que contiene a $A$.

De ordinario no existen en $X$ ínfino ni supremo de $A \subset X$.

3.7. Cuando el conjunto $X$ está totalmente ordenado, las definiciones de ínfimo y supremo de un subconjunto $A \subset X$ se simplifican. Un $\alpha \in X$ es *ínfimo de $A$ en $X$* si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones:

a) *Para todo $x \in A$ es $\alpha \leqslant x$.*
b) *Para todo $\alpha' \in X$, que sea $\alpha < \alpha'$ existe algún $x' \in A$ tal que es $x' < \alpha'$.*

Análogamente, un $\omega \in X$ es *supremo de $A$ en $X$* si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones:

a) *Para todo $x \in A$ es $x \leqslant \omega$.*
b) *Para todo $\omega' \in X$, que sea $\omega' < \omega$, existe algún $x' \in A$ tal que es $\omega' < x'$.*

*Ejemplo 1.* — Era ya conocido por los matemáticos griegos, que no existen números racionales cuyo cuadrado es igual a 2. Este caso es una muestra de la insuficiencia de los racionales, que se manifiesta en el hecho de que existen conjuntos acotados de números racionales para los que no existe ningún racional que sea supremo del conjunto ni ninguno que sea ínfimo.

El conjunto $X = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geqslant 0,\ x^2 < 2\}$ no posee supremo en $\mathbf{Q}$, y el conjunto $Y = \{x \in \mathbf{Q} \mid x > 0,\ x^2 > 2\}$ no posee ínfimo en $\mathbf{Q}$.

Evidentemente $x = 2$ es una cota superior de $X$, y $x = 1$ es una cota inferior de $Y$.

En primer lugar, no existe un racional $\dfrac{p}{q}$ tal que $\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 = 2$ o bien $p^2 = 2\,q^2$; ya que en la descomposición en factores primos de los dos miembros de la igualdad, el factor 2 aparece un número par de veces en el primer miembro y un número impar en el segundo.

Si existiera un $\omega > 0$ racional que fuera $\omega = \sup_{\mathbf{Q}} X$, como $\omega^2 \neq 2$, sería $\omega^2 < 2$, o bien $\omega^2 > 2$.

El primer caso no puede darse, pues tomando un $r < 1$ racional, tal que $0 < r < \dfrac{2 - \omega^2}{2\,\omega + 1}$, se tendría

$$(\omega + r)^2 = \omega^2 + 2\,\omega r + r^2 < \omega^2 + (2\,\omega + 1)\,r < \omega^2 + 2 - \omega^2 = 2,$$

por lo que $\omega$ no sería el supremo de $X$.

Tampoco puede darse el segundo caso, pues tomando un racional $r$ tal tal que $0 < r < \dfrac{\omega^2 - 2}{2\,\omega}$, se tendría

$$(\omega - r)^2 = \omega^2 - 2\,r\omega + r^2 > \omega^2 - 2\,r\omega > \omega^2 - \omega^2 + 2 = 2,$$

por lo que $\omega - r$ sería también una cota superior de $X$ y $\omega$ no sería el supremo de $X$.

El mismo razonamiento prueba que no existe en $\mathbf{Q}$ un infinito de $Y$.

El ejemplo siguiente se refiere a la determinación de un supremo y un ínfimo en la ordenación por inclusión de una colección de conjuntos.

*Ejemplo* 2. — Dado el cuadrado $I = [0,1] \times [0,1]$ del plano ordinario $\mathbf{R}^2$, sea $X$ el conjunto de las partes (o subconjuntos) de $I$. Se considera en $X$ la ordenación parcial por la inclusión $\subset$.

Con $A$ se designa el conjunto de todos los círculos abiertos (sin borde) de radio $\dfrac{1}{4}$, contenidos en $I$.

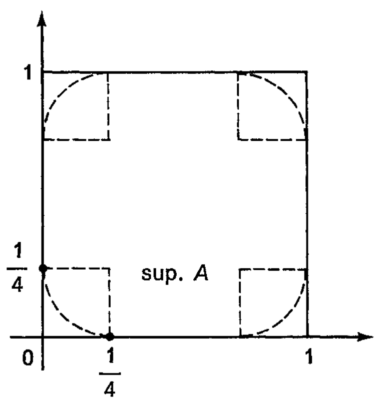
Cotas triviales superior e inferior de $A$ son el cuadrado $I$, y el vacío $\phi$.

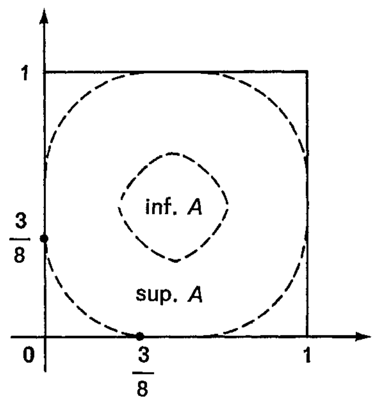
Otras cotas más interesantes son la unión y la intersección de la colección de círculos $\gamma \in A$, pues precisamente son el supremo y el ínfimo de la colección $A$:

$$\sup A = \bigcup_{\gamma \in A} \gamma, \qquad \inf A = \bigcap_{\gamma \in A} \gamma.$$

El $\sup A$ es la figura plana abierta (sin borde) obtenida al sustituir en $I$ los cuadrados en los vértices de lado $\dfrac{1}{4}$ por cuadrantes circulares. El $\inf A$ es el conjunto vano.

Manifiestamente, ni $\sup A$ ni $\inf A$ pertenecen a $A$, que no posee ni máximo ni mínimo.

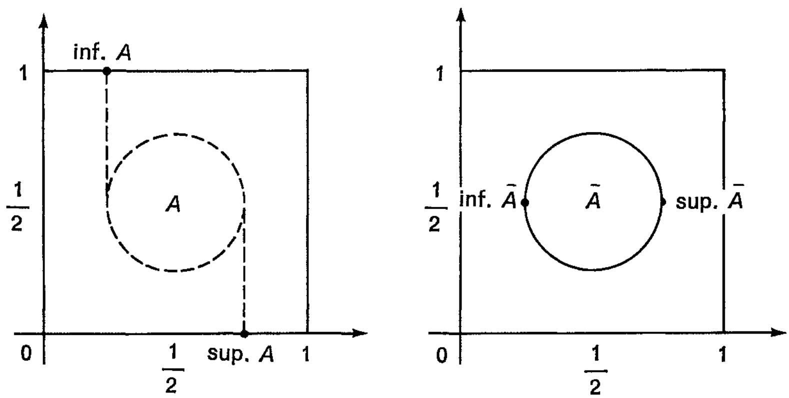


Si en este ejemplo se hubieran considerado los círculos abiertos $\gamma$ de radio $\frac{3}{8}$ contenidos en $I$, el $\sup A$ sería una figura abierta análoga a la anterior, obtenida al sustituir en $I$ los cuadrados en los vértices de lado $\frac{3}{8}$ por cuadrantes circulares. Sin embargo el $\inf A$ es totalmente distinto, pues se trata de una figura plana sin borde, limitada por cuatro arcos de circunferencia. En este caso, tampoco el $\sup A$ y el $\inf A$ son máximo ni mínimo.

En los ejemplos anteriores los supremos e ínfimos aparecen de una manera espontánea e intuitiva. No siempre es así. A continuación se exponen, en una ordenación total, situaciones sorprendentes de dichos extremos.

*Ejemplo 3.* — En el conjunto de puntos $(x, y)$ del cuadrado $I = [0,1] \times [0,1]$ se define la ordenación *lexicográfica*. Para cada par de puntos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2) \in I$ es: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ cualesquiera que sean $y_1$ e $y_2$, y si $x_1 = x_2$ cuando $y_1 < y_2$. Se complementa esta definición poniendo $(x_1, y_1) \leqslant (x_2, y_2)$, si $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ o si $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.




Sea $A$ el conjunto de puntos del círculo abierto de centro el de $I$ y radio $\frac{1}{4}$.

Este conjunto está acotado, pues aparte de las cotas triviales (0, 0) inferior y (1, 1) superior, cualquier punto $(x, y) \in I$ con $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}$ es una cota inferior de $A$, y cualquier $(x, y)$ con $\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$ es una cota superior de $A$.

El ínfimo de $A$ es precisamente $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, y el supremo $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

Estos extremos no pertenecen a $A$ que no posee ni mínimo ni máximo. Si el círculo fuera cerrado $\bar{A}$ (con borde), se tendría

$$\inf \bar{A} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad \sup \bar{A} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

que como pertenecientes a $\bar{A}$, serían el mínimo y el máximo.

## 4. APLICACIONES

4.1. **Definición:** *Dados dos conjuntos $X$ e $Y$, un grafo $F$ de una relación $\mathcal{R} = \{X, Y, F\}$ es funcional si cumple las condiciones siguientes:*

a) *Los primeros elementos de todos los pares $(x, y) \in F$, forman un conjunto que coincide con $X$.*

b) *No existen en $F$ pares que tengan el mismo primer elemento*; es decir, *si $(x, y) \in F$ y $(x, y') \in F$ es $y = y'$.*

Una *aplicación* de $X$ en $Y$, es una relación entre $X$ e $Y$, en la que el grafo es funcional.

Como el concepto de aplicación tiene gran importancia, conviene dar una definición directa del mismo.

**Definición:** *Una aplicación $f$ de $X$ en $Y$, es una terna $\{X, Y, F\}$ en la que $F$ es una parte del producto cartesiano $X \times Y$, que cumple las condiciones:*

a) *Para todo $x \in X$, existe al menos un par $(x, y) \in F$.*

b) *No existen pares distintos en $F$ que tengan el mismo primer elemento.*

El conjunto $X$ que coincide con la primera proyección del grafo $F$ se denomina *dominio de la aplicación $f$* o *conjunto de partida.*

La segunda proyección de $F$ se denomina *recorrido, codominio* o *conjunto de llegada* de la aplicación $f$.

De acuerdo con la definición es

$$\textit{dominio } f = X \quad \text{y} \quad \textit{recorrido } f \subset Y.$$

Para designar una aplicación $f$ de $X$ en $Y$, son de uso frecuente las notaciones

$$f : X \to Y \quad \text{o} \quad X \xrightarrow{f} Y,$$

que se leen "*$f$ aplica $X$ en $Y$*".

Si en la aplicación $f = \{X, Y, F\}$ es $(x, y) \in F$, se dice que al elemento $x \in X$ le corresponde en $f$ el $y \in Y$, y este elemento se suele denotar por $f(x)$, que se lee "*$f$ de $x$*". Para indicar que al elemento $x$ le corresponde el $y = f(x)$, también se escribe

$$x \mapsto y = f(x) \quad \text{o} \quad x \mapsto f(x).$$

Este simbolismo puede emplearse para designar una aplicación, cuando se suponen conocidos el dominio $X$ de la misma, y el conjunto $Y$ que contiene al recorrido.

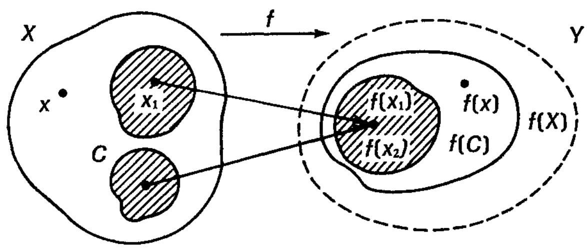
4.2. En vez del nombre de aplicación se usa frecuentemente el clásico de *función*, y se dice que $f$ *define una función en* $X$, *a valores de* $Y$.

El conjunto $X$ se denomina también, *dominio de la función* o *campo de definición de la función*.

Los nombres de aplicación y función se consideran como sinónimos y en Análisis, en particular, es muy frecuente el uso del segundo término.

4.3. En una aplicación $f : X \to Y$, a cada $x \in X$ le corresponde un solo $y \in Y$, que es la *imagen de* $x$ *en la aplicación* $f$. Si $C \subset X$, el subconjunto de $Y$ formado por todas las imágenes de los elementos $x \in C$, es la *imagen de* $C$ *en la aplicación* $f$, que se representa por $f(C)$.

En particular, *el recorrido de la aplicación* $f$: $X \to Y$ *es* $f(X)$.




*Aplicación* $f$ *de* $X$ *en* $Y$. *Imagen de* $C$ *por* $f$.

En una aplicación $f : X \to L$, la *antiimagen de un* $y \in Y$ es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $f(x) = y$. Se designa por $f^{-1}(y)$, y en consecuencia

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Aunque según esta definición, la antiimagen de un $y \in Y$ es un conjunto, cuando éste conste de un solo elemento, se identificará con tal elemento y se escribirá $x = f^{-1}(y)$.

La definición de antiimagen de un elemento $y$, se generaliza al caso de un conjunto:

En una aplicación $f : X \to Y$, la *antiimagen de un* $D \subset Y$, es el subconjunto de $X$, unión de todas las antiimágenes de los elementos $y \in D$:

$$f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in D\}.$$

Es frecuente denominar a la antiimagen, *imagen inversa*.

*Ejemplo.* Si en el conjunto $X$ está definida una relación de equivalencia

$\mathcal{E}$, la aplicación de $X$ en $\frac{X}{\mathcal{E}}$, en la que a cada $a \in X$ le corresponde la clase de equivalencia $X_a \in \frac{X}{\mathcal{E}}$, se denomina *aplicación natural.*

En esta aplicación la antiimagen de una clase de equivalencia es ella misma.

4.4. Atendiendo a propiedades simples del recorrido y del grafo de cada aplicación, se obtiene una clasificación general de las aplicaciones.

*Una aplicación $f: X \rightarrow Y$, en la que el recorrido $f(X)$ coincide con el conjunto $Y$, es exhaustiva.* La aplicación $f$ "*aplica X sobre Y*", por lo que a veces se dice que $f$ es una aplicación "*sobre*" o *sobreyectiva.*

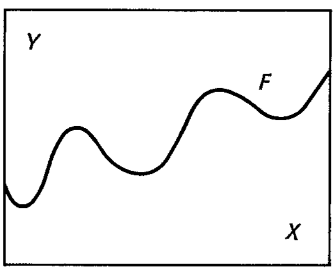
En las aplicaciones exhaustivas *todo $y \in Y$ es imagen de un $x \in X$ por lo menos.*

*Una aplicación $f: X \rightarrow Y$, en la que para todo par $x', x'' \in X$ de elementos distintos, también $f(x') \neq f(x'')$, es inyectiva.* También se dice que $f$ es una *inyección.*

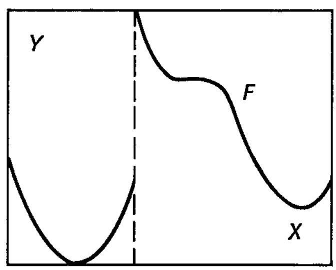
*Una aplicación $f: X \rightarrow Y$, en la que todo elemento $y \in Y$ es imagen de uno y un solo elemento $x \in X$, es biyectiva.* También se dice que $f$ es una *biyección.*

En consecuencia la aplicación $f$ es biyectiva, si es exhaustiva e inyectiva.

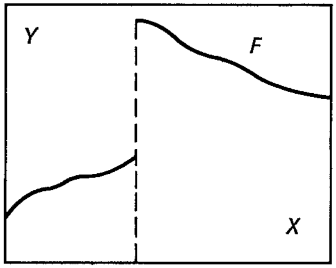
*Ejemplo.* En la figura siguiente se presentan esquemas de los distintos



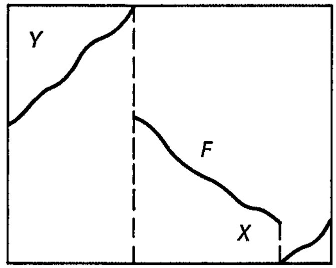

*Aplicación $f: X \rightarrow Y$*




*Aplicación $f: X \rightarrow Y$ exhaustiva*




*Aplicación $f: X \rightarrow Y$ inyectiva*




*Aplicación $f: X \rightarrow Y$ biyectiva* tipos de aplicaciones $f = \{X, Y, F\}$.

4.5. De acuerdo con las definiciones anteriores, el que en la aplicación $f : X \to Y$ cada una de las antiimágenes de los elementos $y \in f(X)$ tenga *un solo* elemento $x \in X$, equivale a que la aplicación $f$ es *inyectiva*; y el que cada uno de los elementos $y \in Y$ tenga una antiimagen *no vacía*, equivale a que la aplicación $f$ es *exhaustiva*.

Para las aplicaciones biyectivas, y sólo para éstas, tiene sentido el concepto de aplicación *inversa*.

**Definición:** *Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva. El conjunto de todos los pares $(y, x)$ obtenidos invirtiendo los $(x, y)$ de la aplicación $f$, define una aplicación de $Y$ sobre $X$ que se denomina inversa de la $f$.*

Además, *la aplicación inversa $f^{-1} : Y \to X$ es también biyectiva.* Consecuencia de ser biyectivas tanto $f$ como $f^{-1}$ son las siguientes igualdades:

$$x = f^{-1}(f(x)) \quad \text{para todo} \quad x \in X$$

$$y = f(f^{-1}(y)) \quad \text{para todo} \quad y \in Y.$$

4.5. En el caso de tratarse de aplicaciones cualesquiera, son útiles y de uso frecuente las siguientes fórmulas.

*Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Para todo $C \subset X$ es $C \subset f^{-1}(f(C)$; y para todo $D \subset Y$ es $f(f^{-1}(D)) \subset D$.*

La primera inclusión resulta del hecho de que si $x \in C$, $f(x) \in Y$, por lo que $x$ pertenece a la antiimagen de $f(x)$, o sea $x \in f^{-1}(f(x))$. Como este resultado es cierto para todo $x \in C$, se tiene $C \subset f^{-1}(f(C))$.

La segunda inclusión resulta análogamente. Si $y \in D$ es $f^{-1}(y) \in X$, y por la definición de antiimagen $f(f^{-1}(y)) = y$, o bien $f(f^{-1}(y)) = \phi$ cuando $y \notin f(X)$. En todo caso es $f(f^{-1}(y)) \subset \{y\}$ para todo $y \in D$, en donde $f(f^{-1}(D)) \subset D$.

De este mismo razonamiento resulta:

*Para todo $D \subset Y$ es $f(f^{-1}(D)) = D \cap f(X)$.*

Por otra parte, *si $f : X \to Y$ es biyectiva, para todo $C \subset X$ es $C = f^{-1}(f(C))$, y para todo $D \subset Y$ es $f(f^{-1}(D)) = D$.*

4.7. **Definición:** *Sean las aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, en las que el recorrido de $f$ está contenido en el dominio de $g$, es decir $f(X) \subset Y$. La aplicación compuesta de $f$ y $g$, que se escribe $g \circ f$, es una aplicación $g \circ f : X \to Z$, en la que a cada $x \in X$ le corresponde $z = g(f(x)) \in Z$.*

También se puede decir, que si $F$ y $G$ son los grafos de $f$ y $g$ respectivamente, el grafo de la aplicación $g \circ f$ es

$$G \circ F = \{(x, z) \in X \times Z : (x, y) \in F, \ (y, z) \in G\}.$$