

Principios de **Análisis Matemático**

E. Linés

EDITORIAL REVERTÉ

Principios de **Análisis Matemático**

E. Linés

Catedrático de Análisis Matemático de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Nacional de Educación a Distancia.
Numerario de la Real Academia de Ciencias



**EDITORIAL
REVERTÉ**

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Principios de Anàlisis Matemàtico

Copyright © Enrique Linés Escardó

Edición en papel:

© Editorial Reverté S. A., 1991

ISBN 978-84-291-5072-8

Edición ebook (PDF):

© Editorial Reverté S. A., 2021

ISBN 978-84-291-9267-4

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTE, S.A.

Loreto 13-15 Local B

08029 Barcelona, España

Tel.: 93 419 33 36

reverte@reverte.com

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso del editor.

Prólogo

La finalidad de este libro sobre «principios», destinado a los estudiantes que inician el estudio del Análisis Matemático, es presentar las teorías básicas y los métodos propios de esta rama de la Matemática, que han de servir de fundamento y referencia a los que se dediquen al cultivo de esta ciencia, o a aquellos que usen de ella en las aplicaciones.

No es fácil precisar el contenido y los límites de una obra de esta naturaleza y mucho menos acertar en el estilo de su redacción, que ha de ser vivo y estimulante, aspirando a que su lectura sea más encuentro personal con una ciencia que información sobre una valiosa herencia cultural.

Por otra parte, estos textos de iniciación tienen características comunes que conviene tener presente y respetar. En primer lugar han de servir para ordenar los conocimientos y vivencias científicas que el lector haya adquirido y experimentado con anterioridad, y que es probable le inclinaran a seguir una vía de dedicación. Ha de ser también motivo de cuidadoso examen la selección de los temas de estudio, en la que primará el carácter básico sobre otras consideraciones de brillantez o gusto personal. Finalmente, como el método es lo que transforma en ciencia un conjunto de resultados y noticias de una determinada área del conocimiento y además le imprime un carácter abierto, es ineludible una presentación matemática, es decir, lógico-deductiva, de la teoría. El razonamiento y el fino ejercicio de la deducción lógica habrán de aparecer como una regla y un adiestramiento en el juego del descubrimiento matemático. En esta ciencia, como en ninguna otra, el estudiante no puede ser espectador, y sólo podrá asegurar que ha llegado al conocimiento de una teoría cuando la haya recreado tras una reflexión personal.

No es fácil escribir un texto de acuerdo con las características apuntadas, y toda posible redacción puede dar ocasión a juicios encontrados. Tanto en la selección de los temas como en su desarrollo, nos ha servido la experiencia directa universitaria. La mayoría de ellos han sido expuestos en lecciones ante los alumnos, cuyas observaciones se han tenido presentes al redactar el texto.

Tanto en la exposición de una teoría como en el desarrollo de un razonamiento matemático, es indispensable que el lector tenga una idea clara y precisa de los objetivos que se persiguen. A tal fin, se principia cada uno de los capítulos con una exposición detallada de los conceptos y proposiciones que se tratan en el mismo, pero con un estilo libre de instrumento lógico, buscando despertar una intuición matemática de las teorías abstractas.

Como indicábamos, siempre es discutible el alcance que se debe dar a un tratado de esta clase, y reconocemos nuestras dudas sobre el que le hemos dado. Hay capítulos que se podrían omitir en un primer estudio, así como algunos temas más especializados, aunque de gran contenido conceptual. De forma indicativa citamos algunos que podrían dejarse para una segunda lectura: Construcción efectiva del cuerpo real \mathbb{R} . — Análisis arquimediano de los cuerpos. — Teoremas de extensión por continuidad. — Exponencial imaginaria y medida de ángulos. — Teorema de Lebesgue. — Límites en integrales impropias. — Permutabilidad del paso al límite. — Teorema de Schwarz, entre otros.

Al final de cada uno de los capítulos se han dispuesto colecciones de ejercicios relativos a la materia tratada, cuya resolución es complemento indispensable del estudio teórico.

Al terminar estas líneas introductorias es justo que dedique las últimas a agradecer a Editorial Reverté, S. A., su interés, buena acogida y cuidados que han puesto en la publicación de esta obra. Agradecimiento que hago extensivo a amigos, colegas y alumnos a los que tanto debo y de los que tanto he aprendido.

E. LINÉS ESCARDÓ

Índice analítico

1. Elementos de la teoría de conjuntos 1

1. Conjuntos 2
2. Producto de dos conjuntos. Relaciones 4
3. Relaciones de orden 6
4. Aplicaciones 11
5. Sucesiones 15
6. Cardinalidad de conjuntos 16
7. Ejercicios 20

2. Sucesiones convergentes y fundamentales 23

1. Límite de una sucesión 25
2. Límites infinitos 29
3. Propiedades aritméticas de los límites 31
4. Transformaciones lineales que conservan la convergencia en las sucesiones 34
5. Sucesiones fundamentales 38
6. Cuerpos completos 40
7. Ejercicios 41

3. Método de Cantor para completar un cuerpo ordenado 45

1. El anillo de las sucesiones fundamentales 46
2. Sucesiones nulas, positivas y negativas 48
3. Equivalencia de sucesiones fundamentales. Cuerpo cociente 51
4. Ordenación del cuerpo cociente 57
5. Teorema de completitud 60

4. El cuerpo de los números reales 63

1. Cuerpos arquimedianos 64
2. Definición de cuerpo de números reales 66
3. Teorema de unicidad 66
4. Teorema del extremo 70
5. Axiomas de los números reales 73
6. Ejercicios 75

5. La recta real 79

1. Axiomas de la recta real 80
2. Intervalos, entornos y conjuntos abiertos 82
3. Estructura de los conjuntos abiertos en la recta real 87
4. Puntos de acumulación y adherentes 89
5. Conjuntos cerrados 91
6. Axiomática de los abiertos 93
7. Ejercicios 94

6. Los teoremas de la topología de la recta real 97

1. Dos teoremas de existencia 98
2. No numerabilidad de la recta real 100
3. Teorema de recubrimiento 101
4. Conjuntos compactos 103
5. La recta real ampliada 105
6. Sucesiones. Valores adherentes y límites 108
7. Ejercicios 112

7. Límites de potencias y logaritmos 115

1. Potencias de base el número e 116
2. Logaritmos neperianos 121
3. Potencias de base de un número positivo 123
4. Límites de sucesiones de potencias y logaritmos 124
5. Límites de algunas sucesiones notables 128
6. Ejercicios 129

8. El cuerpo de los números complejos 123

1. Definición del cuerpo de los números complejos 135
2. Raíces cuadradas de los números complejos 138
3. Números complejos conjugados 139
4. Valoración del cuerpo de los números complejos 140
5. El grupo de los complejos de módulo uno 141
6. Ángulos y argumentos 143
7. Sucesiones convergentes y fundamentales 145
8. Ejercicios 148

9. Series numéricas 151

1. Definición de serie 152
2. Convergencia de series 154

3. Series de términos positivos 158
4. Criterios del cociente y de la raíz 162
5. Series de términos positivos decrecientes 165
6. Series alternadas 168
7. Ejercicios 170

10. Convergencia absoluta y producto de series 173

1. Convergencia absoluta 174
2. Reordenación de series 176
3. Convergencia de la suma de series 179
4. Convergencia del producto de series 180
5. La serie exponencial 185
6. Ejercicios 188

11. Límites de funciones 191

1. Funciones 192
2. Límite de una función en un punto 194
3. Definición general del límite 202
4. Límites laterales 206
5. Propiedades generales de los límites 209
6. Propiedades aritméticas de los límites 211
7. Límites de las funciones polinómicas y racionales 215
8. Ejercicios 218

12. Continuidad 221

1. Continuidad de una función en un punto 222
2. Definición general de continuidad local 224
3. Continuidad por la derecha y por la izquierda en un punto 226
4. Operaciones aritméticas con funciones continuas 227
5. Funciones continuas en un conjunto 228
6. Ejercicios 232

13. Los teoremas de la continuidad 235

1. Teorema de conservación de la compacidad 236
2. Teorema de conservación de la conexión 238
3. Teorema de la continuidad uniforme 241

4. Aplicación al «teorema fundamental del Álgebra» 244
5. Ejercicios 247

14. Funciones monótonas 251

1. Monotonía global y local 252
2. Límites de las funciones monótonas 257
3. Extensión por continuidad de una función monótona 259
4. Ejercicios 263

15. Funciones elementales 265

1. Funciones elementales 267
2. Funciones lineales 267
3. La función cuadrática y su inversa 269
4. Otras potencias de exponente fraccionario 271
5. Funciones exponenciales 275
6. Funciones logarítmicas 279
7. Funciones potenciales 281
8. Ejercicios 284

16. Funciones circulares 287

1. La serie exponencial 289
2. La serie exponencial imaginaria 292
3. Las funciones coseno y seno 293
4. Periodicidad de la exponencial imaginaria 296
5. Medida de ángulos 300
6. Funciones circulares directas e inversas 302
7. Ejercicios 307

17. La derivada 311

1. El problema de la tangente 313
2. La derivada 314
3. Reglas de cálculo de derivadas 320
4. Monotonía, máximos y mínimos locales 322
5. Derivada de la función inversa 325
6. Derivadas de las funciones elementales y circulares 327
7. Ejercicios 330

18. Los teoremas del valor medio del Cálculo diferencial 335

1. Los teoremas de Rolle y del incremento finito 337
2. La función derivada 339
3. Fórmula del valor medio de Cauchy 341
4. Regla de l'Hôpital 343
5. Derivadas sucesivas y teoremas de valor medio generalizados 349
6. Ejercicios 352

19. Fórmula de Taylor y aplicaciones 357

1. Los símbolos «o» y «O». Aproximaciones locales 359
2. Aproximación polinómica y fórmula de Taylor 364
3. Resto de la fórmula de Taylor 365
4. Desarrollos de las funciones elementales y de las trigonométricas 369
5. Convexidad y concavidad 371
6. Convexidad y concavidad locales. Inflexión 376
7. Análisis local por la fórmula de Taylor 379
8. Ejercicios 381

20. La integral de Riemann 385

1. El problema del área 387
2. Definición de integral 390
3. Condición de integrabilidad de una función 394
4. Clases de funciones R-integrables 399
5. Propiedad aditiva de la integral respecto de los intervalos 401
6. Propiedad lineal y de monotonía de la integral respecto de las funciones 403
7. Primer teorema del valor medio 407
8. Ejercicios 408

21. Funciones integrables Riemann 411

1. Conjuntos de contenido nulo en \mathbf{R} 413
2. Funciones continuas salvo en conjuntos de contenido nulo 414
3. Conjuntos de medida nula en \mathbf{R} 417
4. Oscilación de una función en un intervalo y en un punto 419
5. Caracterización de las funciones integrables Riemann 422
6. Funciones regladas 424
7. Ejercicios 426

22. Los teoremas fundamentales del Cálculo integral 427

1. Integral indefinida 429
2. Primer teorema fundamental del Cálculo 431
3. Función primitiva 431
4. Segundo teorema fundamental del Cálculo 433
5. Fórmulas clásicas del Cálculo 435
6. Funciones con integral y primitiva distintas 436
7. El segundo teorema del valor medio 440
8. Ejercicios 443

23. Cálculo de primitivas 445

1. Notación de Leibnitz. Integrales inmediatas 447
2. Métodos elementales de integración 449
3. Fórmulas recurrentes 452
4. Integración de funciones racionales 457
5. Integración de algunos tipos de funciones irracionales 471
6. Integración de algunos tipos de funciones trigonométricas 477
7. Integración de algunos tipos de funciones trascendentes 484
8. Ejercicios 487

24. Integrales impropias 491

1. Integración sobre intervalos no compactos 492
2. Criterios de convergencia 500
3. Algunos tipos de integrales impropias 505
4. Comparación de integrales impropias con series 509
5. Ejercicios 514

25. Sucesiones de funciones 517

1. Convergencia puntual 518
2. Convergencia uniforme 524
3. Propiedad de acotación 527
4. Álgebra de las sucesiones uniformemente convergentes de funciones 528
5. Continuidad de la función límite 531
6. Derivación de la función límite 532
7. Integración de la función límite 535
8. Ejercicios 541

26. Series funcionales 545

1. Definición de serie de funciones 546
2. Convergencias puntual y uniforme 548
3. Criterios de convergencia uniforme 550
4. Continuidad, derivabilidad e integrabilidad de las series uniformemente convergentes 555
5. Ejercicios 556

27. Series de potencias 559

1. Convergencia de las series de potencias 560
2. Propiedades de las funciones definidas por series de potencias 567
3. Desarrollo de una función en serie de potencias 572
4. Algunos desarrollos usuales 576
5. Ejercicios 582

28. El espacio euclídeo R^n 587

1. El espacio vectorial R^n 588
2. Topología euclídea en R^n 591
3. Principio de encaje 596
4. Dos teoremas de existencia 597
5. Conjuntos compactos 599
6. Ejercicios 601

29. Límites y continuidad de funciones entre espacios euclídeos 603

1. Funciones entre espacios euclídeos 605
2. Límite de una función en un punto 607
3. Límites sucesivos 611
4. Continuidad de una función en un punto 617
5. Función continua en un conjunto 618
6. Ejercicios 619

30. Cálculo diferencial de funciones entre espacios euclídeos 623

1. Derivada de una función vectorial 625
2. La diferencial 629

3. Propiedades de la diferencial 633
4. Existencia y determinación de la diferencial 636
5. Matriz jacobiana 640
6. Derivada según un vector 643
7. Interpretación geométrica de la diferencial de una función real 645
8. Derivadas parciales de orden superior 647
9. Fórmula de Taylor. Análisis local de las funciones reales 652
10. Ejercicios 658

31. Integrales múltiples 661

1. La integral doble 663
2. Clases de funciones \mathbb{R} -integrables en un intervalo 667
3. Propiedades de la integral 671
4. Integraciones sucesivas 673
5. Integración sobre conjuntos acotados 677
6. La integral múltiple 682
7. Fórmulas integrales para algunas constantes mecánicas 687
8. Ejercicios 689

Índice alfabético 693

Principios de Análisis Matemático

1. Elementos de la teoría de conjuntos

1. *Conjuntos.*
2. *Producto de dos conjuntos. Relaciones.*
3. *Relaciones de orden.*
4. *Aplicaciones.*
5. *Sucesiones.*
6. *Cardinalidad de conjuntos.*
7. *Ejercicios.*

Este primer capítulo es introductorio, y en él se recopilan los principios de la teoría elemental de conjuntos, que se supone conocida. El objeto es exponer en forma concisa las principales definiciones y propiedades de esta teoría, así como las notaciones más frecuentemente usadas. Por otra parte se supone que todas las propiedades referentes a los sistemas de números naturales, enteros y racionales son igualmente conocidas. No así la teoría del número real que será objeto de estudio detallado en los próximos capítulos.

A partir de las nociones de *conjunto* y *elemento*, se definen las operaciones de *unión*, *intersección*, *diferencia* y *paso al complemento*, así como sus propiedades (1.2, 1.4). Con la noción de *par ordenado*, se construye el *producto* de dos conjuntos, y a partir de éste se define el concepto básico de *relación* (2.3).

La relación de *equivalencia* (2.4) que es la más natural que se puede definir en un conjunto, origina en éste una *partición* asociada. Otra relación fundamental es la de *orden* (3), que interviene en todas las definiciones de convergencia en los principios del Análisis. Entre todos los tipos de ordenación, la *total* es la más simple (3.3), y de ella se dan algunos ejemplos notables. Anejas a la ordenación están las nociones de *cotas* y *extremos* (3.5, 3.6), de tal importancia, que sin ellas no se podría ni enunciar el *principio del extremo*, característico del cuerpo de los números reales.

El concepto de *aplicación* (4), que es un caso particular del de *relación*, se destaca con tal fuerza, pues es el objeto del estudio del Análisis, que en parte obscurece a los demás. Tanto la nomenclatura (5.2, 4.3), como la clasificación (4.4) se exponen con detalle, y se consideran igualmente las *restricciones* y *extensiones* (4.8) de una aplicación, y la *composición* de aplicaciones (4.7).

Una clase de aplicaciones, sin duda las primeras que se presentaron al análisis del matemático, son las *sucesiones*: aplicaciones de \mathbb{N} en un conjunto (5). Aparte del interés intrínseco de las sucesiones, tienen un carácter instrumental en el estudio de otras aplicaciones más complicadas.

En los casos elementales, la *cardinalidad* de un conjunto (6) está definida por el número de sus elementos. En los casos más generales, Cantor define la igualdad del número cardinal de dos conjuntos, por la posibilidad de establecer una *coordinación*, es decir, una biyección (6.1), entre ambos. Entre los conjuntos *no finitos* (6.3), el más simple es \mathbb{N} , y todos los conjuntos coordinables con él son los *numerables* (6.4). El conjunto \mathbb{Q} de los números racionales es numerable (6.7).

1. CONJUNTOS

1.1. Se supondrán conocidos los principios de la teoría elemental de conjuntos. En este apartado y en los siguientes se expondrán en forma resumida, las principales definiciones y proposiciones de esta teoría, así como las notaciones más frecuentemente usadas.

Los *conjuntos* suelen designarse por letras mayúsculas: A, B, \dots, X, Y, \dots , y los *elementos* por letras minúsculas: a, b, \dots, x, y, \dots

Para asegurar que “ x es un elemento de A ”, se escribe

$$x \in A.$$

La negación “ x no es un elemento de A ”, se escribe

$$x \notin A.$$

Si A y B son dos conjuntos, se escribe

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A,$$

para expresar que A es un *subconjunto* de B ; es decir, que cada elemento $x \in A$ es un elemento de B .

Dos conjuntos A y B son *iguales* ($A = B$) si tienen los mismos elementos.

Si $A \subset B$ y $A \neq B$, es A un subconjunto estricto de B .

La relación \subset entre conjuntos es una *relación de orden*; es decir, si A, B y C son conjuntos, se tiene:

- a) $A \subset A$.
- b) Si $A \subset B$ y $B \subset A$ es $A = B$.
- c) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ es $A \subset C$.

Si $A \subset B$, se dice que A *está contenido en* B , o que B contiene a A . La negación de $A \subset B$ se escribe $A \not\subset B$.

1.2. Dado un conjunto X y una *propiedad* P que poseen algunos (o todos, o ninguno) de los elementos de X , entonces queda determinado un *subconjunto* A de X , *cuyos elementos son los que tienen la propiedad* P . Se escribe

$$A = \{x \in X : P(x)\} \quad \text{o} \quad \{x \in X \mid P(x)\}.$$

Si no hay ambigüedad, se puede prescindir del símbolo X , escribiendo simplemente $\{x : P(x)\}$.

Dadas dos propiedades P y Q que se refieren a elementos del mismo conjunto X , la igualdad

$$\{x \in X : P(x)\} = \{x \in X : Q(x)\}$$

también se expresa por

$$\forall x \in X, \quad P(x) \Leftrightarrow Q(x):$$

“para todo x de X (o en X) la propiedad P es equivalente a la Q ”.

Si es

$$\{x \in X : P(x)\} \subset \{x \in X : Q(x)\},$$

esta relación también se expresa por

$$\forall x \in X, \quad P(x) \Rightarrow Q(x)$$

“para todo $x \in X$ (o en X) la propiedad P implica a la Q ”.

El conjunto vacío ϕ , está definido por

$$\phi = \{x : x \neq x\},$$

que es un subconjunto de cualquier conjunto. El conjunto vacío no tiene elementos.

Se ha de distinguir entre el objeto x y el conjunto cuyo único elemento es x , que se designa por $\{x\}$, y que a veces se denomina *singulete*. Esta notación se generaliza de manera natural; así, el conjunto cuyos únicos elementos son x e y es el par $\{x, y\}$ y $\{x_1, \dots, x_n\}$ es el conjunto cuyos elementos son x_1, \dots, x_n .

1.2. La *unión* de los dos conjuntos A y B , que se designa por $A \cup B$, es

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\},$$

en donde la conjunción “o” no es excluyente.

La *intersección* de los dos conjuntos A y B , que se designa por $A \cap B$, es

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$

Los conjuntos A y B son *disjuntos* si $A \cap B = \phi$; es decir, no tienen elementos comunes.

Estas definiciones se generalizan cuando se pasa de dos conjuntos a una colección \mathcal{F} (finita o no) de conjuntos. Al escribir $A \in \mathcal{F}$, se indica que A es un conjunto de la colección \mathcal{F} .

La *unión* de \mathcal{F} es

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A \text{ para algún } A \in \mathcal{F}\}.$$

La *intersección* de \mathcal{F} es

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A \text{ para cada } A \in \mathcal{F}\}.$$

Si A y B son dos conjuntos cualesquiera, el conjunto diferencia $A - B$ es

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\},$$

a veces se lee " A menos B ".

Cuando A es un subconjunto de un X , el conjunto diferencia $A' = X - A$, se denomina frecuentemente "*complementario de A respecto de X* ".

1.3. Los resultados siguientes son simples consecuencias de las definiciones:

- a) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$.
- c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

que son las propiedades *conmutativas*, *asociativas* y *distributivas* de las operaciones \cup e \cap , válidas cualesquiera que sean los conjuntos A , B y C .

Si A es un conjunto cualquiera, son evidentes los resultados:

- d) $A = A \cup A$, $A = A \cap A$.
- e) $\phi \cup A = A$, $\phi \cap A = \phi$.

Las propiedades distributivas c) se generalizan cuando se trata de una colección \mathcal{F} de conjuntos:

$$A \cup \left(\bigcap_{B \in \mathcal{F}} B \right) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} (A \cup B), \quad A \cap \left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} (A \cap B).$$

Finalmente, se suelen llamar *relaciones de Morgan* las siguientes:

$$f) \quad X - \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} (X - B), \quad X - \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} (X - B),$$

que en el caso particular de contener X a todos los conjuntos de la colección \mathcal{F} , utilizando la notación de los complementarios, se escriben:

$$g) \quad \left(\bigcap_{B \in \mathcal{F}} B \right)' = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B', \quad \left(\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \right)' = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B'.$$

2. PRODUCTO DE DOS CONJUNTOS. RELACIONES

2.1. Un *par ordenado* (x, y) , consta de dos objetos x e y (sin excluir que sea $x = y$) y se distingue uno de ellos como *primero* del otro que es el *segundo*. En el par ordenado (x, y) , el primer elemento x se denomina también primera componente, proyección o coordenada, y el segundo elemento y es la segunda componente, proyección o coordenada.

La relación de igualdad $(x, y) = (x', y')$ entre pares ordenados, equivale a $x = x'$ e $y = y'$.

Si A y B son conjuntos, $A \times B$ es el conjunto de todos los pares (a, b) , donde $a \in A$ y $b \in B$. El conjunto $A \times B$ se denomina *producto cartesiano* de A por B , o simplemente *producto* de A por B .

Los siguientes resultados son consecuencia de la definición:

- a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$.
 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$
- b) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

2.2. Es conveniente considerar como iguales los conjuntos $A \times (B \times C)$ y $(A \times B) \times C$, identificando el elemento $(a, (b, c))$ de $A \times (B \times C)$ con el elemento $((a, b), c)$ de $(A \times B) \times C$. Hecha esta identificación, al definir el producto cartesiano de un número finito de conjuntos, se puede prescindir de los paréntesis. Si A_1, A_2, \dots, A_n son conjuntos, los elementos del producto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ son las n -tuplas ordenadas (a_1, a_2, \dots, a_n) , donde $a_i \in A_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

2.3. **Definición:** Una relación \mathcal{R} entre los conjuntos X e Y , está definida por tres elementos: el conjunto X , el conjunto Y , y un subconjunto cualquiera $G \subset X \times Y$; es decir, $\mathcal{R} = \{X, Y, G\}$.

El conjunto $G \subset X \times Y$ se denomina *grafo* de la relación \mathcal{R} .

La *primera proyección* del grafo es el conjunto $G_1 \subset X$ cuyos elementos son los primeros x de los pares $(x, y) \in G$; y análogamente la *segunda proyección* del grafo es el conjunto $G_2 \subset Y$ cuyos elementos son los segundos y de los pares $(x, y) \in G$.

Si $(x, y) \in G$, se dice que el par (x, y) pertenece a la relación \mathcal{R} , y también se escribe $x \mathcal{R} y$.

Una relación \mathcal{R} entre el conjunto X y el mismo X , se dice que es una *relación definida en X* . En este caso $\mathcal{R} = \{X, G\}$, donde $G \subset X \times X$, o $G \subset X^2$.

2.4. **Definición:** Una relación de equivalencia \mathcal{E} definida en X , es una relación $\mathcal{E} = \{X, G\}$ que tiene las siguientes propiedades.

- a) Si $x \in X$ es $(x, x) \in G$, (*reflexiva*).
 b) Si $(x, y) \in G$ es $(y, x) \in G$, (*simétrica*).
 c) Si $(x, y) \in G$ e $(y, z) \in G$ es $(x, z) \in G$, (*transitiva*).

Definición: Una partición de un conjunto X , es una colección \mathcal{F} de subconjuntos $B \subset X$ tal que:

- a) Dos conjuntos cualesquiera de \mathcal{F} son disjuntos.
 b) La unión de los conjuntos de \mathcal{F} es X :

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = X$$

Entre las relaciones de equivalencia definidas en un conjunto X , y las particiones de X hay una correspondencia biunívoca, que se establece por medio de las *clases de equivalencia*.

En la relación de equivalencia $\mathcal{E} = \{X, G\}$ la clase de equivalencia que contiene el elemento $a \in X$, es

$$X_a = \{x \in X : (a, x) \in G\}.$$

Proposición: *Una relación de equivalencia definida en un conjunto X , determina una partición de X , cuyas partes son las clases de equivalencia. Recíprocamente, toda partición de X da lugar a una relación de equivalencia, en la que el conjunto de las clases de equivalencia coincide con la partición.*

Si \mathcal{E} es la relación de equivalencia, el conjunto de las clases de equivalencia, se denomina conjunto *cociente* de X respecto de la relación \mathcal{E} y se designa por

$$\frac{X}{\mathcal{E}}.$$

3. RELACIONES DE ORDEN

3.1. Entre las relaciones que se pueden definir en un conjunto X las de orden son de especial interés.

Definición: *Una relación de orden en un conjunto X es una relación $\mathcal{O} = \{X, G\}$ que tiene las siguientes propiedades.*

- Si $x \in X$ es $(x, x) \in G$.
- Si $(x, y) \in G$ e $(y, x) \in G$ es $x = y$.
- Si $(x, y) \in G$ e $(y, z) \in G$ es $(x, z) \in G$.

Ordinariamente se emplea el símbolo \leq para la relación de orden, y se escribe $x \leq y$ en vez de $(x, y) \in G$. Con esta notación las propiedades anteriores tienen la siguiente forma.

- Si $x \in X$ es $x \leq x$ (*reflexiva*).
- Si $x \leq y$ e $y \leq x$ es $y = x$ (*antisimétrica*).
- Si $x \leq y$ e $y \leq z$ es $x \leq z$ (*transitiva*).

A veces se escribe $y \geq x$ en vez de $x \leq y$. Las dos formas de escritura se consideran equivalentes.

Un conjunto en el que se ha definido una relación de orden es un *conjunto ordenado*.

3.2. Al prescindir de la condición b) de antisimetría en la relación de orden se obtiene la de preorden.

Una *relación de preorden* en un conjunto X , es una relación reflexiva y transitiva.

Conservando la notación \leq , en una relación de preorden en X , pueden existir elementos distintos $x, y \in X$, para los que simultáneamente sea $x \leq y$ e $y \leq x$. Desde el punto de vista de la relación \leq , estos elementos son equivalentes, y se puede definir en X una equivalencia \mathcal{E} por la siguiente condición: *Dos elementos $x, y \in X$ son equivalentes en \mathcal{E} cuando simultáneamente es $x \leq y$ e $y \leq x$.*

Proposición: *Toda relación de preorden en X , determina una relación de orden en $\frac{X}{\mathcal{E}}$. Para dos clases $X_a, X_b \in \frac{X}{\mathcal{E}}$, es $X_a \leq X_b$ si, y sólo si, $a \leq b$.*

3.3. Una relación de orden, que verifica además de las a), b) y c) la propiedad:

d) Para cada dos $x, y \in X$ es $x < y$, o $x = y$, o $y < x$ (*tricotomía*), es una relación de *orden total*.

En contraposición, el orden antes definido, se denomina a veces *orden parcial*. En este caso, dos elementos $x, y \in X$, pueden ser *comparables*, cuando, al menos se verifica una de las condiciones $x \leq y$ e $y \leq x$; o *no ser comparables*, cuando no se verifica ninguna de ellas.

El orden total, también se denomina *orden lineal*.

3.4. Sea X un conjunto ordenado. Un elemento $m \in X$ es el *mínimo* de X si es $m \leq x$, para todo $x \in X$. Un elemento $M \in X$ es el *máximo* de X si es $x \leq M$, para todo $x \in X$.

El mínimo y el máximo son elementos de X , cuando existen.

De ordinario no existen en X mínimo ni máximo.

3.5. **Definición:** *Sea X un conjunto ordenado y A un subconjunto de X . Un elemento $k \in X$ es una *cota inferior* de A si es $k \leq x$, para todo $x \in A$. Un elemento $K \in X$ es una *cota superior* de A si es $x \leq K$, para todo $x \in A$.*

Se dice que A está *acotado inferiormente* en X , si existe, al menos, una cota inferior de A ; y que A está *acotado superiormente* en X , si existe, al menos, una cota superior de A . Si existen las dos cotas, se dice simplemente que el conjunto A está *acotado* en X .

La propiedad de estar acotado un conjunto A , no depende sólo de A , sino del conjunto X en el que está contenido.

3.6. **Definición:** *Sea X un conjunto ordenado y A un subconjunto de X . Un elemento $\omega \in X$ es el *extremo superior*, o *supremo*, de A en X , si ω es el mínimo de las cotas superiores de A en X .*

Se escribe,

$$\omega = \text{ext. sup}_X A, \quad \omega = \sup_X A, \quad \text{o} \quad \omega = \sup A$$

cuando se sobreentiende cuál es el conjunto X que contiene a A .

Definición: Un elemento $\alpha \in X$ es el extremo inferior o ínfimo de A en X , si α es el máximo de las cotas inferiores de A en X .

Se escribe,

$$\alpha = \text{ext. inf}_X A, \quad \alpha = \inf_X A, \quad \text{o} \quad \alpha = \inf A$$

cuando se sobreentiende cuál es el concepto X que contiene a A .

De ordinario no existen en X ínfimo ni supremo de $A \subset X$.

3.7. Cuando el conjunto X está totalmente ordenado, las definiciones de ínfimo y supremo de un subconjunto $A \subset X$ se simplifican. Un $\alpha \in X$ es *ínfimo de A en X* si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones:

- a) Para todo $x \in A$ es $\alpha \leq x$.
- b) Para todo $\alpha' \in X$, que sea $\alpha < \alpha'$ existe algún $x' \in A$ tal que es $x' < \alpha'$.

Análogamente, un $\omega \in X$ es *supremo de A en X* si, y sólo si, se cumplen las dos condiciones:

- a) Para todo $x \in A$ es $x \leq \omega$.
- b) Para todo $\omega' \in X$, que sea $\omega' < \omega$, existe algún $x' \in A$ tal que es $\omega' < x'$.

Ejemplo 1.—Era ya conocido por los matemáticos griegos, que no existen números racionales cuyo cuadrado es igual a 2. Este caso es una muestra de la insuficiencia de los racionales, que se manifiesta en el hecho de que existen conjuntos acotados de números racionales para los que no existe ningún racional que sea supremo del conjunto ni ninguno que sea ínfimo.

El conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0, x^2 < 2\}$ no posee supremo en \mathbb{Q} , y el conjunto $Y = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 > 2\}$ no posee ínfimo en \mathbb{Q} .

Evidentemente $x = 2$ es una cota superior de X , y $x = 1$ es una cota inferior de Y .

En primer lugar, no existe un racional $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ o bien $p^2 = 2q^2$; ya que en la descomposición en factores primos de los dos miembros de la igualdad, el factor 2 aparece un número par de veces en el primer miembro y un número impar en el segundo.

Si existiera un $\omega > 0$ racional que fuera $\omega = \sup_{\mathbb{Q}} X$, como $\omega^2 \neq 2$, sería $\omega^2 < 2$, o bien $\omega^2 > 2$.

El primer caso no puede darse, pues tomando un $r < 1$ racional, tal que $0 < r < \frac{2 - \omega^2}{2\omega + 1}$, se tendría

$$(\omega + r)^2 = \omega^2 + 2\omega r + r^2 < \omega^2 + (2\omega + 1)r < \omega^2 + 2 - \omega^2 = 2,$$

por lo que ω no sería el supremo de X .

Tampoco puede darse el segundo caso, pues tomando un racional r tal tal que $0 < r < \frac{\omega^2 - 2}{2\omega}$, se tendría

$$(\omega - r)^2 = \omega^2 - 2r\omega + r^2 > \omega^2 - 2r\omega > \omega^2 - \omega^2 + 2 = 2,$$

por lo que $\omega - r$ sería también una cota superior de X y ω no sería el supremo de X .

El mismo razonamiento prueba que no existe en \mathbb{Q} un infinito de Y .

El ejemplo siguiente se refiere a la determinación de un supremo y un ínfimo en la ordenación por inclusión de una colección de conjuntos.

Ejemplo 2. — Dado el cuadrado $I = [0,1] \times [0,1]$ del plano ordinario \mathbb{R}^2 , sea X el conjunto de las partes (o subconjuntos) de I . Se considera en X la ordenación parcial por la inclusión \subset .

Con A se designa el conjunto de todos los círculos abiertos (sin borde) de radio $\frac{1}{4}$, contenidos en I .

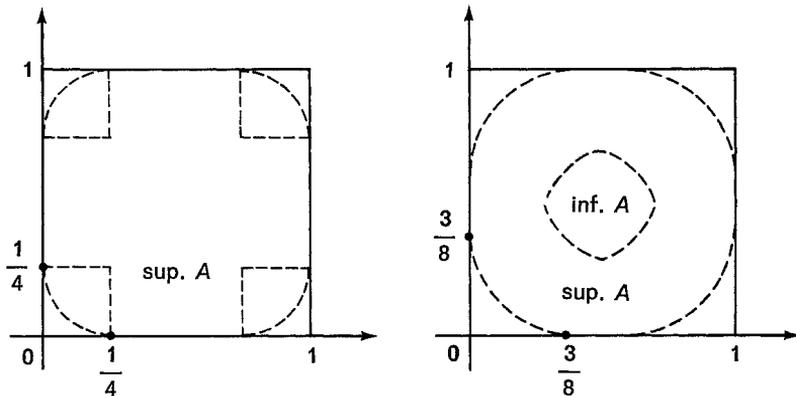
Cotas triviales superior e inferior de A son el cuadrado I , y el vacío ϕ .

Otras cotas más interesantes son la unión y la intersección de la colección de círculos $\gamma \in A$, pues precisamente son el supremo y el ínfimo de la colección A :

$$\sup A = \bigcup_{\gamma \in A} \gamma, \quad \inf A = \bigcap_{\gamma \in A} \gamma.$$

El $\sup A$ es la figura plana abierta (sin borde) obtenida al sustituir en I los cuadrados en los vértices de lado $\frac{1}{4}$ por cuadrantes circulares. El $\inf A$ es el conjunto vano.

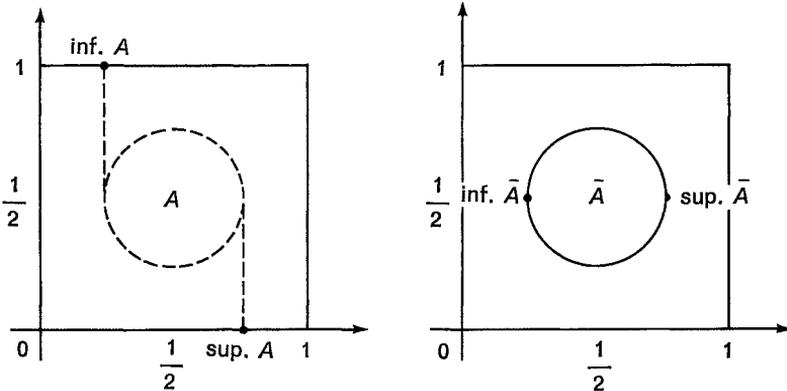
Manifiestamente, ni $\sup A$ ni $\inf A$ pertenecen a A , que no posee ni máximo ni mínimo.



Si en este ejemplo se hubieran considerado los círculos abiertos γ de radio $\frac{3}{8}$ contenidos en I , el $\sup A$ sería una figura abierta análoga a la anterior, obtenida al sustituir en I los cuadrados en los vértices de lado $\frac{3}{8}$ por cuadrantes circulares. Sin embargo el $\inf A$ es totalmente distinto, pues se trata de una figura plana sin borde, limitada por cuatro arcos de circunferencia. En este caso, tampoco el $\sup A$ y el $\inf A$ son máximo ni mínimo.

En los ejemplos anteriores los supremos e ínfimos aparecen de una manera espontánea e intuitiva. No siempre es así. A continuación se exponen, en una ordenación total, situaciones sorprendentes de dichos extremos.

Ejemplo 3. — En el conjunto de puntos (x, y) del cuadrado $I = [0,1] \times [0,1]$ se define la ordenación *lexicográfica*. Para cada par de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I$ es: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ cualesquiera que sean y_1 e y_2 , y si $x_1 = x_2$ cuando $y_1 < y_2$. Se complementa esta definición poniendo $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, si $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ o si $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.



Sea A el conjunto de puntos del círculo abierto de centro el de I y radio $\frac{1}{4}$.

Este conjunto está acotado, pues aparte de las cotas triviales $(0, 0)$ inferior y $(1, 1)$ superior, cualquier punto $(x, y) \in I$ con $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ es una cota inferior de A , y cualquier (x, y) con $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ es una cota superior de A .

El ínfimo de A es precisamente $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, y el supremo $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

Estos extremos no pertenecen a A que no posee ni mínimo ni máximo. Si el círculo fuera cerrado \bar{A} (con borde), se tendría

$$\inf \bar{A} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \quad \text{y} \quad \sup \bar{A} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right),$$

que como pertenecientes a \bar{A} , serían el mínimo y el máximo.

4. APLICACIONES

4.1. **Definición:** *Dados dos conjuntos X e Y , un grafo F de una relación $\mathcal{R} = \{X, Y, F\}$ es funcional si cumple las condiciones siguientes:*

a) *Los primeros elementos de todos los pares $(x, y) \in F$, forman un conjunto que coincide con X .*

b) *No existen en F pares que tengan el mismo primer elemento; es decir, si $(x, y) \in F$ y $(x, y') \in F$ es $y = y'$.*

Una aplicación de X en Y , es una relación entre X e Y , en la que el grafo es funcional.

Como el concepto de aplicación tiene gran importancia, conviene dar una definición directa del mismo.

Definición: *Una aplicación f de X en Y , es una terna $\{X, Y, F\}$ en la que F es una parte del producto cartesiano $X \times Y$, que cumple las condiciones:*

a) *Para todo $x \in X$, existe al menos un par $(x, y) \in F$.*

b) *No existen pares distintos en F que tengan el mismo primer elemento.*

El conjunto X que coincide con la primera proyección del grafo F se denomina *dominio de la aplicación f o conjunto de partida*.

La segunda proyección de F se denomina *recorrido, codominio o conjunto de llegada* de la aplicación f .

De acuerdo con la definición es

$$\text{dominio } f = X \quad \text{y} \quad \text{recorrido } f \subset Y.$$

Para designar una aplicación f de X en Y , son de uso frecuente las notaciones

$$f : X \rightarrow Y \quad \text{o} \quad X \xrightarrow{f} Y,$$

que se leen "*f aplica X en Y* ".

Si en la aplicación $f = \{X, Y, F\}$ es $(x, y) \in F$, se dice que al elemento $x \in X$ le corresponde en f el $y \in Y$, y este elemento se suele denotar por $f(x)$, que se lee "*f de x* ". Para indicar que al elemento x le corresponde el $y = f(x)$, también se escribe

$$x \mapsto y = f(x) \quad \text{o} \quad x \mapsto f(x).$$

Este simbolismo puede emplearse para designar una aplicación, cuando se suponen conocidos el dominio X de la misma, y el conjunto Y que contiene al recorrido.

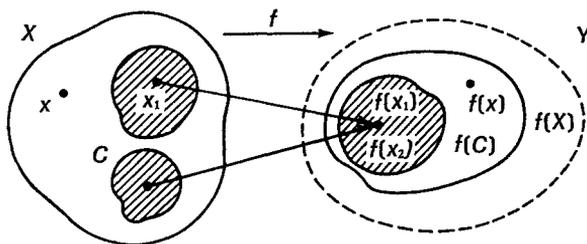
4.2. En vez del nombre de aplicación se usa frecuentemente el clásico de *función*, y se dice que f define una función en X , a valores de Y .

El conjunto X se denomina también, *dominio de la función* o *campo de definición de la función*.

Los nombres de aplicación y función se consideran como sinónimos y en Análisis, en particular, es muy frecuente el uso del segundo término.

4.3. En una aplicación $f : X \rightarrow Y$, a cada $x \in X$ le corresponde un solo $y \in Y$, que es la *imagen de x en la aplicación f* . Si $C \subset X$, el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los elementos $x \in C$, es la *imagen de C en la aplicación f* , que se representa por $f(C)$.

En particular, *el recorrido de la aplicación $f : X \rightarrow Y$ es $f(X)$* .



Aplicación f de X en Y . Imagen de C por f .

En una aplicación $f : X \rightarrow L$, la *antiimagen de un $y \in Y$* es el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $f(x) = y$. Se designa por $f^{-1}(y)$, y en consecuencia

$$f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}.$$

Aunque según esta definición, la antiimagen de un $y \in Y$ es un conjunto, cuando éste conste de un solo elemento, se identificará con tal elemento y se escribirá $x = f^{-1}(y)$.

La definición de antiimagen de un elemento y , se generaliza al caso de un conjunto:

En una aplicación $f : X \rightarrow Y$, la *antiimagen de un $D \subset Y$* , es el subconjunto de X , unión de todas las antiimágenes de los elementos $y \in D$:

$$f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in D\}.$$

Es frecuente denominar a la antiimagen, *imagen inversa*.

Ejemplo. Si en el conjunto X está definida una relación de equivalencia

\mathcal{E} , la aplicación de X en $\frac{X}{\mathcal{E}}$, en la que a cada $a \in X$ le corresponde la clase de equivalencia $X_a \in \frac{X}{\mathcal{E}}$, se denomina *aplicación natural*.

En esta aplicación la antiimagen de una clase de equivalencia es ella misma.

4.4. Atendiendo a propiedades simples del recorrido y del grafo de cada aplicación, se obtiene una clasificación general de las aplicaciones.

Una aplicación $f : X \rightarrow Y$, en la que el recorrido $f(X)$ coincide con el conjunto Y , es *exhaustiva*. La aplicación f "aplica X sobre Y ", por lo que a veces se dice que f es una aplicación "sobre" o *sobreyectiva*.

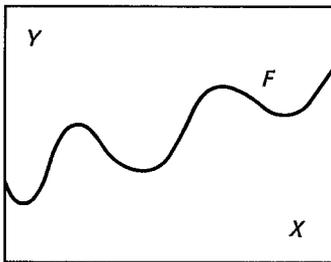
En las aplicaciones exhaustivas todo $y \in Y$ es imagen de un $x \in X$ por lo menos.

Una aplicación $f : X \rightarrow Y$, en la que para todo par $x', x'' \in X$ de elementos distintos, también $f(x') \neq f(x'')$, es *inyectiva*. También se dice que f es una *inyección*.

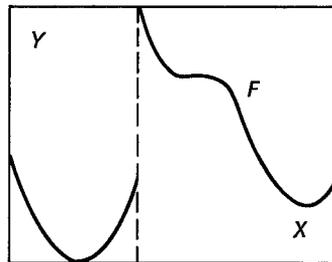
Una aplicación $f : X \rightarrow Y$, en la que todo elemento $y \in Y$ es imagen de uno y un solo elemento $x \in X$, es *biyectiva*. También se dice que f es una *biyección*.

En consecuencia la aplicación f es biyectiva, si es exhaustiva e inyectiva.

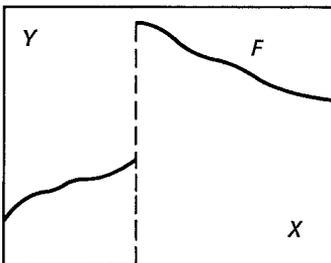
Ejemplo. En la figura siguiente se presentan esquemas de los distintos



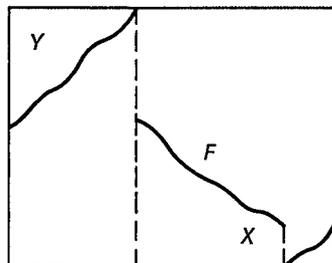
Aplicación $f : X \rightarrow Y$



Aplicación $f : X \rightarrow Y$ exhaustiva



Aplicación $f : X \rightarrow Y$ inyectiva



Aplicación $f : X \rightarrow Y$ biyectiva

tipos de aplicaciones $f = \{X, Y, F\}$.

4.5. De acuerdo con las definiciones anteriores, el que en la aplicación $f : X \rightarrow Y$ cada una de las antiimágenes de los elementos $y \in f(X)$ tenga un solo elemento $x \in X$, equivale a que la aplicación f es *inyectiva*; y el que cada uno de los elementos $y \in Y$ tenga una antiimagen *no vacía*, equivale a que la aplicación f es *exhaustiva*.

Para las aplicaciones biyectivas, y sólo para éstas, tiene sentido el concepto de aplicación *inversa*.

Definición: Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación biyectiva. El conjunto de todos los pares (y, x) obtenidos invirtiendo los (x, y) de la aplicación f , define una aplicación de Y sobre X que se denomina *inversa de la f* .

Además, la aplicación inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es también biyectiva. Consecuencia de ser biyectivas tanto f como f^{-1} son las siguientes igualdades:

$$x = f^{-1}(f(x)) \quad \text{para todo } x \in X$$

$$y = f(f^{-1}(y)) \quad \text{para todo } y \in Y.$$

4.5. En el caso de tratarse de aplicaciones cualesquiera, son útiles y de uso frecuente las siguientes fórmulas.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Para todo $C \subset X$ es $C \subset f^{-1}(f(C))$; y para todo $D \subset Y$ es $f(f^{-1}(D)) \subset D$.

La primera inclusión resulta del hecho de que si $x \in C$, $f(x) \in Y$, por lo que x pertenece a la antiimagen de $f(x)$, o sea $x \in f^{-1}(f(x))$. Como este resultado es cierto para todo $x \in C$, se tiene $C \subset f^{-1}(f(C))$.

La segunda inclusión resulta análogamente. Si $y \in D$ es $f^{-1}(y) \in X$, y por la definición de antiimagen $f(f^{-1}(y)) = y$, o bien $f(f^{-1}(y)) = \phi$ cuando $y \notin f(X)$. En todo caso es $f(f^{-1}(y)) \subset \{y\}$ para todo $y \in D$, en donde $f(f^{-1}(D)) \subset D$.

De este mismo razonamiento resulta:

Para todo $D \subset Y$ es $f(f^{-1}(D)) = D \cap f(X)$.

Por otra parte, si $f : X \rightarrow Y$ es biyectiva, para todo $C \subset X$ es $C = f^{-1}(f(C))$, y para todo $D \subset Y$ es $f(f^{-1}(D)) = D$.

4.7. **Definición:** Sean las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$, en las que el recorrido de f está contenido en el dominio de g , es decir $f(X) \subset Y$. La aplicación compuesta de f y g , que se escribe $g \circ f$, es una aplicación $g \circ f : X \rightarrow Z$, en la que a cada $x \in X$ le corresponde $z = g(f(x)) \in Z$.

También se puede decir, que si F y G son los grafos de f y g respectivamente, el grafo de la aplicación $g \circ f$ es

$$G \circ F = \{(x, z) \in X \times Z : (x, y) \in F, (y, z) \in G\}.$$