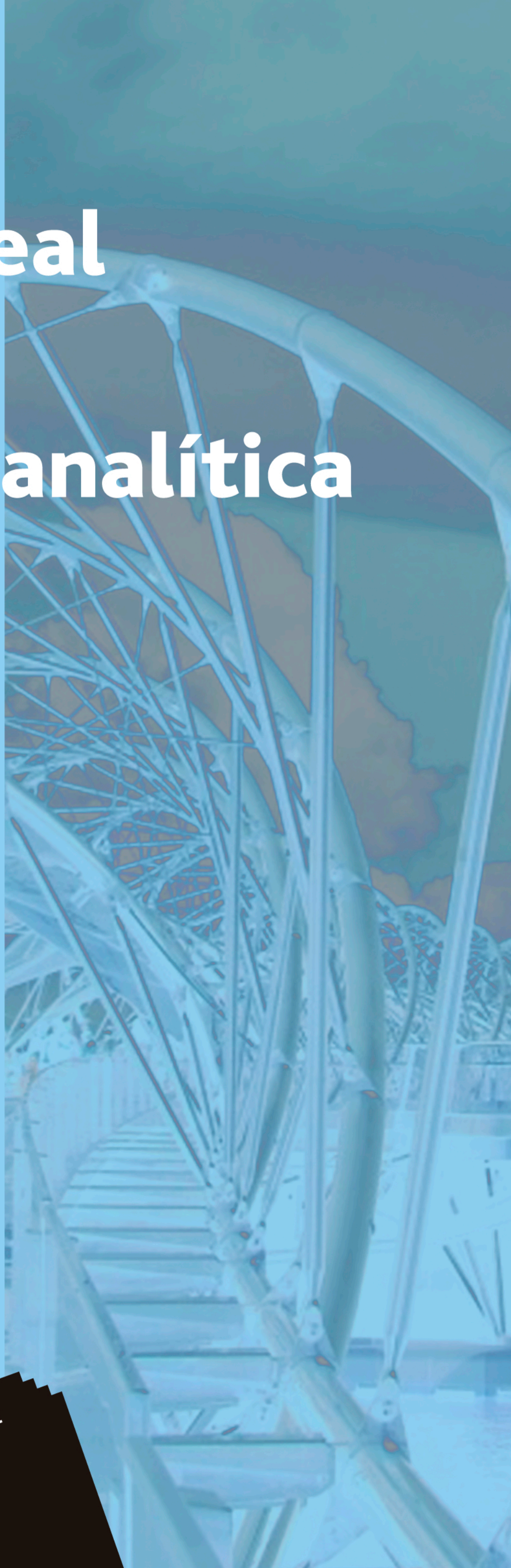
Álgebra lineal y Geometría analítica

Tomo 1

Joseph Heinhold
Bruno Riedmüller



EDITORIAL REVERTÉ

Álgebra lineal
y
Geometría analítica

Tomo 1

Joseph Heinhold
Bruno Riedmüller

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:

Lineare Algebra und Analytische Geometrie
Teil 1

Edición original en lengua alemana publicada por

Carl Hanser Verlag, München

Edición en papel

ISBN: 978-84-291-5082-7 Tomo 1
ISBN: 978-84-291-5046-9 Obra completa

Edición ebook (PDF)

ISBN: 978-84-291-9264-3

Versión española por:

Dr. Arturo Fernández Arias
Licenciado en Ciencias Matemáticas

Revisada por:

Dr. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
08029 Barcelona. España
reverte@reverte.com
www.reverte.com

802

Prólogo

Este libro ha surgido del curso de dos semestres de cuatro horas semanales de Álgebra lineal y Geometría analítica que el primero de los firmantes ha dado en la Universidad Técnica de Munich para estudiantes de primer año de Matemáticas y Física. El libro está pensado por una parte para seguir este curso, pero también para que un estudiante de primer año pueda estudiarlo por sí mismo.

Un objetivo especial de los autores era introducir a los futuros matemáticos y físicos —que frecuentemente desde la escuela están poco acostumbrados a los conceptos abstractos— en el Álgebra lineal y la Geometría analítica, facilitando el paso de la escuela a la universidad. Sirviendo a este objetivo, se ha hecho la exposición relativamente detallada, se han puesto muchos ejemplos y se ha intentado, a partir de la experiencia matemática elemental del lector, presentarle los nuevos conceptos.

Como complemento a la presente obra, han aparecido dos libros con el título «Ejercicios y soluciones de Álgebra lineal y Geometría analítica». Estos ejercicios, con sus detalladas soluciones, a veces con diversas formas de resolución, ayudan a la comprensión y familiarizan al lector con la materia. Los ejercicios han sido propuestos en su mayor parte en las clases prácticas correspondientes al mencionado curso.

Estamos muy agradecidos al Dr. Fischer por la lectura del manuscrito, por su valioso apoyo y por su ayuda en la corrección de la pruebas. Agradecemos también algunas útiles indicaciones a los señores D. Herrmann y K. Spremann, colaboradores en las clases prácticas, los cuales también han ayudado en la lectura de las pruebas. No menor es nuestro agradecimiento a la editorial Carl Hanser por la excelente presentación del libro.

Munich

J. Heinhold
B. Riedmüller

Índice analítico

Introducción

El objeto fundamental de la Geometría analítica, cuyos fundadores son Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650), es la resolución de problemas geométricos mediante métodos algebraicos y la interpretación geométrica de los desarrollos algebraicos. La introducción de coordenadas en el plano fue una de las aportaciones fundamentales, ya que mediante las mismas, entre otras cuestiones, se pudieron estudiar como lugares geométricos las secciones cónicas, que ya eran conocidas desde la matemática griega. Hasta principios del siglo XIX *se desarrolla la Geometría analítica de coordenadas en el sentido actual, aunque limitado dicho desarrollo al caso de dimensión dos o tres. Arthur Cayley (1821-1895) y Hermann Grassmann (1809-1877) generalizan hacia la década de los cuarenta del siglo* XIX *la Geometría a espacios de dimensión* n, *apartándose de esta forma de toda intuición. Grassmann y Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) contribuyen decisivamente a la creación del cálculo vectorial mediante las teorías de las «magnitudes extensivas» y de los «cuaterniones», respectivamente. Utilizando el concepto de grupo, debido fundamentalmente a Évariste Galois (1811-1832), Felix Klein (1849-1925) caracteriza en su «programa de Erlangen» las diferentes geometrías —métrica, afín y proyectiva— como teorías de invariantes de ciertos grupos de aplicaciones.*

La teoría de conjuntos, creada por Georg Cantor (1845-1918) en el último cuarto del siglo pasado, junto con el fundamento dado por David Hilbert (1862-1943) a las teorías matemáticas mediante el «método axiomático», constituyen la base para el estudio de las estructuras algebraicas abstractas, que fue desarrollado en las primeras décadas de este siglo.

Por un proceso de abstracción, partiendo del Cálculo vectorial, o con más precisión, del Álgebra vectorial, se llega al concepto de «espacio vectorial». Se puede definir el Álgebra lineal como la teoría de los espacios vectoriales. Estrechamente relacionado con el concepto de espacio vectorial está el de aplicación lineal. Los conceptos, métodos y resultados del Álgebra lineal se utilizan frecuentemente, por ejemplo, *en el Análisis numérico, en la Teoría de ecuaciones diferenciales y en el Análisis funcional y encuentran también múltiples aplicaciones en Investigación operativa y en Física.*

El presente libro contiene (Cap. 0) un breve resumen de los conceptos fundamentales de la Teoría de conjuntos y del concepto de aplicación —como repetición y ampliación de conceptos elementales ya conocidos—. Con objeto de introducir las estructuras abstractas de «anillo» y «cuerpo» (Cap. 1) se da una panorámica de la construcción de los sistemas de números, desde los números naturales hasta los números complejos. El lector estará ya familiarizado con estas estructuras mediante las reglas de la Aritmética. Uno de los objetivos de este capítulo es ejercitarse en el uso de estructuras algebraicas abstractas. Otro objetivo es la introducción de los números complejos, que generalmente no se estudian en la escuela.

El contenido de los capítulos 0 y *1 podría constituir, con algunos otros conceptos, materia para un curso preparatorio, por ejemplo, con la denominación «Conceptos fundamentales de Matemáticas».*

Basándose en el concepto de grupo se estudian los espacios vectoriales, esencialmente los de dimensión finita (Cap. 2). Termina el capítulo con un apartado sobre espacios euclídeos.

Mediante los espacios vectoriales —al contrario del desarrollo histórico— se definen los espacios afines abstractos (Cap. 3). Se estudia entonces la geometría analítica de las rectas e hiperplanos y, en espacios afines métricos, la geometría de las hiperesferas.

Los determinantes y las matrices (Cap. 4) son herramientas importantes para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales (Cap. 5), con el cual concluye este volumen. Las matrices son un medio fundamental para la descripción de las aplicaciones lineales (Cap. 6, Tomo 2 de la obra) entre espacios vectoriales de dimensión finita y, análogamente, de las aplicaciones afines entre espacios afines.

Las formas bilineales, cuadráticas y hermíticas (Cap. 7) encuentran aplicación en los espacios unitarios y normados.

El problema de los valores propios (Cap. 8) en el Álgebra lineal está en estrecha relación con el estudio de los subespacios invariantes y las formas normales de ciertas matrices. Sin embargo, aparece también en otras ramas de la Matemática y tiene una primera aplicación en la clasificación de las hipercuádricas (Cap. 9).

Finalmente, se estudian los conceptos fundamentales de la Geometría proyec-

tiva (Cap. 10) por medios analíticos y se tratan los conceptos fundamentales de la Programación lineal (Cap. 11).

De esta forma, se concluye en cierto modo el estudio de la Geometría analítica en el sentido del «Programa de Erlangen» y también se da una panorámica sobre algunas aplicaciones nuevas del Álgebra lineal.

El libro está dividido en capítulos y éstos en apartados. En cada apartado las definiciones, teoremas y ejemplos están numerados (por ejemplo, 3.2.1, 3.2.2, etc.), siendo el primero el número del capítulo y el segundo el del apartado. Los números de las fórmulas aparecen a la derecha entre paréntesis y avanzan a lo largo de cada apartado. Casi todos los apartados traen ejercicios (sin soluciones), que sirven para comprobar hasta qué punto se ha comprendido la materia y también a veces para complementarla.

Capítulo 0
Conceptos fundamentales

Este capítulo es un resumen de los conceptos fundamentales de la Teoría de conjuntos e introduce el concepto de aplicación, fundamental para el Álgebra lineal y la Geometría analítica, basándose en el concepto de relación.

0.1 Conjuntos

Se consideran diferentes objetos que se pueden distinguir unos de otros, por ejemplo, letras, números, puntos, rectas, triángulos, círculos, etc. Se entiende por **conjunto** una asociación mental en un todo de ciertos objetos diferentes que pueden ser abstractos o reales (1). Este es el punto de vista de la llamada Teoría intuitiva de conjuntos, que es suficiente aquí. Ejemplos de conjuntos son: las letras del alfabeto, el número natural 1, todos los números naturales, los números reales entre 0 y 1, los puntos de un disco.

Si un conjunto tiene un número finito de elementos se dice que es un conjunto **finito;** en caso contrario se dice que es un **conjunto infinito.** De los ejemplos anteriores los dos primeros son finitos, y los tres últimos son conjuntos infinitos.

En lo sucesivo, por regla general, se designarán los objetos con letras minúsculas a, b, c, etc. y los conjuntos con letras mayúsculas A, B, C, etc. Si el objeto a pertenece al conjunto A, se dice que a es **elemento** de A, y se escribirá $a \in A$. En caso contrario, si a no es elemento de A, se escribe $a \notin A$. Suponemos que dados un objeto y un conjunto, sólo hay dos posibilidades: $a \in A$, o bien $a \notin A$. O se verifica $a \in A$, o bien $a \notin A$, se excluye una tercera posibilidad. Si $a \in A$ y $b \in A$ entonces se escribe brevemente $a, b \in A$.

(1) Definición de G. Cantor (1845-1918), creador de la Teoría de conjuntos.

Un conjunto finito se describe a menudo de modo muy sencillo, escribiendo la lista de sus elementos entre llaves. El orden de los elementos en la lista es indiferente. Por ejemplo el conjunto de números que aparecen en un dado es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que también puede escribirse $\{3, 6, 1, 5, 4, 2\}$.

Para ciertos conjuntos, que se utilizarán frecuentemente más adelante, se emplearán las siguientes notaciones:

N para el conjunto de todos los números naturales.
Z para el conjunto de todos los números enteros.
Q para el conjunto de todos los números racionales.
R para el conjunto de todos los números reales.
C para el conjunto de todos los números complejos.

Estos conjuntos serán estudiados detenidamente en el próximo capítulo.

Para describir un conjunto infinito, se suele enunciar una propiedad de sus elementos, que sólo ellos poseen. Sin embargo, para evitar contradicciones en la Teoría de conjuntos, se deben excluir ciertas propiedades especiales, como, por ejemplo, «contenerse a sí mismo como elemento».

En los desarrollos posteriores no se considerarán conjuntos del tipo «El conjunto de todos los conjuntos». Si $\mathrm{E}(x)$ representa una propiedad, que es verificada por ciertos elementos, entonces se escribirá para representar el conjunto de todos los elementos con esta propiedad $\{x|\mathrm{E}(x)\}$, por ejemplo $\{x|x$ es un número real entre 0 y $1\}$.

El símbolo que representa a los elementos es arbitrario; en lugar de $\{x|\mathrm{E}(x)\}$ se puede escribir por ejemplo $\{y|\mathrm{E}(y)\}$.

Si x e y designan el mismo elemento de un conjunto, entonces se escribe $x = y$; en caso contrario $x \neq y$. Las propiedades siguientes del signo de igualdad son triviales:

Para todo los $x, y, z \in M$ se verifica

$x = x$ (Reflexividad)
$x = y$ implica $y = x$ (Simetría)
$x = y,\ y = z$ implica $x = z$ (Transitividad).

A menudo aparecen afirmaciones del tipo de las anteriores. Por esta razón se introducen abreviaciones. Sean A y B afirmaciones. En lugar de «para todo $x \in M$

se verifica A» se escribe también «$\bigwedge_{x \in M}$ A» (1), para la afirmación «A implica B» se escribe brevemente «A $\Rightarrow$ B». Análogamente «A $\Leftrightarrow$ B» significa «A implica B y B implica A». Hay otro tipo de afirmaciones que aparecerá a menudo: «existe un $x \in M$ que verifica A» o abreviadamente «$\bigvee_{x \in M}$ A» (2). Esta afirmación significa exactamente «existe por lo *menos* un x que verifica A». Se debe distinguir bien entre ésta y la siguiente afirmación «Hay *exactamente* un x, que verifica A (3).

Una propiedad importante del concepto matemático de conjunto, es que por definición un conjunto contiene objetos *bien diferenciados.* El conjunto de las letras que aparecen en la palabra «OTTO», $\{x|x$ es una letra de la palabra «OTTO»$\}$ no es $\{$O, T, T, O$\}$, sino $\{$O, T$\}$ pues solamente aparecen los objetos O y T.

El «uso» repetido de un elemento no se excluye por esto. A continuación se definen relaciones entre conjuntos.

Definición 0.1.1. Se dice que dos conjuntos A y B son **iguales,** y se escribe $A = B$, cuando todo elemento de A lo es también de B y viceversa. En caso contrario se dice que A y B son **distintos,** y se escribe $A \neq B$.

Sea por ejemplo A el conjunto de las letras que aparecen en la palabra «OTTO», y B el de las letras que aparecen en la palabra «TOTO». Se tiene $A = B$. Para los conjuntos numéricos $C = \{x|(x - 1)^2 = 0\}$ y $D = \{1\}$ se verifica también $C = D$.

En muchos casos es necesario suponer la existencia de un conjunto sin elementos. Se le designa como **conjunto vacío** $\emptyset$. Se supone que hay sólo *un* conjunto vacío; se hablará pues simplemente *del* conjunto vacío. Un conjunto $A = \emptyset$ se llama **vacío,** un conjunto $A \neq \emptyset$ se llama **no vacío.**

La igualdad de conjuntos definida en 0.0.1, como se ve fácilmente, tiene las propiedades citadas anteriormente de reflexividad, simetría, y transitividad.

Si todos los elementos de un conjunto A son también elementos de un conjunto B, entonces se dice que A es **subconjunto** de B, y se escribe $A \subseteq B$. El caso $A = B$ queda incluido. Si se verifica $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces se dice que A es un **subconjunto propio** de B, se representa por $A \subset B$. En lugar de $A \subseteq B$ se escribe también $B \supseteq A$ y se dice «B contiene a A», en lugar de $A \subset B$ se escribe también $B \supset A$ y se dice entonces que «B contiene estrictamente a A».

(1) O también «$\forall x \in M$: A».
(2) O también «$\exists x \in M$: A».
(3) Para facilitar la lectura se escriben las afirmaciones «para todos...», «hay un...» sin utilizar las mencionadas abreviaturas.

A partir de conjuntos dados se construyen nuevos conjuntos mediante las siguientes definiciones. Es conveniente introducir, además del signo de igualdad empleado hasta ahora «=», un signo de **igualdad que sirve para definir**, el «:=», que se lee «es igual por definición a». El concepto que se va a definir está a la izquierda de los dos puntos; a la derecha del signo de igualdad sólo pueden aparecer conceptos ya definidos.

Para definir conceptos se utiliza también el signo «:⇔». Tiene el significado de «por definición si, y solamente si» y se sitúa entre afirmaciones.

La afirmación que está a la izquierda del signo :⇔ contiene un concepto nuevo, mientras que están ya definidos los que aparecen en la afirmación de la derecha del signo.

Definición 0.1.2. Sean A y B conjuntos. La **intersección** de A y B, que se representa por $A \cap B$, es el conjunto

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

El «y» que aparece aquí entre dos afirmaciones tiene en la Matemática siempre el sentido de «tanto uno como el otro». Se utiliza a menudo como abreviatura el símbolo $\wedge$. Corrientemente se pone simplemente una coma entre ambas afirmaciones, por ejemplo, $A \cap B := \{x | x \in A, x \in B\}$.

Dos conjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$ se llaman **disjuntos.**

También se considera el conjunto de aquellos elementos, que pertenecen a A o (en sentido *no* excluyente; lat.«vel») a B. «O» cuyo símbolo es $\vee$, entre dos afirmaciones, tiene siempre en la Matemática este sentido no excluyente (al contrario que en el lenguaje ordinario, en el cual significa «uno u otro»).

Definición 0.1.3. Sean A, B, conjuntos. La **unión** de A y B, que se representa por $A \cup B$, es el conjunto:

$$A \cup B := \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Por ejemplo, si $A := \{1, 2, 3\}$ y $B := \{1, 4, 5\}$ se tiene: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A \cap B = \{1\}$.

Para hacer intuitivas las operaciones entre conjuntos, éstos se representan frecuentemente como conjuntos de puntos de un plano, en los llamados diagramas de Venn [1]. La figura 0.1 ilustra de esta forma la intersección y la unión de dos conjuntos A y B.

[1] J. Venn (1834-1923).

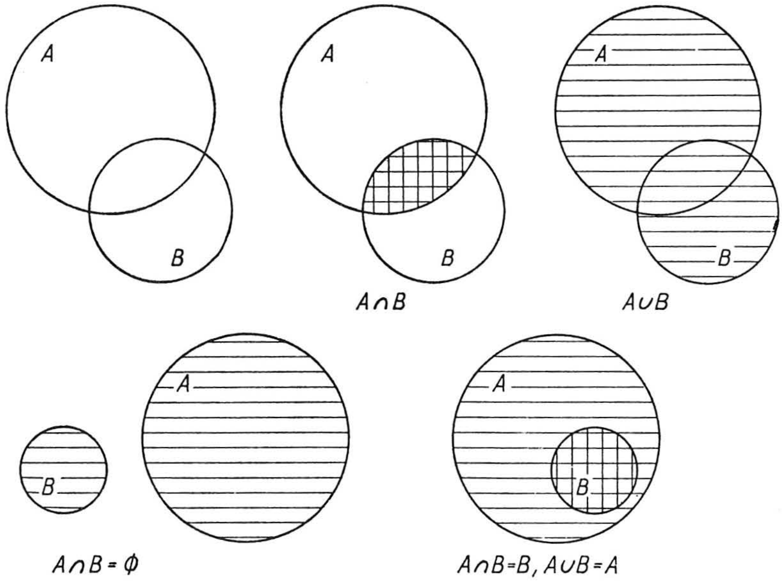


Figura 0.1

De 0.1.2 y 0.1.3 se obtiene junto con 0.1.1 las siguientes leyes:

$$\left.\begin{aligned} A \cap A &= A \\ A \cup A &= A, \end{aligned}\right. \qquad \text{(Idempotencia)}$$

$$\left.\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \end{aligned}\right. \qquad \text{(Asociatividad)}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A, \end{aligned}\right. \qquad \text{(Conmutatividad)}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A, \end{aligned}\right. \qquad \text{(Absorción)}$$

$$\left.\begin{aligned} (A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\ (A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C), \end{aligned}\right. \qquad \text{(Distributiva)}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup \emptyset &= A. \end{aligned}\right. \qquad \text{(Propiedades del conjunto vacío)}$$

Éstas se verifican para conjuntos A, B, C arbitrarios. Su demostración se obtiene a partir de las propiedades citadas de «y» y de «o». Algunas de estas leyes (asociatividad, conmutatividad, distributividad, propiedades del conjunto vacío) corresponden formalmente a leyes de cálculo de la Aritmética.

Debido a las leyes de asociatividad se puede definir recurrentemente la intersección y unión de n conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ $(n \in \mathbf{N})$:

$$\bigcap_{\nu=1}^{1} A_\nu := A_1, \quad \bigcap_{\nu=1}^{n} A_\nu := \left(\bigcap_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\right) \cap A_n,$$

$$\bigcup_{\nu=1}^{1} A_\nu := A_1, \quad \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu := \left(\bigcup_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\right) \cup A_n.$$

Definición 0.1.4. Sean A y B conjuntos. Se define la **diferencia** entre B y A, y se representa por $A \setminus B$, como el conjunto

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

En el caso $B \subseteq A$ se designa $A \setminus B$ por $\bar{B}_A$.

La figura 0.2 hace intuitivos estos conceptos con los correspondientes diagramas de Venn.

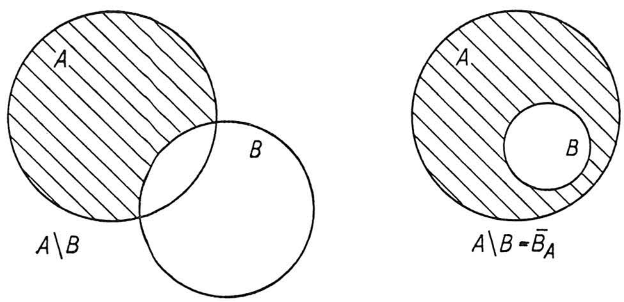


Figura 0.2

Para todo conjunto A se verifica $\bar{A}_A = \emptyset$. Si B y C son subconjuntos de A, entonces se tiene $B \setminus C = B \cap \bar{C}_A$.

Ejemplo: Si $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B := \{1, 4, 5\}$ y $C := \{1, 2, 3\}$ se tiene entonces $\bar{B}_A = \{2, 3, 6\}$, $\bar{C}_A = \{4, 5, 6\}$, $B \setminus C = \{4, 5\} = \{1, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = B \cap \bar{C}_A$.

Otra construcción muy importante de un conjunto a partir de dos conjuntos dados A y B es la del producto cartesiano. Sean $a \in A$ y $b \in B$. Consideramos **pares ordenados** (a, b), en los cuales está en primer lugar un elemento de A y en el segundo un elemento de B. Dos pares ordenados (a, b) y (a', b') se dice que son iguales, y se escribe $(a, b) = (a', b')$, si $a = a'$ y $b = b'$.

Definición 0.1.5. El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B, que se representará por $A \times B$, es el conjunto

$$A \times B := \{(a, b) | a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

El producto cartesiano $A \times A$ de un conjunto por sí mismo se representa de forma más breve por A^2.

Así, por ejemplo, se tiene para $A := \{1, 2\}$ y $B := \{1, 3, 4\}$: $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4)\}$ y $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. $\mathbf{N}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números naturales, $\mathbf{R}^2$ el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.

Si A y B son conjuntos finitos que tienen m y n elementos respectivamente, entonces el producto cartesiano $A \times B$ tiene mn elementos. Esta es la causa de la denominación «Producto».

Puesto que los elementos del producto cartesiano de dos conjuntos son pares *ordenados*, se debe tener presente que los elementos de la forma $(1, 2)$ y $(2, 1)$ son distintos. Sin embargo, los conjuntos $\{1, 2\}$ y $\{2, 1\}$ son el mismo.

Se definen también productos cartesianos múltiples. Sean $A_1, \ldots, A_n$ ($n \in \mathbf{N}$) conjuntos y $a_\nu \in A_\nu$ para $\nu = 1, \ldots, n$. Formamos n-plas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ las cuales son tales que en el lugar ν está un elemento de A_ν. Dos tales n-plas $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(a'_1, \ldots, a'_n)$ se dice que son iguales, y se escribe $(a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n)$ si $a_\nu = a'_\nu$ para todo $\nu = 1, \ldots, n$.

Definición 0.1.6. Sean $A_1, \ldots, A_n$ ($n \in \mathbf{N}$) conjuntos. El conjunto de todas las n-plas ordenadas $(a_1, \ldots, a_n)$ con $a_\nu \in A_\nu$ para $\nu = 1, \ldots, n$ se llama **producto cartesiano** de $A_1, \ldots, A_n$, y se representa por $A_1 \times \ldots \times A_n$. El producto cartesiano de un conjunto A por sí mismo n veces se designa más brevemente por A^n.

El índice ν toma en esta definición, todos los valores del subconjunto de los números naturales $\{1, \ldots, n\}$. Estos conjuntos, cuando se utilizan como conjuntos de índices se representarán en lo sucesivo más brevemente por I_n, es decir, $I_n := \{1, \ldots, n\}$.

Por último, es importante la partición de un conjunto en clases. Es decir, la partición de un conjunto en subconjuntos no vacíos (clases) de tal forma que todo elemento del conjunto pertenezca exactamente a un subconjunto. Un elemento del conjunto, por tanto, no puede estar en dos clases y por otra parte debe estar en una clase.

Definición 0.1.7. Sea M un conjunto no vacío. Un conjunto K de subconjuntos no vacíos de M se llama una **partición** de M, si para cada $a \in M$ existe un único $A \in K$ tal que $a \in A$.

De estas condiciones se deduce inmediatamente que para todas las clases $A, B \in K$ con $A \neq B$, es $A \cap B = \emptyset$. La hipótesis $A \cap B \neq \emptyset$ tendría como consecuencia la existencia de un $x \in M$ con $x \in A$ y $x \in B$ con lo cual se tendría $A = B$ en contradicción con la hipótesis. Como cada $a \in M$ pertenece a una clase $A \in K$, la unión de todas las clases es igual al conjunto M.

Una partición del conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales es por ejemplo $\{K_1, \ldots, K_5\}$ donde

$$K_\nu := \{k \mid k = 5n + \nu, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}, \ \nu \in I_5.$$

Ejercicio 0.1

1. Sean los conjuntos

$$A := \{1,2,3\}, B := \{4,5,6\}, C := \{1,3,5\}, D := \{2,4,6\}, E := \{1,2\}, F := \{3,4\}, G := \{5,6\},$$
$$H := \{1,2,3,4,5,6\}.$$

a) ¿Cuáles de estos conjuntos son subconjuntos de alguno de los otros?
b) Formar las intersecciones y las uniones, dos a dos, de los conjuntos dados y fórmense también los siguientes conjuntos: $A \setminus B$, $A \setminus E$, $D \setminus H$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $\bar{D}_H$, $\bar{F}_H$.
c) Fórmense los productos cartesianos $B \times C$, H^2 y E^3.
d) Decir cuáles de los conjuntos dados representan particiones del conjunto H.

2. Decir cuáles de los conjuntos siguientes son iguales:

$$A := \{x \mid x \in \mathbf{R} \ \text{ y } \ x^2 = 1\}, B := \{x \mid x \in \mathbf{R} \ \text{ y } \ x^2 + 2x + 1 = 0\},$$
$$C := \{1\}, D := \{-1\}, E := \{1, -1\}$$

3. Decir qué diferencia hay entre los conjuntos

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

4. Sean A, B, C conjuntos. Demuéstrese que

a) $\emptyset \subseteq A$ para todo A.
b) $A \subseteq A$ para todo A.
c) $A \subseteq B$, $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

5. ¿Es cierto en general $A \times B = B \times A$, siendo A y B dos conjuntos no vacíos?

6. Sean A, B, C conjuntos tales que $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. Demuéstrese que

$$\overline{(A \cup B)}_C = \bar{A}_C \cap \bar{B}_C,$$
$$\overline{(A \cap B)}_C = \bar{A}_C \cup \bar{B}_C.$$

0.2 Relaciones y aplicaciones

En el apartado 0.1 se han definido las relaciones $=$, $\neq$, $\subseteq$ y $\subset$ entre conjuntos y las relaciones $=$ y $\neq$ entre elementos. Más adelante será necesario establecer nuevas relaciones entre elementos de ciertos conjuntos, por ejemplo en los conjuntos de números.

En general se establece:

Definición 0.2.1. Sean A, B conjuntos, $a \in A$ y $b \in B$. Se define una **relación** R entre A y B como un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Si $(a, b) \in R$, se dice que a y b están relacionados por R, y en forma breve se escribe aRb. Cuando $A = B$, R es una relación definida en A.

Ejemplo 0.2.2. El conjunto $R := \{(n, z) | n \in \mathbf{N}, z \in \mathbf{Z} \text{ y } n = z^2 + 1\}$ es una relación entre $\mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}$.

Ejemplo 0.2.3. Sea $A := \{1, 2, 3\}$. Los conjuntos $R_1 := \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ y $R_2 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ son relaciones en A. Se puede considerar R_1 como la relación de igualdad, y R_2 como la relación «mayor o igual».

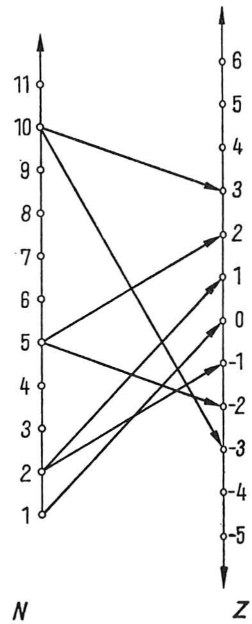


Figura 0.3.1

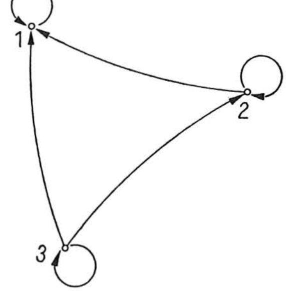


Fig. 0.3.2.

Se puede hacer intuitiva una relación R entre dos conjuntos finitos A y B, por medio de un diagrama de flechas. Para ello imagínense los conjuntos A y B representados como conjuntos de puntos. Si el par ordenado (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ pertenece a la relación, entonces se dibuja una flecha partiendo de a y en direción a b. El conjunto de estas flechas da una imagen de la relación R. En este sentido la figura 0.3.1 representa la relación R del ejemplo 0.2.2 y la figura 0.3.2 la relación R_2 del ejemplo 0.2.3.

Las relaciones en un conjunto pueden tener diversas propiedades. Se tratarán primero las propiedades de reflexividad, simetría, y transitividad, que aparecieron ya, en el apartado anterior, en la igualdad.

Definición 0.2.4. Sea R una relación en el conjunto A. Se dice que A es **reflexiva,** si para todo $a \in A$ se verifica:

$$(a, a) \in R.$$

Se dice que R es **simétrica,** si para todo par $a, b \in A$ se verifica:

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$

Se dice que R es **transitiva,** si para toda terna $a, b, c \in A$ se verifica:

$$(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$

Además de la relación de igualdad, hay una serie de relaciones que tienen estas tres propiedades de la reflexividad, simetría y transitividad. A causa de su importancia, se les da a estas relaciones un nombre propio.

Definición 0.2.5. Una relación R reflexiva simétrica, y transitiva en un conjunto A se llama **relación de equivalencia** en A.

Ejemplo 0.2.6. Sea A el conjunto de todas las rectas de un plano y R la relación «ser paralela a». R es una relación de equivalencia en A. Por el contrario, la relación «ser perpendicular a» no es una relación de equivalencia: esta relación es simétrica, pero no es reflexiva ni transitiva. Sea también B el conjunto de todos los triángulos de un plano, y R la relación de equivalencia «ser semejante a». R es una relación de equivalencia en B.

La relación R_1, en el ejemplo 0.2.3 es también una relación de equivalencia; por el contrario la relación R_2 en este ejemplo es reflexiva y transitiva, pero no simétrica.

Corrientemente una relación de equivalencia en un conjunto se designa con el símbolo $\sim$.

Entre las relaciones de equivalencia y las particiones en un conjunto no vacío existe una importante conexión. Sea M un conjunto no vacío y $\sim$ una relación de equivalencia en M. Se consideran los conjuntos de la forma

$$[a] := \{x | x \in M \text{ y } x \sim a\}, \tag{1}$$

en donde $a \in M$.

Entonces, para todo $a \in M$ se verifica trivialmente $[a] \subseteq M$. Puesto que la relación $\sim$ es reflexiva, se tiene:

$$a \in M \Rightarrow a \sim a \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow [a] \neq \emptyset.$$

Por tanto, para cada $a \in M$ existe por lo menos un subconjunto no vacío $[a]$ de M con $a \in [a]$.

Se prueba también que para todo par $a, b \in M$

$$a \sim b \Leftrightarrow [a] = [b]. \tag{2}$$

Demostración «$\Rightarrow$». Por la transitividad de $\sim$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} x \in [a] \Rightarrow x \sim a \\ a \sim b \end{array}\right\} \Rightarrow x \sim b \Rightarrow x \in [b]$$

y por la simetría y la transitividad de $\sim$

$$\left.\begin{array}{l} x \in [b] \Rightarrow x \sim b \\ a \sim b \;\;\Rightarrow b \sim a \end{array}\right\} \Rightarrow x \sim a \Rightarrow x \in [a],$$

es decir, por una parte $[a] \subseteq [b]$ y por otra $[b] \subseteq [a]$ y, por tanto, $[a] = [b]$.

«$\Leftarrow$». De la reflexividad de $\sim$ se deduce:

$$\left.\begin{array}{r} a \in [a] \\ [a] = [b] \end{array}\right\} \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b.$$

Ahora sean $a, b, c \in M$, donde $a \in [b]$ y $a \in [c]$. Entonces se obtiene por (2)

$$\left.\begin{array}{r} a \in [b] \Rightarrow a \sim b \Rightarrow b \sim a \\ a \in [c] \Rightarrow a \sim c \end{array}\right\} \Rightarrow b \sim c \Rightarrow [b] = [c].$$

Por tanto, para todo $a \in M$ hay a lo más —y por lo visto antes, exactamente uno— un subconjunto no vacío $[a]$ de M con $a \in [a]$.

Así pues, queda demostrado el

Teorema 0.2.7. *Sea M un conjunto no vacío* y $\sim$ *una relación de equivalencia en M. Entonces el conjunto $\{[a] | a \in M\}$, en donde $[a] := \{x | x \in M$ y $x \sim a\}$, es una partición de M.*

Los conjuntos de la forma $[a]$ se llaman, por esto, **clases de equivalencia** de M respecto de $\sim$, y se dice que $\sim$ «induce» en M una partición. Todo elemento $x \in [a]$ se dice que es un **representante** de la clase $[a]$.

Especialmente importantes son aquellas relaciones entre dos conjuntos A y B, en los cuales todo elemento de A está relacionado exactamente con un elemento de B. Mediante una de estas relaciones se asocia a cada elemento de A exactamente un elemento de B.

Definición 0.2.8. Una relación R entre dos conjuntos A y B se llama una **aplicación** de A en B, si para cada $a \in A$ existe exactamente un $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. En el caso $A = B$, se dice que R es una aplicación de A **en sí mismo.**

En un diagrama de flechas, una aplicación de A en B, se caracteriza porque de todo elemento del conjunto A parte exactamente una flecha (fig. 0.4).

El conjunto A se llama **conjunto original** de R. El conjunto de todos los $b \in B$ para los cuales existe un $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$ se llama **conjunto imagen** o simplemente **imagen** de A por R. Este conjunto puede ser un subconjunto propio de B, o bien el mismo B.

Ejemplo 0.2.9. Sean $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{5, 6, 7, 8\}$, $R_1 := \{(1, 5), (2, 6), (3, 6)\}$, $R_2 := \{(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 7), (4, 5)\}$, $R_3 := \{(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 7)\}$. Ni R_1 ni R_2 son aplicaciones de A en B, pero sí lo es R_3. La imagen de A por R_3 es el subconjunto $\{5, 6, 7\}$ de B.

Ejemplo 0.2.10. Sean $A := \{1, 2, 3, 4\}$ y $R := \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$. R es una aplicación de A en sí mismo. La imagen de A por R es el subconjunto $\{1, 3\}$ de A.

La relación R en el ejemplo 0.2.2 no es una aplicación de $\mathbf{N}$ en $\mathbf{Z}$. Para cada $n \in \mathbf{N}$ no existe necesariamente un $z \in \mathbf{Z}$ con $n = z^2 + 1$. Si se invierten aquí los papeles entre $\mathbf{N}$ y $\mathbf{Z}$, entonces queda definida una aplicación de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{N}$ por $n = z^2 + 1$.

Ciertas propiedades de las aplicaciones serán más tarde de fundamental importancia.

Definición 0.2.11. Sea R una aplicación del conjunto A en el conjunto B.

Se dice que R es una aplicación de A **sobre** B, o **sobreyectiva,** si para todo $b \in B$ existe por lo menos un $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$.

Se dice que R es una aplicación **unívoca** de A en B o **inyectiva,** si para cada $b \in B$ existe a lo más un $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$.

Se dice que R es una aplicación **biunívoca** de A **sobre** B o **biyectiva,** si para todo $b \in B$ existe exactamente un $a \in A$ tal que $(a, b) \in R$. Una aplicación biyectiva se llamará también **inversible.**

Así pues una aplicación es biyectiva si, y sólo si, es sobreyectiva e inyectiva al mismo tiempo.

Las aplicaciones R_3 del ejemplo 0.2.9 y R del ejemplo 0.2.10 no son ni sobreyectivas ni inyectivas

Ejemplo 0.2.12. Sean $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{5, 6, 7\}$ y $R := \{(1, 7), (2, 6), (3, 6), (4, 5)\}$. R es una aplicación de A sobre B, pero no es inyectiva, es decir R es sobreyectiva, pero no es inyectiva.

Ejemplo 0.2.13. Sean $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y $R := \{(1, 7), (2, 6) (3, 8), (4, 5)\}$. R es una aplicación inyectiva de A en B, pero no sobre B, es decir, R es inyectiva, pero no sobreyectiva.

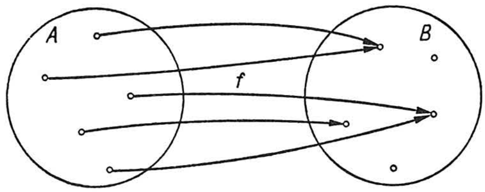
Ejemplo 0.2.14. Sean $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{5, 6, 7, 8\}$, y $R := \{(1,7) (2, 6), (3, 8), (4, 5)\}$. R es una aplicación biunívoca de A sobre B, es decir R es biyectiva.

Los diagramas de flechas de la figura 0.4 pueden servir para aclarar estos nuevos conceptos.

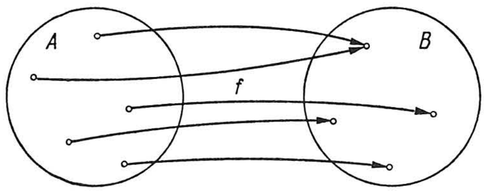
En general, cuando se trata de aplicaciones no se conserva la notación de las relaciones. Se designarán las aplicaciones ordinariamente con letras minúsculas f, g, etcétera. Para representar una aplicación f de un conjunto A en otro conjunto B se escribirá $f : A \twoheadrightarrow B$ (independientemente de las propiedades particulares de la aplicación, las cuales normalmente se deducen del contexto) (1).

Si el par ordenado (a, b), con $a \in A$, y $b \in B$ pertenece a la aplicación, entonces se dice que a es transformado en b por f, y se escribe $f : a \longrightarrow b$. Se dice que a es un **elemento original** de b, y b la **imagen** de a por f. Es también usual, la notación $f(a) = b$. Análogamente para la imagen de A por f, se escribe también $f(A)$.

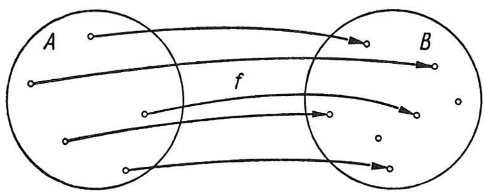
(1) Algunas veces las propiedades de la aplicación de ser sobreyectiva, inyectiva, etc., se escriben encima o debajo de la flecha.



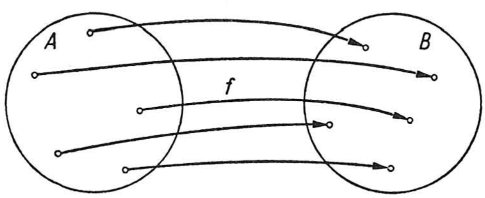
$f: A \to B$ no es ni sobreyectiva ni inyectiva.



$f: A \to B$ es sobreyectiva, pero no inyectiva.



$f: A \to B$ es inyectiva, pero no sobreyectiva.



$f: A \to B$ es sobreyectiva e inyectiva, es decir biyectiva.

Figura 0.4

La aplicación que transforma cada elemento $a \in A$ de un conjunto A en sí mismo, se llama **aplicación identidad** de A. Se designa con e_A. Es trivial que la aplicación identidad de un conjunto es biyectiva.

Un tipo particular de aplicaciones, será utilizado frecuentemente en el próximo capítulo y por eso reciben un nombre particular.