

verdeckt



geschätzt

Bastian
3500

Alexa
3000

Claudia
1800

aufgedeckt



Beat Wälti · Marcus Schütte · Rachel-Ann Friesen

Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen

Band 2:

Lernumgebungen für heterogene Gruppen

Schwerpunkt
5. bis 7. Schuljahr

Beat Wälti, Marcus Schütte, Rachel-Ann Friesen

Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen

Band 2

Lernumgebungen für heterogene Gruppen

(Schwerpunkt 5. bis 7. Schuljahr)

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium
für Bildung
und Forschung

Das diesem Buch zugrunde liegende Vorhaben war ein Kooperationsprojekt von Prof. Dr. Beat Wälti (PH Bern) sowie Prof. Dr. Marcus Schütte und Rachel-Ann Friesen (TU Dresden). Der Autor und die Autorin der TU Dresden wurden im Rahmen der gemeinsamen „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern mit Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem Förderkennzeichen 01JA1619 im Projekt „Gemeinsames Lernen im jahrgangsgemischten Grundschulmathematikunterricht“ gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren / der Autorin.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Impressum

Beat Wälti, Marcus Schütte, Rachel-Ann Friesen
Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen
Band 2: Lernumgebungen für heterogene Gruppen (Schwerpunkt 5. bis 7. Schuljahr)

1. Auflage 2023
Das E-Book folgt der Buchausgabe 2. Auflage 2023

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages.

© 2020. Kallmeyer in Verbindung mit Klett
Friedrich Verlag GmbH
D-30159 Hannover
Alle Rechte vorbehalten.
www.friedrich-verlag.de

Redaktion: Stefan Hellriegel, Berlin
Realisation: Frederieke Ruberg
E-Book Erstellung: Friedrich Verlag GmbH, Hannover

ISBN: 978-3-7727-1445-0

Beat Wälti, Marcus Schütte, Rachel-Ann Friesen

Mathematik kooperativ spielen, üben, begreifen

Band 2

Lernumgebungen für heterogene Gruppen
(Schwerpunkt 5. bis 7. Schuljahr)

Inhalt

Vorwort	6
Lernumgebungen für einen interaktiv gestalteten Mathematikunterricht	8
5 Mathematiklernen in Kooperation	10
1 Konstruktivistisches Lernverständnis	17
2 Mathematische Lernumgebungen – eine Bestandsaufnahme	18
3 Mit substanziellen Lernumgebungen unterrichten	21
4 Interaktionistisches Lernverständnis	22
Literatur- und Quellenverzeichnis	27
Zu den Lernumgebungen in diesem Band	31
1 Zahlenraum erforschen	37
1.1 Wo stehe ich richtig?	39
1.2 Buchstaben am Zahlenstrahl	41
1.3 Geschickt zur Zielzahl	44
1.4 Geheimzahlen erraten	50
1.5 Zahlenpaar entschlüsseln	54
1.6 Welche Regel passt?	58
1.7 Brüche am Zollstock	62
1.8 Von 1 bis $\frac{1}{100}$	66
1.9 Knack den Zahlencode	71
1.10 Triff die Quadrate	76
1.11 Fakenews	80
2 Addieren und Subtrahieren	85
2.1 Apfelkuchen	87
2.2 Wer baut den besten Würfel?	92
2.3 Triff die 10 000	98
2.4 Summen verändern	104
2.5 Wer findet den schnellsten Weg?	108
2.6 Alles muss weg	113

3 Multiplizieren und Dividieren	115
3.0 Zur Arbeit mit dem Zahlenhochhaus (Lernumgebungen 3.1 – 3.2)	117
3.1 Vier gewinnt im Zahlenhochhaus	119
3.2 Stockwerke mieten	124
3.3 Teiler-Jagd	128
3.4 Zusammenhängende Vielfache	132
3.5 Rechtecke im Rechteck	136
3.6 Überschlagen	139
3.7 Mit 4 4ern	145
3.8 Zahlenpoker	151
4 Mit Größen handeln	155
4.1 Wer legt den letzten Geldschein?	157
4.2 50 m abmessen	160
4.3 Füll den Krug	163
4.4 Wer feiert Silvester?	167
4.5 Der Quadratmeter	170
4.6 Tauschen und Handeln	174
4.7 Schatzinsel	180
Anhang	188
Übersicht über die fokussierten mathematischen Inhalte	188
Übersicht über die benötigten Materialien	189
Übersicht über die Download-Materialien	190
Übersicht über die Lernumgebungen in Band 1	191
Bildquellennachweise	191
Download-Material	192

Vorwort

Woran denken Sie bei einem Blick in den deutschsprachigen Mathematikunterricht? An Schülerinnen und Schüler, die gemeinsam Mathematik betreiben, in Kleingruppen nach Wegen suchen und argumentativ um Lösungen ringen? Wohl eher nicht.

Der gängige Mathematikunterricht zeichnet sich eher durch individuelles Bearbeiten von Aufgaben z. B. auf Arbeitsblättern oder in Arbeitsheften nach einführenden Klassengesprächen aus. Dies bestätigt auch ein Blick in die Literatur zu mathematischen Aufgaben oder Lernumgebungen, welche maßgeblich auf das individuelle Entdecken und Lernen von Schülerinnen und Schülern fokussieren. Die mathematikdidaktische Lehr- und Lernforschung, die die Bedeutung des gemeinsamen Lernens seit Langem hervorhebt, hinterlässt in der Unterrichtspraxis bisher nur geringe Spuren.

Diese Diskrepanz zwischen Lehr- und Lernforschung und Unterrichtsrealität haben wir zum Ausgangspunkt der Entwicklung der vorliegenden Bände genommen. In ihnen werden Anregungen in Form von mathematischen Lernumgebungen mit dem Ziel bereitgestellt, vielfältige Gelegenheiten zum gemeinsamen Lernen von Mathematik zu schaffen.

Der mathematische Erkenntnisgewinn des Einzelnen muss sich bei Lernumgebungen, die von Anfang an kooperativ bearbeitet werden, nicht gleich einstellen. Die Erprobungen haben uns aber gezeigt, dass die folgenden Aufgaben geeignet sind, Lernende miteinander in den Austausch über Mathematik zu bringen und so Lern- und Denkprozesse zu initiieren.

Mit *MATHWELT 2* vom Schulverlag Plus für die Schuljahre 3 bis 6 (2018) steht wohl erstmals im deutschsprachigen Raum ein Lehrmittel zur Verfügung, das in ca. 100 Aufgaben bereits während der Aufgabebearbeitung Interaktion als Bestandteil der eigentlichen Aufgabebearbeitung einfordert. Nach Erscheinen des Lehrwerks wurde verschiedentlich gefragt, ob man „solche Anregungen“ nicht lehrmittelunabhängig der Allgemeinheit zur Verfügung stellen könnte.

So ist die Kooperation von uns dreien entstanden: Marcus Schütte hat sich in den letzten Jahren intensiv mit dem Lernen von Mathematik in Interaktionen beschäftigt, Rachel-Ann Böckmann (geb. Friesen) schreibt ihre Dissertation zu Lernen in heterogenen (insbesondere altersgemischten) Klassen und Beat Wälti bringt seine Expertise aus der Aufgabenentwicklung mit.

Gemeinsam haben wir Aufgaben entwickelt, die von Anfang an kooperativ zu bearbeiten sind. Es entstanden so zwei Bände: Ein Band für das 3. bis 5. Schuljahr und ein zweiter für das 5. bis 7. Schuljahr. Wir sind überzeugt, dass dank der vorliegenden Bände nicht nur mehr mathematisch gehandelt und interagiert wird, sondern dass sie auch Lust nach mehr Mathematik machen.

Selbstverständlich standen bei unserer Arbeit immer die Lernenden im Vordergrund. Sie haben uns oft genug die Grenzen unserer Aufgabenstellungen aufgezeigt, haben mit ihrer Begeisterung die Arbeit an den Lernumgebungen zum Erlebnis werden lassen und haben uns geholfen, unsere Aufgaben an der Schulpraxis bzw. am Lernbedarf von Schülerinnen und Schüler auszurichten.

Wir danken all denjenigen, die die Arbeit an den beiden Bänden unterstützt haben. So wurden die Lernumgebungen dank des flexiblen und wohlwollenden Supports und dank der konstruktiven Zusammenarbeit von Behörden und Lehrpersonen in vielen Schulen und altersgemischten Lerngruppen erprobt. Ein besonderer Dank gilt hier den Schulen in den Kantonen Bern und Aargau, im Südtirol (Gsieser- und Pustertal) sowie der Laborschule Gorbitz in Dresden. Ebenso danken wir den Schülerinnen und Schülern, die an unserem Projekt „MaJa“ (Mathematiklernen in Jahrgangsmischung) in der Lern- und Forschungswerkstatt der TU Dresden teilgenommen haben und den Studierenden der TU Dresden, Leibniz Universität Hannover und der PH Bern, welche die Lernumgebungen in Unterrichtsversuchen an Schulen inszenierten und ihre Erfahrungen zurückmeldeten.

Namentlich erwähnen möchten wir Beatrix Huber von der Grundschule Pichl (Welsberg) für die mehrwöchige inspirierende und unkomplizierte Zusammenarbeit, Dr. Josef Watschinger, Schuldirektor von Welsberg (Pustertal), der in seinem Schulsprengel die Erprobung der Lernumgebungen aktiv unterstützt und kooperatives Lernen zum Jahresthema machte, sowie Peter Ludes-Adamy, der uns mit seiner gestalterischen Kompetenz bei grafischen Umsetzungen vielfältig unterstützt hat.

Beat Wälti
Marcus Schütte
Rachel-Ann Böckmann (geb. Friesen)
im Juli 2020

Lernumgebungen für einen interaktiv gestalteten Mathematikunterricht

Der Umgang mit Heterogenität im schulischen Alltag ist allgegenwärtige Realität (Trautmann/Wischer 2011). Die Schülerschaft ist nicht erst infolge der jüngsten Migrationsbewegungen in Europa oder der Umsetzung von Inklusion durch vielfältige Facetten von Heterogenität geprägt. Dabei unterscheiden sich die Lernenden in Bezug auf Aspekte wie kognitive Leistung, Motivation, Vorerfahrung, Alter, Geschlecht, sprachlich-kulturellen Hintergrund, soziale Schicht und vieles mehr (Hinz 1993). Das Ziel, allen Schülerinnen und Schülern bestmögliche Lern- und Bildungschancen zu bieten und sie ihren individuellen Fähigkeiten nach optimal zu fördern, stellt Lehrpersonen entsprechend vor erhebliche Herausforderungen (Trautmann/Wischer 2011). Das Thema Heterogenität rückt somit immer wieder in den Fokus von pädagogischen Diskussionen.

Bis Anfang der 1980er Jahre basierte der Mathematikunterricht vielerorts auf einem behavioristischen Verständnis von Lernen, welches in der Praxis einen kleinschrittigen, sehr systematischen Aufbau mathematischer Lerninhalte nach sich zog. Die mathematischen Lerninhalte wurden durch die Lehrpersonen als gezielte Reize von außen in Form von „Belehrungen“ an das zu unterrichtende Individuum herangetragen. Aus der Sicht der Lernenden bedeutete dies ein vorwiegend passives, rezeptives Lernen (Krauthausen 2018). Zudem wurde in der Schule die Mathematik lange Zeit als eine „fertige“ Wissenschaft, als prinzipiell kulturneutral und von allen gleich zu erlernend angesehen.

Trotz vieler kritischer Stimmen im frühen 20. Jahrhundert veränderte sich der Blick auf das Mathematiklernen erst ab Mitte der 1980er Jahre nachhaltig. Aufgrund dieser nunmehr veränderten Sichtweise gilt Mathematik heute international wie national als eine kulturell überlieferte, durch Sprache vermittelte und konstruierte Kulturtechnik (D'Ambrosio 1985; Schütte 2009; Schütte/Kaiser 2011). Parallel zu dieser neuen Perspektive auf Mathematik entwickelten sich neue lerntheoretische Ansätze des Mathematiklernens, die das behavioristische

Lernverständnis zunehmend verdrängten. Zwei theoretische Positionen haben die deutschsprachige Mathematikdidaktik in diesem Zusammenhang in den letzten drei Jahrzehnten geprägt. Beide Positionen distanzieren sich jeweils von behavioristisch geprägten Lerntheorien, streiten jedoch in ihrer Spezifität über ihre theoretischen Grundpositionen sowie auf unterrichtspraktischer Ebene über die Effektivität der je entwickelten Unterrichtsvorschläge. Während eine Position auf Theorien des Konstruktivismus aufbaut, bezieht sich die andere Position auf interaktionistische Vorstellungen zum Lernen.

Dem *Konstruktivismus* zufolge liegen alle Anlagen zum Lernen in der psychischen Konstitution des Individuums, welches beim Lernen aktiv neues Wissen für sich konstruiert. Im Zentrum eines solchen Verständnisses von (Mathematik-)Lernen steht der Gedanke einer aktivistischen Position, welche vor allem auf der genetischen Epistemologie von Piaget (1974) fußt, nach der das Individuum durch Auseinandersetzung mit fordernden Lerninhalten selbstständig aktiv Mathematik entdeckt. In diese theoretischen Ausführungen lässt sich die heute gängige Orientierung des aktiv-entdeckenden Lernens einordnen (Winter 2016), in der gefordert wird, dass sich Lernende einen Unterrichtsgegenstand selbstständig erarbeiten.

Um der Heterogenität der Lernenden gerecht zu werden, haben sich hierzu Lernumgebungen mit natürlich differenzierenden Aufgabenstellungen als günstige Lerngelegenheiten etabliert, deren Entwicklung für Vertreterinnen und Vertreter dieses Verständnisses zentral ist. In solchen Lernumgebungen werden weniger leistungsstarken Lernenden niedrigschwellige Zugänge zu einem komplexen mathematischen Inhalt oder Gegenstand ermöglicht und leistungsstärkeren Lernenden spezifische „Rampen“ geboten, deren Bearbeitung herausfordernd ist (Hirt/Wälti 2008; Wittmann/Müller 1990).

Demgegenüber stehen *interaktionistisch* geprägte Ansätze des Lernens (Bauersfeld 1978; Voigt 1984; Krummheuer 1992; Schütte 2009;

Schütte/Friesen/Jung 2019), welche auf interaktive Wechselbeziehungen im Unterricht fokussieren und sich damit vom Konstruktivismus und seiner Fokussierung auf die zu lernenden mathematisch-stofflichen Inhalte abgrenzen. Für Vertreterinnen und Vertreter solcher Ansätze ist Lernen ein dialogischer Prozess, der sich durch das Zusammenspiel mentaler Aktivitäten verschiedener Individuen beschreiben lässt. Lernen findet somit aufgrund sozialer Interaktionsprozesse zwischen den Individuen einer Gruppe statt, wie z. B. in Gesprächen zwischen Lernenden oder in Klassengesprächen zwischen Lehrperson und Lernenden. Der Fokus dieser interaktionistischen Forschung liegt dabei vor allem auf dem „Verstehen-Wollen“ interaktiver Lernprozesse (Krummheuer 2004, S. 113). Es soll ergründet werden, wie in Aushandlungsprozessen mathematisches Wissen kollektiv entwickelt wird. Seit der Jahrtausendwende zeigen entsprechende Veröffentlichungen auch auf, unter welchen Bedingungen das Lernen für eine heterogene Schülerschaft optimiert werden kann (Brandt 2004; Fetzer 2007; Schütte 2009; Brandt/Tiedemann 2019). So ist aus interaktionistischer Sichtweise gerade die Koordination vielfältiger individueller Perspektiven auf ein und denselben Gegenstand die Grundlage des Lernens von Mathematik. Eine langfristig angelegte Unterrichtsentwicklung aus interaktionistischem Verständnis setzt daher gerade auch auf den Aufbau von Kompetenzen in Bezug auf die Beobachtung und Begleitung von fachlichen Interaktionsprozessen der Lernenden durch die Lehrpersonen.

Beim Vergleich der beiden Sichtweisen fällt auf, dass Vertreterinnen und Vertreter des Konstruktivismus in der Mathematikdidaktik ihr Hauptaugenmerk auf die Entwicklung und Implementierung spezifischer Lernumgebungen richten. Eine vertiefte, theoretische Diskussion, wie mathematisches Lernen in Aushandlungsprozessen von Lernenden abläuft und wie das Individuum überhaupt aus sich heraus zu neuen mathematischen Einsichten gelangt, findet dabei nur begrenzt statt. Im Rahmen der interaktionistischen Forschung wird hingegen theoretisch relativ präzise beschrieben, wie Mathematikler-

nen stattfindet bzw. wie Schülerinnen und Schüler neues mathematisches Wissen durch Austausch mit anderen konstruieren und so in ihrer Entwicklung fortschreiten. Aufgrund der theoretischen Ausrichtung fehlt es aber an stoffdidaktischen Umsetzungen bzw. konkreten Vorschlägen für den Unterricht, die es Lehrpersonen ermöglichen, gemeinsames Mathematiklernen durch den Einsatz spezifischer Aufgaben oder Lernumgebungen gezielt anzuregen.

Nun soll an dieser Stelle keine Grundsatzdiskussion über die theoretische Begründbarkeit beider Ansätze vollzogen werden. Sowohl die Vorstellung, dass Lernen im Individuum zu verorten sei und durch individuelles Entdecken hervorgerufen werden müsse, als auch das Verständnis von Lernen als kollektivem Prozess, in dem Lernen durch den Austausch mit anderen initiiert wird, haben die mathematikdidaktische Forschung bereichert. Nach unserem Verständnis handelt es sich vielmehr um zwei Seiten der gleichen Medaille. Die in der Mathematikdidaktik weit verbreitete *Educational-Design-Research* (Wittmann 1998), welche substanzielle Lernumgebungen entwirft und erforscht, fußt explizit auf dem konstruktivistischen Lernverständnis. Entsprechende Aufgaben sind meist so konzipiert, dass sie in der Entdeckungsphase alleine bearbeitet werden (Ich-Phase) und eine kollektive Austauschphase meist eher zum Schluss als gemeinsame Reflexion in Partnerarbeit (Du-Phase) und/oder im Klassengespräch (Wir-Phase) erfolgt. Derzeitige Lehrmittel enthalten deshalb kaum Aufgaben, die bereits während der entdeckenden Bearbeitungsphase Kooperation initiieren. Insofern schließen wir mit der vorliegenden Konzeption „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ und den nun vorliegenden zwei Bänden eine Lücke, die die jeweiligen Grundannahmen zum Lernen beider theoretischer Ansätze der mathematikdidaktischen Forschung zu vereinen versucht. Wir wollen damit die vielfältigen bis dato veröffentlichten, auf einem konstruktivistischen Lernverständnis basierenden Publikationen nicht infrage stellen, sondern um reichhaltige Lernumgebungen für das Mathematiklernen in heterogenen Gruppen erweitern. In zwei Bän-

den (Band 1 mit dem Schwerpunkt 3. – 5. Schuljahr und Band 2 mit dem Schwerpunkt 5. – 7. Schuljahr) werden Lehrenden komplexe Aufgaben an die Hand gegeben, die es ermöglichen, kollektive Lernprozesse zu initiieren und so auch die zweite Seite der Medaille des Mathematiklernens – das kooperative Lernen von Mathematik – vermehrt in den eigenen Unterricht zu integrieren. Die Lernumgebungen im vorliegenden Buch sind deshalb so gestaltet, dass interaktives bzw. kooperatives Lernen im Kern der mathematischen Auseinandersetzung steht und dass eine individuelle Bearbeitung der in den Lernumgebungen auftretenden Aufgaben nicht sinnvoll oder sogar nicht möglich ist.

Zum Aufbau des Buches: Das Buch gliedert sich in einen theoretischen und einen praktischen Teil. Im theoretischen Teil werden in **Kapitel 1** zunächst die Grundannahmen eines konstruktivistischen Lernverständnisses skizziert und die Konsequenzen für die Konzeption (**Kapitel 2**) und Umsetzung (**Kapitel 3**) substanzieller Lernumgebungen aufgezeigt. Anschließend wird in **Kapitel 4** das diesem Buch zugrunde liegende interaktionistische Lernverständnis aufgearbeitet. In **Kapitel 5** positionieren wir die in diesem Band vertretene Konzeption zu kooperativem Lernen im Vergleich mit der bereits bestehenden diesbezüglichen Literatur.

Im Anschluss werden Konsequenzen der hier vorliegenden Konzeption „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ für den Aufbau und die Umsetzung der entwickelten **Lernumgebungen** abgeleitet und dargestellt. Auf ein weiteres zentrales Anliegen von Lehrenden, die Leistungen von Lernenden bei der Bearbeitung von Lernumgebung bewerten zu können, wird hier ebenfalls eingegangen.

Im zweiten, praktischen Teil des Buches folgen die Lernumgebungen unterteilt in die Themenbereiche *Zahlenraum erforschen* (**Teil 1**), *Addieren und Subtrahieren* (**Teil 2**), *Multiplizieren und Dividieren* (**Teil 3**) sowie *Mit Größen handeln* (**Teil 4**). Die konkrete Arbeit mit den kooperativen Lernumgebungen in diesem Buch wird durch Bilder, Arbeitsbeispiele und Transkripte aus den Erprobungen illustriert. Die Erprobung der Lernum-

gebungen fand weitgehend in jahrgangsübergreifenden Lerngruppen statt, um gerade auch Möglichkeiten der Umsetzung in Klassen mit großer Heterogenität aufzuzeigen.

5 Mathematiklernen in Kooperation

Liebe Leserin, lieber Leser, ja, wir können zählen. Und ja, Sie beginnen die Lektüre der theoretischen Ausführungen mit Kapitel 5. Dies wird Sie verwundern, jedoch stehen sich zwei Logiken im Aufbau dieses Teils des Buches gegenüber. Die eine, sequenzielle Logik lässt Kapitel 5 nach den Kapiteln 1 bis 4 folgen. Nach der anderen Logik positioniert sich Kapitel 5 als theoretischer Kern und Quintessenz des ersten Teils gleich zu Beginn dieses Buches. Wir haben uns für die letztere Reihenfolge entschieden. Hierdurch wird den schnellen Lesenden ermöglicht, sich nach der Lektüre von Kapitel 5 direkt den Lernumgebungen im Praxisteil zu widmen. Die praktischen Hinweise zur Arbeit mit den Lernumgebungen im Anschluss an den Grundlagenteil werden sie bei der Umsetzung unterstützen.

Ein interaktionistisches Lernverständnis (siehe Kapitel 4) rückt den Austausch über mathematische Bedeutungen und Inhalte und damit auch die Frage, wie sich solche Austauschprozesse unter Lernenden anregen lassen, ins Zentrum der Betrachtung. Kooperative Lernumgebungen mit problemhaltigem Charakter bieten sich hierzu an, führt deren Bearbeitung doch gleichzeitig zu einer hohen kognitiven Aktivierung der Beteiligten und zu einem Austausch der Lernenden über Lösungswege (Yackel/Cobb/Wood 1991, S. 406f.), z. B. in Form von kollektiven Argumentationen.

In der Unterrichtswirklichkeit besteht für viele Lernende unter dem Etikett des selbstorganisierten Lernens die Lernzeit jedoch zu einem großen Teil aus (Wochen-)Planarbeit. Selbstorganisiertes Lernen verspricht einerseits, den unterschiedlichen Lernbedürfnissen der Kinder und Jugendlichen Rechnung zu tragen, und andererseits, selbstgesteuertes Lernen zu fördern. Nicht selten wird die Arbeit mit vorgefertigten Plänen als Gegenentwurf zum lehrpersonenzentrierten Unterricht interpretiert und als geeignete Form der Individualisierung und Differenzierung angesehen. Dass dabei interaktives und damit auch

kooperatives Lernen weitgehend auf der Strecke bleibt, wäre leichter zu verschmerzen, wenn wenigstens das individuelle Lernen substanziell gefördert würde. Wo aber Pläne als abzuarbeitender Stoff verstanden werden, weicht das Lernen in Sinnzusammenhängen dem Generieren von Aufgabenlösungen. In diesem Fall verstehen Lernende ihre Ziele nicht inhaltlich, sondern messen ihr Lernen an der Anzahl erledigter Aufgaben oder beschriebener Seiten in einem Heft. Dass Lernende dabei im Sinn von Piaget „kognitiv irritiert“ werden und neues Wissen konstruieren, ist wohl eher die Ausnahme.

Auf der Suche nach der angesprochenen Balance zwischen individuellem und kooperativem Lernen gilt es, individuell bedeutsame und qualitativ hochwertige Lernunterstützung anzubieten. Eine solche Lernunterstützung lässt sich weder rezeptmäßig organisieren, durch Arbeits-

pläne gewährleisten noch digital verwalten. Sie entsteht situativ im Wechselspiel mit den Lernenden. Die an und für sich begrüßenswerte Stoßrichtung des selbstorganisierten Lernens (hin zu einem schülerinnen- und schülerzentrierten Unterricht) hat das Lernen nicht nur einsamer, sondern auch weniger lustvoll und mehr technokratisch werden lassen. Im Sinn der aus dem Lot geratenen Balance gilt es heute, kooperatives Lernen vermehrt in den Fokus zu nehmen.

5.1 Kooperatives Lernen: ein Überblick

Wer nach konkreten Anregungen zu kooperativem Lernen sucht, wird bei genauerem Hinsehen große Unterschiede in der Art der Aufgabenstellungen bzw. deren Umsetzung finden. Als gemeinsamen Kern definieren Konrad und Traub (2019) *Kooperatives Lernen* als

Konzeptionen kooperativen Lernens	5.2 Methodenzentriertes kooperatives Lernen <i>(u. a. nach Johnson / Johnson 1999; Konrad / Traub 2019; Borsch 2019)</i>	5.3 Kooperatives, dialogisches Lernen <i>(u. a. nach Gallin / Ruf 2011)</i>	5.4 Kooperatives Lernen aus der Sache heraus <i>(u. a. nach Röhr 1995; Yackel / Cobb / Wood 1991)</i>	5.5 Mathematisches Lernen kooperativ rahmen <i>(nach Wälti / Schütte / Friesen im vorliegenden Band und 2020a)</i>
Positionierung	allgemein didaktische Konzeption	deutsch- und mathematikdidaktische Konzeption	mathematikdidaktische Konzeption	mathematikdidaktische Konzeption
Charakteristik	Aufgaben werden in eine bestimmte Methode „eingefüllt“ und sind austauschbar. Dient oft zur Automatisierung fachlicher Grundfertigkeiten.	Reichhaltige Lernaufgaben und Lernumgebungen, welche individuell bearbeitet werden. Reflexiver Austausch in Lerntandems am Ende des individuellen Bearbeitungsprozesses und abschließend im Klassengespräch.	Problemhaltige Aufgaben führen zu aktiv-entdeckendem Lernen in Kooperation mit anderen. Die Aufgaben sind häufig auch alleine bearbeitbar.	Im Zentrum stehen substanzielle mathematische Inhalte, welche untrennbar mit den Aufgaben verbunden sind. Verbindung spielerischer und problemorientierter Aspekte. Zu fachlichen Anliegen gibt es eine „maßgeschneiderte“ Kooperation.
zentrale Merkmale der Aufgaben	Methoden beinhalten oft extrinsische Belohnungssysteme, wodurch positive Interdependenzen zwischen Lernenden und individuelle Verantwortlichkeiten entstehen.	Reichhaltige Aufgaben werden nach dem „Ich-Du-Wir-Prinzip“ geplant und durchgeführt.	Kooperatives Arbeiten erleichtert die Bearbeitung der problemhaltigen Aufgaben. Dadurch werden Lernende intrinsisch zur Kooperation motiviert.	Die Aufgaben sind so konstruiert, dass ihre Bearbeitung prinzipiell interaktiv und in der Regel spielerisch ist.
Beispiele	Gruppenpuzzle, Quiz, Wandtafel-Fußball	produktive Übungen, Aufgaben zum Problemlösen	produktive Übungen, Aufgaben zum Problemlösen	kooperative Lernumgebungen
Publikationen	Anregungen u. a. in Ratgebern zu kooperativem Lernen	seit ca. 1990 zahlreiche Lehrmittel und Begleitliteratur zu diesem Konzept	bislang nur wenige publizierte Lernumgebungen oder Lehrmittel	alle Lernumgebungen (auch in Band 1), vereinzelte Anregungen in Lehrmitteln

Übersicht zu verschiedenen Konzeptionen des kooperativen Lernens

eine Interaktionsform, bei der die beteiligten Personen gemeinsam und in wechselseitigem Austausch Kenntnisse und Fertigkeiten erwerben. Im Idealfall sind alle Gruppenmitglieder gleichberechtigt am Lerngeschehen beteiligt und tragen gemeinsam Verantwortung

(Konrad / Traub 2019, S. 5)

Aber wodurch zeichnen sich geeignete Aufgaben zum kooperativen Mathematiklernen aus und wie lassen sich diese in der Unterrichtspraxis inszenieren? In den Kapiteln 5.2 bis 5.4 skizzieren wir drei gängige Konzeptionen kooperativen Lernens. Unsere Synthese aus diesen Konzeptionen nennen wir „Mathematiklernen kooperativ rahmen“ und stellen sie in Kapitel 5.5 vor. Sie bildet die Basis der Lernumgebungen in diesem Band. Die Tabelle (S. 11) vermittelt einen ersten Überblick zu den in diesem Kapitel diskutierten Konzeptionen.

5.2 Methodenzentriertes kooperatives Lernen

Anregungen und Umsetzungsbeispiele zu einem methodenzentrierten kooperativen Lernen sind vielerorts zu finden. Diese sind meist allgemeindidaktischer Natur und nicht vom Fach her durchdacht. Wir sprechen an dieser Stelle von „methodenzentriertem“ kooperativen Lernen, um den Unterschied zu anderen Konzeptionen hervorzuheben. Kooperative Lernprozesse dieser Konzeptionen gründen sich nach Johnson und Johnson (1999), Green und Green (2007) und Borsch (2019) auf die fünf folgenden Gelingensbedingungen – die sogenannten „Basiselemente“.¹

- *Positive gegenseitige Abhängigkeit (Interdependenz)* zwischen Lernenden ist das erste Basiselement für ein Lernen, das eine Kooperation bereits während der Aufgabenbearbeitung notwendig macht. Der Austausch beschränkt sich also nicht auf eine mögliche Reflexion zu einer bereits erfolgten Lösung der Aufgabe. Um positive Interdependenz zu erzeugen, übernehmen die Gruppenmitglieder

in solch kooperativen Settings verschiedene Rollen oder die Verantwortung für Teilaufgaben. Durch Aussicht auf Belohnung der Gruppen oder durch Wettbewerb zwischen Gruppen kann das Gruppengefühl zusätzlich gestärkt werden (weitere Möglichkeiten siehe Borsch 2019, S. 28). Im Gegensatz dazu wird bei kompetitiven Settings zwischen Individuen die Person mit der besten Leistung bestimmt, was eine negative Interdependenz zwischen den Lernenden bewirken kann. Sie erreichen in Wettbewerbssituationen ihre Ziele auch oder gerade dann, wenn sie nicht mit anderen zusammenarbeiten und versuchen, diese zu „übertreffen“. Dies kann jedoch zu einer geringen Lernmotivation für Leistungsschwache und abnehmender Anstrengung bei sicherem Erfolg für Leistungsstarke führen (Johnson/Johnson 1999, S. 133 f.). Bei individualistischen Settings wiederum gibt es kaum Interdependenz zwischen den Schülerinnen und Schülern (Borsch 2019, S. 16 ff.).

- *Die individuelle Verantwortlichkeit* der Gruppenmitglieder hängt eng mit dem ersten Basiselement zusammen. Sie ist beispielsweise gegeben, wenn in kleinen Gruppen die individuellen Beiträge der Einzelnen zur Gesamtleistung sichtbar gemacht werden. Hierdurch werden alle Gruppenmitglieder zur aktiven Teilnahme an der Gruppenarbeit ermutigt und „Trittbrettfahrende“ vermieden (Borsch 2019, S. 29 f.).
- Das dritte Basiselement ist *die unterstützende Interaktion* (Borsch 2019, S. 30). Hilfestellungen und Ermutigungen der Lehrperson sowie der Schülerinnen und Schüler untereinander fördern eine Atmosphäre, in der Lernende Ideen einbringen oder Kritikpunkte ansprechen.
- *Die Reflexion über die Qualität der Gruppenarbeit* bedeutet, kooperative Verhaltensweisen auszuhandeln und einzufordern (Borsch 2019, S. 31). Kooperative Lernprozesse werden so sichtbar und können optimiert werden.
- Das fünfte und letzte Basiselement umfasst die kooperativen Fähigkeiten der Lernenden, die einen konstruktiven Umgang mit Kontrollversen ermöglichen (Borsch 2019, S. 31 ff.).

¹ Die einzelnen Basiselemente werden je nach Autorinnen und Autoren unterschiedlich benannt und werden hier in Anlehnung an Borsch (2019) wiedergegeben.

Hier wird eine der Herausforderungen kooperativen Lernens sichtbar: Kooperative Fähigkeiten sind zugleich Voraussetzung für gelingende Lernprozesse wie auch deren Ziel (Borsch 2019, S. 34).

Kooperatives Lernen nach Borsch (2019, S. 22) baut auf einem sozial-konstruktivistischen Lernverständnis auf, ist jedoch allgemein methodisch und nicht speziell für den Mathematikunterricht entwickelt worden. Die meisten entsprechenden Veröffentlichungen bieten einen Strauß von kooperativen Methoden an (z. B. Gruppenpuzzle), mithilfe derer in Lerngruppen oder im Klassenverband gearbeitet wird (Green/Green 2006; Konrad/Traub 2019). Da das Fach – in unserem Fall die Mathematik – im Nachgang in die Methode „eingefüllt“ wird und somit Aufgaben bzw. Rechnungen von der Lehrperson bindend für die Lernenden vorgegeben werden, sind individuelle fachliche Zugänge in diesem Setting kaum vorgesehen.² Die Kooperationsanlässe ergeben sich aufgrund von methodisch vorgegebenen „Regeln“. Die Lernenden reagieren nicht auf Ideen oder Einfälle der Mitschülerinnen und Mitschüler, sondern bearbeiten in einem sozialen Umfeld die gleichen Aufgaben, die sonst in individuellen Settings auf Arbeitsblättern stehen. Wir wollen diese Methoden nicht weiter kritisch diskutieren, sie führen aber nicht zu kooperativem Lernen in dem hier intendierten Sinn. Da die Methode und nicht das Fach im Zentrum steht, sind die Aufgaben austauschbar und damit auch die dahinterliegende Mathematik. Die verwendeten Aufgaben können ebenso gut als Päckchen ohne innermathematische Struktur oder in einigen Fällen sogar als „bunte Hunde“ (Wittmann 1990) individuell bearbeitet werden. Die bunten Hunde dienen genau wie das Gewinnen in einem Spiel als externes Belohnungssystem, welches auch in einem anderen Fach Verwendung finden kann. Die Basiselemente der „positiven Interdependenz“ und der „individuellen Verantwortlich-

keit“ sind jedoch auch für die Aufgaben in diesem Band Leitlinien zur Konstruktion von Aufgabenstellungen zum kooperativen Lernen. So wird verhindert, dass bei Aufgaben gemeinsames Arbeiten nur eine – oft aufgesetzte – Option ist, die mit Sicherheit von einigen Schülerinnen und Schülern genutzt wird, aber oft zu einem „Nebeneinanderher-Arbeiten“ (Naujok 2000, S. 174) ohne gemeinsamen Austausch führt.

5.3 Kooperatives, dialogisches Lernen

Das kooperative dialogische Lernen ist im Gegensatz zur ersten Konzeption spezifisch fachdidaktisch geprägt. Seine Vordenker, Peter Gallin und Urs Ruf, prägten dafür in den 1990er Jahren den Begriff *dialogisches Lernen* (Ruf/Gallin 2011). Die Unterrichtskonzeption entwickelten sie zunächst für ihren eigenen Deutsch- und Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Die Autoren heben explizit die Bedeutung des eigenständigen Lernens von Schülerinnen und Schülern und deren Interaktion für das Mathematiklernen hervor (Ruf/Gallin 2011). So erfreut sich die Konzeption des dialogischen Lernens, der Gallin und Ruf unter dem eingängigen Titel „Ich, Du, Wir“ zum Durchbruch verholfen haben, einer großen Akzeptanz in der mathematikdidaktischen Community.

Dabei begegnen Schülerinnen und Schüler dem Stoff möglichst authentisch und arbeiten selbstständig an ihrem gedanklichen „Reisetagebuch“. Lösungsansätze werden im Dialog mit der Lehrperson und anderen Lernenden weiterentwickelt, bevor schließlich auch die hinter der Aufgabe stehenden kulturellen Normen diskutiert werden. In der Konzeption des dialogischen Lernens sind somit drei Phasen angedacht (PiK AS 2010; Ruf/Gallin 2011):

- Zunächst geht es in der Ich-Phase um eine individuelle Auseinandersetzung mit der Aufgabe. In dieser Phase entstehen Eigenproduktionen. Gallin und Ruf stellen hierfür spezifische Lernangebote bereit, die von den Lernenden aufgrund ihrer individuellen Fähigkeiten genutzt werden. Diese sind so offen, dass sie unterschiedliche Lösungswege zulassen und da-

² Eine Ausnahme bietet Rothenbächer (2016), die gezielt substantielle Lernumgebungen mit diesen allgemeinen Methoden kombiniert, um kooperatives Lernen im inklusiven Mathematikunterricht zu fördern.

mit auch für heterogene Lerngruppen geeignet sind. Das Kernstück der Unterrichtskonzeption sind die Reisetagebücher, in welchen sich die Lernenden in ihrer individuellen Sprache „singulär“ mit Fragestellungen auseinandersetzen, um ihre Fachkompetenz schreibend zu erweitern (Ruf/Gallin 2011, S. 34f.).

- Die zu einem Auftrag entstehenden Arbeiten der Lernenden werden in der Du-Phase mit Mitschülerinnen und Mitschülern ausgetauscht und diskutiert. Die Auseinandersetzung mit anderen und der Vergleich unterschiedlicher Eigenproduktionen unterstützt das Klären eigener Standpunkte, hilft beim Integrieren von Gedanken der Mitschülerinnen und Mitschüler, wirft neue Fragen auf und schafft Raum für die dritte Phase.
- In der Wir-Phase wird mit der ganzen Klasse das allgemeingültige „Reguläre“ herausgearbeitet und mit kulturell feststehenden Normen verbunden. Die Lehrperson leitet dabei von den individuellen singulären Produktionen der Lernenden zum Regulären hin.

Die Konzeption des dialogischen Lernens besteht u. a. dadurch, dass die Leistungsbewertung in den Unterricht integriert wird. „Im Unterschied zum ‚monologischen‘ Unterricht, der sich vor allem im Arbeitsfeld des fachlichen Wissens und Könnens abspielt und jede Lernphase mit einer Prüfung abschließt, orientiert sich das dialogische Lernmodell an einem erweiterten Leistungsbegriff“ (Gallin/Ruf 2011, S. 234). „Das Nachdenken über Kriterien und Bewertungen der erbrachten Leistungen [...] wird so [...] zu einem selbstverständlichen und integralen Bestandteil des Lehrens und Lernens“ (ebd., S. 233). Es stellt sich nicht in erster Linie die Frage, „ob die Lernenden das Angebot im erwarteten Sinne nutzen, sondern ob sie bei der Nutzung des Angebots aus ihren singulären Möglichkeiten das Beste machen“ (ebd., S. 236).

Das hier beschriebene „Ich-Du-Wir-Prinzip“ des dialogischen Lernens wird häufig als zielführende Methode mit kooperativem Lernen im Mathematikunterricht gleichgesetzt. Jedoch sind auch beim dialogischen Lernen, das ja explizit

auf Austausch mit anderen setzt, individuelle Entdeckungen und nicht gemeinsames Erleben der grundlegende Ausgangspunkt des Lernens der Einzelnen.

5.4 Kooperatives Lernen aus der Sache heraus

Wie auch bereits die Konzeption des kooperativen, dialogischen Lernens (Kapitel 5.3) ist „kooperatives Lernen aus der Sache heraus“ (Röhr 1995) eng mit jeweiligen mathematischen Inhalten verknüpft. Die Motivation, kooperativ zu lernen, ergibt sich aus der Bearbeitung interessanter und problemhaltiger Aufgaben, welche zu gemeinsamem Nachdenken, Diskutieren, Argumentieren und Entwickeln von Lösungswegen anregen (Yackel/Cobb/Wood 1993, S. 46; Röhr 1995, S. 74f.). Die Aufgaben sind somit mathematisch-fachlich und nicht methodisch gerahmt.

Röhr (1995, S. 75) spricht in diesem Zusammenhang von „kooperativem Lernen aus der Sache heraus“. Nach Röhr stehen folgende Kriterien im Zentrum solcher Aufgaben:

- 1 Die Aufgabe soll beziehungsreich sein.
- 2 Die Aufgabe soll aktiv-entdeckendes Lernen und mehrere Lösungswege ermöglichen.
- 3 Die Aufgabe soll komplex sein.
- 4 Es sollen Lösungsbeiträge auf verschiedenen Niveaus und der Einsatz unterschiedlicher Fertigkeiten und Fähigkeiten möglich sein.
- 5 Die Lösung der Aufgabe wird durch die Zusammenarbeit mehrerer Schüler erleichtert.

(Röhr 1995, S. 76)

Diese Kriterien für kooperationsfördernde Aufgaben sind hilfreich für die Konstruktion neuer Aufgabenstellungen bzw. für die Aufbereitung von Aufgaben für den Unterricht. Allerdings zielt lediglich Kriterium 5 direkt auf Kooperation. Die anderen 4 Kriterien charakterisieren reichhaltige Aufgaben und ähneln den Kriterien für natürlich-differenzierende Aufgabenstellungen (siehe Kapitel 2). Die Aufgaben werden zu Beginn teilweise individuell, teilweise kooperativ bearbeitet. Häsel-Weide (2016), die Lernumgebungen für kooperatives Lernen mit einem ähnlichen Ansatz

entwickelt, unterscheidet hierfür zwei kooperative Settings. Beim kooperativen Setting „Weggabebelung“ (Häsel-Weide 2016, S. 85) sind zunächst eigenständige Bearbeitungen vorgesehen, bevor die Lernenden sich gemeinsam über ihre Lösungen austauschen und weitere Aufgaben bearbeiten. Beim zweiten kooperativen Setting „Wippe“ arbeiten die Schülerinnen und Schüler von Beginn an gemeinsam an einer Lernumgebung (Häsel-Weide 2016, S. 84).

5.5 Mathematiklernen kooperativ rahmen

Die erste der drei dargestellten Konzeptionen ist methodisch ausgerichtet und sieht die Mathematik lediglich als einen möglichen Anwendungsfall (siehe Kapitel 5.2). Die Aufgabenbeispiele bei den anderen beiden Konzeptionen (siehe Kapitel 5.3 und 5.4) sind nur bedingt als Anregung zu kooperativem Lernen zu werten, da die Aufgaben zumindest in großen Teilen allein bearbeitbar sind oder mit einer umfassenden Eigentätigkeit zu Beginn des Bearbeitungsprozesses starten.

Für die Entwicklung der Lernumgebungen in diesem Band gehen wir von einer Konzeption des kooperativen Lernens aus, welches wir *Mathematiklernen kooperativ rahmen* nennen (vgl. auch Wälti / Schütte / Friesen 2020 a/b; Friesen/Schütte / Wälti 2020). Wie der Name zeigt, steht Mathematiklernen explizit im Zentrum dieser Konzeption und innerhalb des gegebenen kooperativen

Rahmens wird ein produktiver Austausch zwischen den Lernenden bereits während der Aufgabebearbeitung initiiert.

Folgende Merkmale charakterisieren die Konzeption:

- Die Lernumgebungen gehen von substanziellen mathematischen Fragestellungen aus (siehe auch Kapitel 5.3 und 5.4). Die für diese mathematischen Inhalte spezifisch vorgeschlagenen Interaktionsformen lassen sich nicht auf einen beliebigen anderen mathematischen Kontext übertragen.
- Die Lernumgebungen sind für jahrgangsgemischte Lerngruppen konzipiert und können daher auch in stark leistungsheterogenen Jahrgangsklassen eingesetzt werden.
- Die Komplexität der Lernumgebungen ermöglicht vielfältige Bearbeitungswege. Lernende bearbeiten entsprechend ihrer individuellen Fähigkeiten und Neigungen die Aufgaben auf unterschiedlichen Niveaus.
- Die Lernumgebungen zielen auf positive Interdependenz zwischen den Lernenden (siehe Kapitel 5.2) und machen Kooperation unverzichtbar. Sie werden daher in Lerntandems oder Gruppen bearbeitet.
- Die Bearbeitung der Lernumgebungen erfolgt meist spielerisch. Zu eher kompetitiv ausgerichteten Lernumgebungen existiert in der Regel eine kooperative Variante oder zumindest Vorschläge für eine teil-kooperative Be-

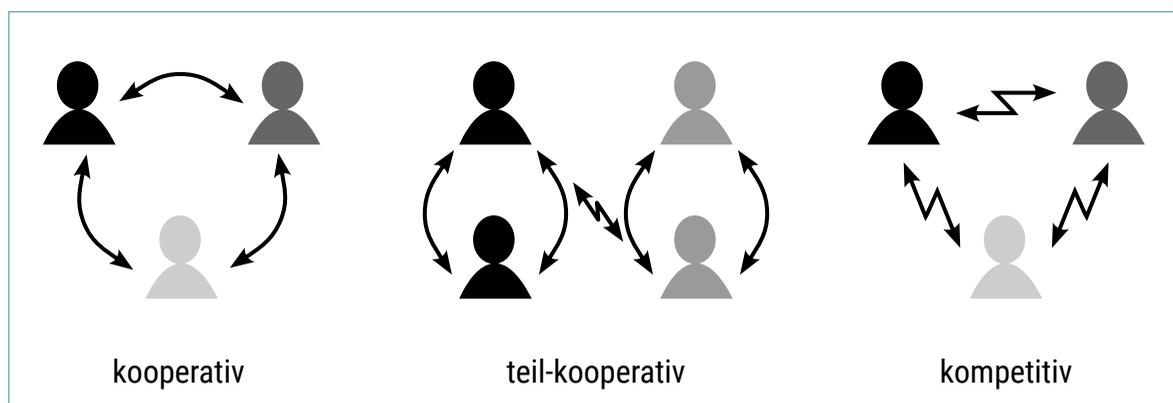


Abb. 1: *Mathematiklernen kooperativ rahmen* ermöglicht ein Kontinuum von kooperativen, teil-kooperativen und kompetitiven Varianten

arbeitung in Lernteams.³ Somit gibt es in den Lernumgebungen ein Kontinuum von kooperativen, teil-kooperativen bis hin zu kompetitiven Aufgabenvarianten.

- Die Bearbeitung sowie der Spielverlauf der Lernumgebungen sind von strategischem Denken und stochastischen Elementen (wie beispielsweise Würfeln oder Kartenziehen) geprägt. Wie bei klassischen strategischen Spielen (z. B. Vier gewinnt oder NIM-Spiel) werden Fähigkeiten wie das konsequente Anwenden von Regeln, das gemeinsame und selbstständige Suchen nach Lösungen und das Äußern von Vermutungen gefördert (vgl. Möller/Pönicke 1992).
- Jede Lernumgebung enthält Vorschläge zur Reflexion bzw. Auswertung. Die vorgeschlagenen – meist weiterführenden – Aufgabenstellungen sind vor allem produktive Übungen und richten sich an Lerngruppen oder Individuen.

Selbstverständlich sind Lernumgebungen, die in unserem Sinn Kooperation voraussetzen, auch in anderen Publikationen zu finden: so zum Beispiel in Röhr (1995), Gysin (2018) und Mayer (2019). Jedoch sind die verwendeten Aufgabenbeispiele dort meist auch individuell ohne Kooperation lösbar, weswegen kooperatives Lernen nicht zwingend dadurch initiiert wird. Beispiele für Aufgaben, die Kooperation notwendig machen, sind unter anderem Lernumgebungen nach dem oben genannten kooperativen Setting „Wippe“ aus Häsel-Weide (2016), „Rechenduette“ und „Koproduktionen“ aus Nührenböcker und Pust (2006), einige Aufgaben aus Röhr (1995) wie die Aufgaben in Kapitel 4.2.1.5 „Rechnen mit Geld“ (S. 96 f.) oder 4.2.4.3 „Gebäudekomplexe“ (S. 129 ff.) sowie einige Lernangebote aus dem Lehrwerk *MATHWELT 2* (Wälti/Luginbühl/Berger/Hübner 2018a, 2018b).

In welcher Gewichtung die Aufgabenstellungen im Unterricht umgesetzt werden, hängt von der Lerngruppe und den Prioritäten der Lehrperson ab. Eine betont kompetitive Ausrichtung der Aufgaben würde jedoch das Ziel dieses Buches ad absurdum führen und erscheint nur in Ausnahmefällen empfehlenswert. Sinnvoll ist es, von Anfang an auf Kooperation zu setzen oder bei kompetitiven Varianten nach dem gemeinsamen Spielen einen Austausch in Gruppen über mögliche Gewinnstrategien anzuregen. Der Fokus einer Gruppe liegt dann auf der gemeinsamen Suche nach Strategien zum Gewinnen und nicht auf individuellem Gewinnstreben.

Bei den hier vorgestellten kooperativ gerahmten Lernumgebungen werden häufig drei Grundbedürfnisse der Lernenden gleichzeitig befriedigt, die in der Selbstbestimmungstheorie von Deci und Ryan (2009) zentral für gemeinsames Lernen sind: das Erleben von Kompetenz und Autonomie sowie soziale Eingebundenheit. Diese drei permanenten und kulturübergreifenden Grundbedürfnisse des Menschen gelten gemäß Deci und Ryan als Säulen intrinsischer Motivation. In den hier vorliegenden Lernumgebungen soll allen drei Säulen entsprochen werden:

- der sozialen Eingebundenheit durch die Interaktion mit anderen,
- dem Bedürfnis nach Autonomie durch zahlreiche Gelegenheiten, innerhalb der Aufgabenbearbeitung individuell unabhängig entscheiden zu dürfen, und
- dem Bedürfnis nach Kompetenz, indem (gemeinsam) fachlich begründete Ziele erreicht werden (vgl. auch Kapitel 4.7 im praktischen Teil im Band für das 5. – 7. Schuljahr).

Liebe Leserin, lieber Leser, wie zu Beginn des ersten Teils dieses Buches – den theoretischen Grundlagen – bereits ausgeführt, ergeben sich an dieser Stelle für Sie zwei Möglichkeiten: Sie können nach der Lektüre von Kapitel 5 direkt in den zweiten Teil des Buches – den Lernumgebungen – springen. Praktische Hinweise zur Arbeit mit den Lernumgebungen finden Sie in Kapitel 6 der vorliegenden theoretischen Ausführungen. Oder aber Sie widmen sich auch den weiteren theoretischen Ausführungen und führen Ihre Lektüre nun mit Kapitel 1 fort.

³ Diese Form der Organisation weist auch Ähnlichkeiten zum von Borsch (2019) vorgeschlagenen Wettbewerb zwischen den einzelnen Gruppen auf, welcher positive Interdependenz zwischen Gruppenmitgliedern fördert.

1 Konstruktivistisches Lernverständnis

Die derzeit wohl verbreitetste Vorstellung von Lernen basiert auf lerntheoretischen Grundlagen des Konstruktivismus. Danach lernt das Individuum auf Basis bereits entwickelter individueller innerer Schemata. Es deutet und interpretiert Ereignisse oder Informationen der es umgebenden Welt auf Basis der bereits bestehenden eigenen inneren Schemata. Diese Prozesse können durch die Außenwelt gestört werden, wodurch Veränderung angeregt wird. Treten Widersprüche auf beim Versuch, Neues mit Altem abzugleichen, versucht das Individuum, diese durch die Konstruktion neuer Schemata oder Modulierung bereits vorhandener „alter“ Schemata aufzulösen – es schreitet so in der kognitiven Entwicklung voran (siehe u. a. Entwicklungstheorien von Piaget 1972).

Lernen, insbesondere das für diesen Band maßgebende Mathematiklernen, wird gemäß dem konstruktivistischen Lernverständnis als ein ausschließlich monologischer Prozess im Individuum selbst verortet. Das Außen bzw. die Interaktion mit anderen stellt eine nachgeordnete Kategorie dar, die eine individuelle Entwicklung beeinflussen kann, aber nicht muss. Im Sinne des Konzeptes des „kognitiven Konfliktes“ (Piaget 1985) führt das Außen bzw. die soziale Interaktion zur Irritation der individuellen Schemata, die grundsätzlich monologische Orientierung des Lernens wird damit jedoch nicht aufgegeben.

Vor diesem theoretischen Blickwinkel lässt sich die heute gängige Orientierung am aktiv-entdeckenden Lernen (Winter 2016) verstehen, nach der Lernende sich einen Unterrichtsgegenstand selbstständig erarbeiten, um mathematische Lernfortschritte zu vollziehen und mathematisches Wissen zu konstruieren (vgl. u. a. Wittmann 1990, S. 162 f.). Die Vertreterinnen und Vertreter einer konstruktivistischen Lernorientierung grenzen sich bewusst von einer behavioristisch geprägten Orientierung des Lernens durch Belehrung ab. Ein behavioristisch geprägtes „passivistisches“ Verständnis von Lernen erfreute sich bis in die Mitte der 1980er Jah-

re in der mathematikdidaktischen Forschung großer Beliebtheit und stellte auch lange danach noch eine bestimmende Grundorientierung des Lernens in der deutschsprachigen Schule dar. Nach Wittmann (1990) lässt sich ein behavioristisches Lernverständnis mit der Grundidee beschreiben, dass der kindliche Geist über vorab durchgeplante und kleinschrittig strukturierte Steuerung von außen gezielt mit Wissen „angereichert“ werde und dieses „vorgefertigte“ Wissen vor allem passiv aufnehme. Im Gegensatz dazu steht das Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens, zu welchem Winter (2016) folgende These aufstellt:

Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller [...], je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckenden Unternehmungen beruht.

(Winter 2016, S. 1)

Aufgaben sind somit als Lernangebote bzw. „Lernermöglichkeiten“ für Schülerinnen und Schüler zu verstehen. Erst eine aktive eigenständige Auseinandersetzung mit dem äußeren Impuls bzw. der Aufgabenstellung und einer dadurch angeregten Modifikation der individuellen kognitiven Schemata führen zur Aneignung des intendierten Lerngegenstands (Winter 2016, S. 2 f.). Die Herausforderung für Lehrende besteht also darin, aktiv-entdeckendes Lernen im Unterricht zu ermöglichen. Gut vorbereitete und passend gewählte Aufgabenstellungen sind dabei Winter folgend von zentraler Bedeutung (Winter 2016, S. 3 f.).

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik spiegelt sich das konstruktivistische Lernverständnis besonders im Educational-Design-Research-Ansatz wider. Es werden Lernumgebungen entwickelt, um gezielt individuelle Konstruktionsprozesse von Schülerinnen und Schülern zu evozieren. Zu nennen sind hier unter anderem Arbeiten von Wittmann und Müller (1990), Hengartner, Hirt und Wälti (2006), Hirt und Wälti (2008), Krauthausen und Scherer (2010) sowie Nührenbörger und Pust (2006).

2 Mathematische Lernumgebungen – eine Bestandsaufnahme

Die Gestaltung von Lehr-Lernprozessen auf Grundlage eines konstruktivistischen Lernverständnisses (siehe Kapitel 1) macht differenzierende Unterrichtsettings notwendig, um passend für alle Lernenden Anregungen und Impulse zu setzen. Diese dienen als „Irritationen“, um die Anpassung bereits bestehender oder die Konstruktion neuer kognitiver Schemata zu initiieren. Wird aufgrund einer zunehmenden Heterogenität innerhalb von Lerngruppen die Bandbreite der Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler immer größer, verstärkt dies die Notwendigkeit der Differenzierung. Schlussendlich führt das im Extremfall zu einer Individualisierung, bei der für jedes Kind individuell zugeschnittene Aufgaben bzw. Anforderungen erstellt werden. Auch aus konstruktivistischer Sicht wird die mit der Individualisierung einhergehende zunehmende Vereinzelung von Lernenden kritisch hinterfragt (Krauthausen/Scherer 2014, S. 25 ff.). So etablierte sich seit den 1990er Jahren in Deutschland und der Schweiz eine spezielle Form der Differenzierung, die *natürliche Differenzierung* (Wittmann/Müller 1990; Hirt/Wälti 2008; Krauthausen/Scherer 2010b).

Das Konzept der natürlichen Differenzierung lässt sich besonders gut mit reichhaltigen mathematischen Aufgaben, sogenannten *substanziellen Lernumgebungen*, umsetzen (Krauthausen/Scherer 2014, S. 110). Sie eignen sich aufgrund ihrer Offenheit und fachlichen Komplexität ausdrücklich auch für heterogen zusammengesetzte Lerngruppen und lassen sich als eine mögliche Antwort auf das Problem der Vereinzelung durch Individualisierung in großer Heterogenität deuten. Die intensive Entwicklung und Erforschung vorwiegend arithmetischer Lernumgebungen im Rahmen des mathematikdidaktischen Educational-Design-Research-Ansatzes in den letzten Jahren bestätigt, dass der Unterricht mit Lernumgebungen in der Mathematik seit über 20 Jahren „state of the art“ ist (Wittmann 1998; Selzer/Walther 1999).

Im Folgenden soll zunächst das Konzept der natürlichen Differenzierung (Kapitel 2.1) näher

erläutert werden, bevor wir in Kapitel 2.2 auf substanzielle Lernumgebungen eingehen und auf konkrete Beispiele verweisen.

2.1 Natürliche Differenzierung

Die vier Merkmale, die das Konzept der natürlichen Differenzierung charakterisieren, sind:

1. dass die gesamte Lerngruppe das gleiche Lernangebot erhält,
2. dass das Lernangebot inhaltlich ganzheitlich und hinreichend komplex ist,
3. dass die Lernenden Freiheitsgrade in ihren Bearbeitungswegen wahrnehmen können und
4. dass soziales Lernen von- und miteinander stattfindet.

(Vgl. Krauthausen/Scherer 2014, S. 50 f.)

Mit dem Bereitstellen des gleichen Lernangebots für die gesamte Lerngruppe (**Merkmale 1**) wird verhindert, dass es – wie bei einer inneren Differenzierung durch individuelle Aufgabenstellungen – zu einer Vereinzelung der Lernenden kommt (siehe u. a. Krauthausen/Scherer 2014, S. 25 ff.). Selbst in Lerngruppen mit einer konzeptionell erweiterten Heterogenität, wie z. B. bei jahrgangsübergreifenden Klassen, ist das gemeinsame Arbeiten an Aufgabenstellungen möglich (vgl. u. a. Nührenböcker/Pust 2006, S. 46). Damit es dabei nicht zu einer Über- oder Unterforderung einzelner Lernenden kommt, wird mit inhaltlich ganzheitlichen und hinreichend komplexen Aufgaben gearbeitet (**Merkmale 2**). Durch die Komplexität der Aufgaben ist es möglich, dass die Lernenden verschiedene Bearbeitungs- und Lösungswege einschlagen bzw. die jeweilige Aufgabenstellung unterschiedlich „tief“ durchdringen und trotz ihrer unterschiedlichen Fähigkeiten und Interessen an denselben Aufgabenstellungen gewinnbringend arbeiten (Nührenböcker/Verboom 2005, S. 4). Bei der natürlichen Differenzierung können die Lernenden während der Bearbeitung der Aufgabenstellungen Hilfs- und Arbeitsmittel selbstständig wählen und sind in Bezug auf Darstellungsweisen und Lösungswege frei (**Merkmale 3**).