



Editorial Universidad de Antioquia

# Electromagnetismo

2.<sup>a</sup> edición

Alonso Sepúlveda Soto

Ciencia y Tecnología

# Electromagnetismo

2.<sup>a</sup> edición

*Alonso Sepúlveda Soto*

Colección *Ciencia y Tecnología*

© Herederos de Alonso Sepúlveda Soto

© Editorial Universidad de Antioquia®

ISBN: 978-958-714-957-9

ISBNe: 978-958-714-958-6

Segunda edición: diciembre del 2020

Primera edición con la Editorial Universidad de Antioquia: 2009

Hecho en Colombia / Made in Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin autorización escrita de la Editorial Universidad de Antioquia®

Editorial Universidad de Antioquia®

(+57) 4 219 50 10

editorial@udea.edu.co

<http://editorial.udea.edu.co>

Apartado 1226. Medellín, Colombia

Imprenta Universidad de Antioquia

(+57) 4 219 53 30

imprenta@udea.edu.co

El contenido de la obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. El autor asume la responsabilidad por los derechos de autor y conexos contenidos en la obra, así como por la eventual información sensible publicada en ella.

*Para  
mis amigos de mesa en Carlos E:  
Castellanos, Jolopez, Lorenzo,  
Yepes, Orlando y Juan Malo,  
como brindis  
por las antiguas noches  
de física y bohemia*

# Contenido

|  |      |
|--|------|
| Prólogo .....                                      | xvii |
| <b>1. Electrostática</b> .....                     | 1    |
| 1.1. Ley de Coulomb .....                          | 1    |
| 1.2. Campo eléctrico.....                          | 4    |
| 1.2.1. Distribuciones de carga .....               | 5    |
| 1.3. Ley de Gauss .....                            | 7    |
| 1.3.1. Ley de Gauss en forma diferencial.....      | 9    |
| 1.4. Potencial electrostático.....                 | 9    |
| 1.5. Ecuación de Poisson .....                     | 10   |
| 1.6. El campo electrostático es conservativo ..... | 10   |
| 1.6.1. Recalibración del potencial .....           | 13   |
| 1.7. Ecuaciones de campo.....                      | 15   |
| 1.8. Cálculo de campos .....                       | 15   |
| 1.9. *Campo autoconsistente.....                   | 18   |
| 1.10. Discontinuidades en los campos.....          | 19   |
| 1.11. Unicidad del potencial.....                  | 22   |
| <b>2. Función de Green</b> .....                   | 24   |
| 2.1. Solución al problema del potencial .....      | 24   |
| 2.1.1. Intermezzo.....                             | 26   |
| 2.2. Expansión en funciones ortonormales .....     | 28   |
| 2.2.1. Bases discretas.....                        | 28   |
| 2.2.2. Bases continuas .....                       | 31   |
| 2.3. Evaluación de la función de Green .....       | 32   |
| 2.3.1. Problema unidimensional .....               | 32   |
| 2.3.2. Problema bidimensional .....                | 38   |
| 2.3.3. Una lámina infinita.....                    | 43   |
| 2.3.4. Problema bidimensional polar .....          | 45   |
| 2.3.5. El problema tridimensional .....            | 47   |

|   |     |
|---|-----|
| <b>3. Imágenes electrostáticas</b> .....  | 53  |
| 3.1. Carga frente a un plano equipotencial.....   | 53  |
| 3.2. Carga puntual frente a una esfera.....   | 57  |
| 3.2.1. Carga puntual $q$ en $r'$ frente a una esfera conductora<br>cargada y aislada..... | 60  |
| 3.2.2. Carga puntual $q$ frente a una esfera conductora<br>equipotencial.....             | 61  |
| 3.2.3. Esfera conductora colocada en un campo $E$ uniforme.....                           | 61  |
| <b>4. Ecuaciones de Laplace y Poisson</b> .....   | 64  |
| 4.1. Ecuación de Laplace.....   | 64  |
| 4.1.1. Coordenadas cartesianas en 2D.....   | 64  |
| 4.1.2. Coordenadas polares.....   | 69  |
| 4.1.3. Coordenadas cartesianas en 3D.....   | 75  |
| 4.1.4. Coordenadas esféricas.....   | 78  |
| 4.2. Solución de la ecuación de Poisson.....  | 97  |
| 4.2.1. Coordenadas cilíndricas.....   | 107 |
| 4.2.2. *Coordenadas esferoidales oblatas.....   | 121 |
| <b>5. Multipolos eléctricos</b> .....   | 127 |
| 5.1. Expansión multipolar.....  | 127 |
| 5.1.1. Multipolos cartesianos.....  | 127 |
| 5.1.2. Expansión en armónicos esféricos.....  | 132 |
| 5.2. Energía potencial electrostática.....  | 137 |
| 5.2.1. Distribución discreta.....   | 137 |
| 5.2.2. Distribución continua.....   | 139 |
| 5.3. Expansión multipolar de la energía.....  | 142 |
| 5.4. Expansión multipolar de la fuerza.....   | 145 |
| 5.5. Expansión multipolar del torque.....   | 146 |
| 5.6. Una versión simplificada.....  | 147 |
| <b>6. Electrostática macroscópica</b> .....   | 149 |
| 6.1. Polarización.....  | 149 |
| 6.2. Campo en el exterior de un dieléctrico.....  | 150 |
| 6.3. Campo en el interior de un dieléctrico.....  | 153 |
| 6.4. Ecuaciones de campo en dieléctricos.....   | 153 |
| 6.5. Susceptibilidad eléctrica.....   | 154 |
| 6.6. Condiciones de frontera.....   | 156 |
| 6.6.1. Dieléctricos e imágenes.....   | 157 |
| 6.6.2. Función de Green con semiespacios dieléctricos.....                                | 161 |
| 6.6.3. Energía potencial en presencia de dieléctricos.....                                | 165 |
| 6.7. Energía de un dieléctrico.....   | 168 |
| 6.8. Condensadores y capacitancia.....  | 170 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>7. Magnetostática</b> .....                                    | 172 |
| 7.1. Leyes de Ampère y Biot-Savart .....                          | 172 |
| 7.2. Ecuaciones de campo .....                                    | 176 |
| 7.2.1. La unidad de corriente .....                               | 181 |
| 7.3. Invarianza gauge .....                                       | 182 |
| 7.4. El problema de Green .....                                   | 183 |
| <b>8. Multipolos magnéticos</b> .....                             | 190 |
| 8.1. Expansión multipolar .....                                   | 190 |
| 8.1.1. Dipolo magnético .....                                     | 193 |
| 8.2. Expansión multipolar de la fuerza .....                      | 194 |
| 8.3. Expansión multipolar del torque .....                        | 195 |
| <b>9. Magnetostática macroscópica</b> .....                       | 196 |
| 9.1. Potencial vectorial .....                                    | 196 |
| 9.2. Ecuaciones de campo .....                                    | 199 |
| 9.3. Condiciones de frontera .....                                | 200 |
| 9.4. Cálculo de potenciales y campos .....                        | 201 |
| 9.4.1. Potencial escalar magnético .....                          | 201 |
| <b>10. Ecuaciones de Maxwell</b> .....                            | 212 |
| 10.1. Ley de inducción de Faraday .....                           | 213 |
| 10.1.1. Inducción mutua .....                                     | 215 |
| 10.1.2. Autoinducción .....                                       | 216 |
| 10.2. Fuerza de Lorentz y ley de inducción .....                  | 217 |
| 10.3. Forma diferencial de la ley de inducción .....              | 218 |
| 10.4. Energía del campo magnético .....                           | 220 |
| 10.4.1. Energía magnética de un circuito .....                    | 222 |
| 10.5. Conservación de la carga eléctrica .....                    | 223 |
| 10.6. Corriente de polarización .....                             | 225 |
| 10.7. Ecuación de Ampère-Maxwell .....                            | 226 |
| 10.8. Forma integral de la cuarta ecuación .....                  | 228 |
| 10.9. Ecuaciones de Maxwell .....                                 | 231 |
| 10.9.1. Forma diferencial .....                                   | 231 |
| 10.9.2. Forma integral .....                                      | 232 |
| 10.10. Potenciales electrodinámicos .....                         | 233 |
| 10.11. Gauges y potenciales .....                                 | 235 |
| 10.12. Medios materiales lih .....                                | 236 |
| 10.12.1. Gauge de Lorenz .....                                    | 236 |
| 10.12.2. Gauge de Coulomb .....                                   | 237 |
| 10.13. *Potenciales y mecánica cuántica .....                     | 240 |
| 10.14. Ecuaciones de onda para E y B .....                        | 242 |
| 10.15. Vectores de Hertz .....                                    | 247 |
| 10.16. *Ley de inducción de Faraday y espiras en movimiento ..... | 248 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>11. Ondas y funciones de Green</b> .....                    | 251 |
| 11.1. Unicidad y ecuación de ondas .....                       | 251 |
| 11.2. Ecuación de ondas homogénea .....                        | 253 |
| 11.2.1. Coordenadas cartesianas .....                          | 254 |
| 11.2.2. Coordenadas esféricas .....                            | 256 |
| 11.2.3. Coordenadas cilíndricas .....                          | 259 |
| 11.3. Ecuación de ondas inhomogénea.....                       | 260 |
| 11.3.1. El método de Fourier.....                              | 262 |
| 11.4. Espacio-tiempo infinito .....                            | 264 |
| 11.4.1. Condición de radiación .....                           | 267 |
| 11.5. Función de Green-Helmholtz .....                         | 268 |
| 11.5.1. Difracción de ondas escalares .....                    | 271 |
| 11.6. Otra forma de evaluar $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ..... | 273 |
| 11.7. Función de Green esférica.....                           | 274 |
| 11.7.1. Ondas planas escalares y armónicos esféricos .....     | 276 |
| 11.8. Función de Green cilíndrica .....                        | 277 |
| 11.9. Solución al problema electrodinámico .....               | 278 |
| 11.10. Aplicaciones .....                                      | 279 |
| 11.10.1. Carga puntual en reposo .....                         | 279 |
| 11.10.2. Carga oscilante .....                                 | 279 |
| 11.10.3. Dipolo eléctrico puntual oscilante .....              | 281 |
| 11.10.4. Carga puntual en movimiento uniforme. 1 .....         | 286 |
| 11.11. Transformadas y ecuaciones de Maxwell .....             | 290 |
| 11.11.1. Carga puntual en movimiento uniforme. 2.....          | 291 |
| <b>12. Leyes de conservación</b> .....                         | 292 |
| 12.1. La noción de conservación.....                           | 292 |
| 12.2. Conservación de la energía .....                         | 293 |
| 12.3. Conservación del momento lineal .....                    | 296 |
| 12.3.1. Fuerza y esfuerzos .....                               | 299 |
| 12.3.2. Presión ejercida por el campo .....                    | 301 |
| 12.4. Teorema de Poynting.....                                 | 302 |
| <b>13. Ondas planas</b> .....                                  | 304 |
| 13.1. Descripción básica.....                                  | 304 |
| 13.1.1. Velocidad de grupo.....                                | 307 |
| 13.1.2. *Vector de propagación complejo.....                   | 309 |
| 13.2. Polarización .....                                       | 311 |
| 13.2.1. Casos particulares .....                               | 311 |
| 13.3. Reflexión y refracción en dieléctricos.....              | 312 |
| 13.3.1. Incidencia normal de ondas planas .....                | 312 |
| 13.3.2. Incidencia oblicua de ondas planas .....               | 315 |
| 13.3.3. Coeficientes de reflexión y transmisión .....          | 320 |
| 13.3.4. El caso general.....                                   | 321 |

|  |            |
|--|------------|
| 13.4. Reflexión total interna.....                         | 322        |
| 13.5. *Ondas planas en medios anisotrópicos.....           | 324        |
| 13.6. Ondas planas en medios conductores.....              | 329        |
| 13.7. Corriente en buenos conductores.....                 | 333        |
| 13.8. Reflexión y transmisión en metales .....             | 338        |
| 13.8.1. Buenos conductores .....                           | 340        |
| 13.9. Guías de ondas .....                                 | 341        |
| 13.10. Guías y resonadores rectangulares.....              | 344        |
| 13.10.1. Modos TE .....                                    | 344        |
| 13.10.2. Modos TM.....                                     | 346        |
| 13.10.3. Cavidad resonante rectangular .....               | 348        |
| 13.11. Guías y resonadores cilíndricos .....               | 350        |
| 13.11.1. Modos TE .....                                    | 350        |
| 13.11.2. Modos TM .....                                    | 352        |
| 13.11.3. Cavidad resonante cilíndrica .....                | 353        |
| 13.12. Cable coaxial .....                                 | 353        |
| <b>14. Radiación .....</b>                                 | <b>356</b> |
| 14.1. Campos debidos a $\rho$ y $J$ arbitrarios .....      | 356        |
| 14.1.1. Cálculo de $B$ .....                               | 357        |
| 14.1.2. Cálculo de $E$ .....                               | 358        |
| 14.2. Campos debidos a cargas puntuales .....              | 358        |
| 14.2.1. Potenciales de Lienard-Wiechert .....              | 359        |
| 14.2.2. Campos $E$ y $B$ de cargas puntuales .....         | 360        |
| 14.3. Carga en movimiento uniforme .....                   | 364        |
| 14.4. Carga acelerada a baja velocidad .....               | 367        |
| 14.5. Distribución angular de la radiación .....           | 369        |
| 14.5.1. Carga con velocidad y aceleración colineales ..... | 370        |
| 14.5.2. Carga en movimiento circular .....                 | 372        |
| 14.6. Carga en movimiento relativista .....                | 375        |
| 14.7. Espectro de Fourier de la radiación.....             | 377        |
| 14.8. Reacción de radiación .....                          | 379        |
| 14.9. Teoría clásica del electrón.....                     | 381        |
| 14.9.1. Dispersión en gases .....                          | 382        |
| 14.9.2. Efecto Zeeman.....                                 | 385        |
| 14.9.3. Birrefringencia.....                               | 388        |
| <b>15. Campos multipolares.....</b>                        | <b>391</b> |
| 15.1. Potenciales.....                                     | 391        |
| 15.2. Campos $E$ y $B$ .....                               | 395        |
| 15.3. Dipolo eléctrico .....                               | 397        |
| 15.3.1. Potencia radiada .....                             | 397        |
| 15.3.2. Radiación de momento angular .....                 | 400        |
| 15.4. Expansión en modos normales.....                     | 402        |

|  |            |
|--|------------|
| 15.5. Formas límites para los campos .....             | 406        |
| 15.5.1. Campo cercano.....                             | 406        |
| 15.5.2. Campo lejano .....                             | 407        |
| 15.6. Energía portada por la radiación .....           | 409        |
| 15.7. Distribución angular de la radiación .....       | 410        |
| 15.8. Momento angular de la radiación .....            | 411        |
| 15.9. Fuentes de la radiación multipolar .....         | 413        |
| 15.9.1. Fuentes pequeñas.....                          | 416        |
| 15.9.2. Cálculo de la potencia radiada .....           | 419        |
| 15.9.3. Cálculo del momento angular.....               | 419        |
| 15.10. Ondas vectoriales planas y esféricas.....       | 420        |
| 15.11.1. Scattering de ondas planas.....               | 423        |
| 15.11.1. Ondas escalares.....                          | 424        |
| 15.11.2. Ondas vectoriales .....                       | 428        |
| 15.11.3. Campos de multipolo magnético (TE).....       | 431        |
| 15.11.4. Campos de multipolo eléctrico (TM).....       | 431        |
| <b>16. Relatividad especial .....</b>                  | <b>433</b> |
| 16.1. Transformación de Galileo .....                  | 433        |
| 16.1.1. ¿Es invariante la ecuación de ondas?.....      | 434        |
| 16.2. Postulados .....                                 | 436        |
| 16.3. Transformación de Lorentz .....                  | 437        |
| 16.3.1. Convención suma .....                          | 438        |
| 16.3.2. Transformación de Lorentz unidimensional ..... | 439        |
| 16.3.3. Límite no relativista.....                     | 440        |
| 16.3.4. Contracción de longitudes .....                | 441        |
| 16.3.5. Dilatación temporal.....                       | 441        |
| 16.3.6. Adición de velocidades.....                    | 442        |
| 16.3.7. Experimento de Fizeau .....                    | 443        |
| 16.4. Generadores del grupo de Lorentz .....           | 444        |
| 16.4.1. Transformación de Lorentz pura .....           | 446        |
| 16.4.2. Rotación de coordenadas.....                   | 451        |
| 16.5. Generadores. Versión covariante .....            | 453        |
| 16.6. Grupo de Poincaré .....                          | 454        |
| 16.7. El espacio-tiempo .....                          | 455        |
| 16.8. Reglas de transformación .....                   | 457        |
| 16.9. Operadores diferenciales .....                   | 458        |
| 16.9.1. D'Alembertiano .....                           | 459        |
| 16.10. Cinemática en el espacio-tiempo .....           | 460        |
| 16.11. Momento lineal, fuerza .....                    | 462        |
| 16.12. Momento angular, torque.....                    | 465        |
| 16.13. El fotón.....                                   | 467        |
| 16.14. Colisiones y masa-energía .....                 | 467        |
| 16.15. Formulación lagrangiana.....                    | 468        |

|   |            |
|---|------------|
| 16.15.1. Partícula libre.....                             | 468        |
| 16.15.2. Campo escalar. Inercia de la energía.....        | 469        |
| 16.15.3. Partícula en un campo 4-vectorial $A^\mu$ .....  | 470        |
| 16.16. Carga $q$ en un campo E.....                       | 471        |
| 16.17. Carga $q$ en un campo B.....                       | 472        |
| 16.18. Oscilador armónico relativista.....                | 473        |
| 16.18.1. Tratamiento alterno.....                         | 475        |
| 16.19. *Transformación de Lorentz superluminal.....       | 475        |
| 16.19.1. *Transformación de Lorentz superluminal 1D.....  | 478        |
| 16.19.2. *El caso general.....                            | 479        |
| 16.19.3. *Cinemática y dinámica superluminal.....         | 480        |
| 16.20. *Antimateria.....                                  | 481        |
| 16.21. *Taquiones.....                                    | 484        |
| <b>17. Electrodinámica relativista.....</b>               | <b>488</b> |
| 17.1. Tensores y ecuaciones básicas.....                  | 488        |
| 17.2. Síntesis.....                                       | 492        |
| 17.3. Electrodinámica en medios materiales.....           | 494        |
| 17.4. Solución en ondas planas.....                       | 494        |
| 17.5. Invariantes.....                                    | 496        |
| 17.6. Fuerza de Lorentz.....                              | 497        |
| 17.7. Momento-energía del campo E B.....                  | 498        |
| 17.8. Momento angular del campo E B.....                  | 501        |
| 17.9. Potenciales retardados.....                         | 502        |
| 17.10. Cálculo de $\phi^{\mu\nu}$ .....                   | 506        |
| 17.11. Aplicaciones.....                                  | 508        |
| 17.11.1. 4-vectores.....                                  | 508        |
| 17.11.2. Tensores de campo.....                           | 511        |
| 17.12. Campo de una línea de corriente.....               | 513        |
| 17.13. Radiación por cargas aceleradas.....               | 514        |
| 17.14. *Taquiones cargados.....                           | 515        |
| 17.14.1. *4-Potenciales.....                              | 515        |
| 17.14.2. *Campos electromagnéticos.....                   | 516        |
| 17.14.3. *Teoría covariante de la superconductividad..... | 517        |
| 17.15. Materiales en movimiento.....                      | 519        |
| 17.16. Electrodinámica lagrangiana.....                   | 521        |
| 17.16.1. Lagrangiano en medios materiales.....            | 522        |
| 17.17. *Electrodinámica de Born-Infeld.....               | 523        |
| 17.17.1. *La formulación no lineal.....                   | 523        |
| 17.17.2. *La carga puntual.....                           | 527        |
| 17.18. *Electrodinámica matricial.....                    | 530        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Apéndices</b> .....   | 537 |
| A. Funciones de Green .....  | 539 |
| A.1. Operadores diferenciales y su adjunto .....                         | 539 |
| A.2. Definición de la función de Green .....                             | 542 |
| B. Delta de Dirac .....  | 545 |
| B.1. Definición y propiedades básicas .....                              | 545 |
| B.2. Distribuciones singulares de carga .....                            | 548 |
| C. Díadas .....  | 550 |
| D. Operadores diferenciales .....  | 553 |
| E. Identidades vectoriales y diádicas .....                              | 557 |
| F. Vectores polares y axiales .....                                      | 559 |
| F.1. Reglas de transformación .....                                      | 559 |
| F.2. Aplicaciones geométricas .....                                      | 562 |
| F.3. Aplicaciones en electromagnetismo .....                             | 563 |
| G. Funciones de Legendre y Bessel .....                                  | 567 |
| G.1. Algunas propiedades de $P_\ell(x)$ .....                            | 567 |
| G.2. Algunas propiedades de $P_\ell^m(x)$ .....                          | 569 |
| G.3. Algunas propiedades de $Q_\ell^m(x)$ .....                          | 569 |
| G.4. Algunas propiedades de $J_m(x)$ y $N_m(x)$ .....                    | 570 |
| G.5. Algunas propiedades de $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ .....                | 573 |
| G.6. Algunas propiedades de $\mathcal{J}_\ell(x)$ y $\eta_\ell(x)$ ..... | 573 |
| H. Armónicos esféricos vectoriales .....                                 | 576 |
| H.1. Armónicos esféricos vectoriales .....                               | 576 |
| H.1.1. Ortogonalidad .....   | 576 |
| H.1.2. Completez .....   | 576 |
| H.1.3. Propiedades .....   | 577 |
| I. Conversión MKSA-esu .....   | 579 |
| J. Fórmulas útiles .....   | 581 |
| K. Alfabeto griego .....   | 583 |
| L. Lista de símbolos .....   | 584 |
| <b>Bibliografía</b> .....  | 589 |
| <b>Índice analítico</b> .....  | 595 |

# Prólogo

*Una teoría brillante no es más que un hermoso sueño,  
un gran ensayo poético. Si el sueño se realiza,  
si el poema se comprueba en los hechos,  
entonces se convierte en información.*

León Brillouin

Entre las teorías físicas del siglo XIX la electrodinámica maxwelliana es la de más alta estética. No solo por la amplia variedad de fenómenos que describe desde un pequeño conjunto de ecuaciones básicas; no solo por su capacidad predictiva que hizo de la luz un fenómeno electromagnético, sino también porque fue ejemplo supremo, paradigma, de toda teoría de campos, sin dejar de lado el hecho de que su formulación matemática no fue distorsionada por el surgimiento de la teoría especial de la relatividad, pues su estructura fue compatible con los principios de la teoría de Einstein. La electrodinámica clásica relativista difiere de la formulación maxwelliana original solo por la iluminada expresión covariante de Minkowski, que integró los campos eléctrico y magnético en una sola entidad matemática.

La electrodinámica no establece diferencia esencial alguna entre los fenómenos eléctricos, magnéticos y luminosos. Es de hecho la más poderosa síntesis que el pensamiento logró establecer desde la unificación newtoniana de la física del cielo y la tierra. Y es solo comparable en su profunda perspectiva a la relatividad general y a la mecánica cuántica.

Esta ciencia tuvo su origen en la primera gran síntesis de Gilbert (1600) sobre los fenómenos magnéticos, que lo condujo a proponer que la Tierra es un gran imán, y en las mediciones sobre la fuerza entre cargas eléctricas que dieron origen a la ley de Coulomb (1785). En el año 1820, el descubrimiento de Oersted de la interacción entre brújulas y corrientes abrió el camino hacia una primera conexión entre electricidad y magnetismo, que se basó en una serie de experimentos de Ampère (1820), realizados unos meses después del descubrimiento de Oersted, que revelaron una oculta relación: las corrientes eléctricas, constituidas por cargas en movimiento y por tanto fuente de acciones eléctricas, eran a la vez fuente de efectos magnéticos.

A partir de estos experimentos decisivos se hizo posible el diseño de imanes artificiales —conocidos como electroimanes y solenoides— y se comprendió que toda forma de magnetismo se debe a corrientes eléctricas, ya sean macroscópicas como en los solenoides y electroimanes, o microscópicas como en los imanes naturales y las brújulas.

En 1831, una larga serie de experimentos de Faraday demostró la imposibilidad de separar los fenómenos eléctricos de los magnéticos. Faraday descubrió que solenoides en movimiento con corriente constante, o solenoides en reposo con corriente variable con el tiempo, generan corrientes sobre circuitos cercanos. Estos hallazgos, que se conocen como efecto Faraday o inducción electromagnética, dieron nacimiento en la mente de Faraday a la idea de *campo electromagnético*, y plantearon por primera vez la noción de *líneas de fuerza* como una forma de representar dicho campo. A partir de las intuiciones de Faraday, Maxwell, en su precisa síntesis de 1864, mostró además la unidad de los fenómenos eléctricos, magnéticos y luminosos. Las ondas electromagnéticas, antes de ser generadas en el laboratorio, fueron predichas a través de una teoría que aseguraba que —del amplio espectro de oscilaciones electromagnéticas posibles— lo que llamamos luz es solo una estrecha franja, aquella que asociamos al arco iris y cuya peculiaridad esencial es que corresponde a ondas electromagnéticas detectables por el ojo.

De ahí surgió la unificación de la óptica y la electrodinámica, fusión de la que surgió a su vez, con Lorentz y Abraham, entre otros, una teoría eléctrica de la materia, de acuerdo con la cual la luz interactúa con las cosas porque ellas están hechas de partículas eléctricamente cargadas. En particular, es un hecho experimental que el índice de refracción depende de la frecuencia de la luz refractada, lo que es responsable de la dispersión en los prismas y del arco iris. Para posibilitar una explicación consistente fue necesario introducir la idea de una estructura eléctrica de los átomos, antes con los que se trabajaba ya en la química de la época.

Cuando Faraday y Maxwell pensaban en la acción electromagnética mediante un campo, lo que en verdad tenían en mente era la acción a través del *éter*, medio material que había sido introducido en las teorías ondulatorias de la luz de Huygens, Young y Fresnel. El éter era un medio continuo que ocupaba todo el espacio incluyendo el interestelar y el interior de los cuerpos transparentes a la luz y a las ondas de Maxwell.

A través del éter viajan las ondas electromagnéticas que son transversas, lo que indica que el éter es un sólido, ya que en los gases y en los líquidos no viajan ondas de este tipo. Resulta, entonces, que en el éter sólido han de viajar, además —según la teoría de la elasticidad— ondas longitudinales, cuya velocidad es mayor que la de las ondas transversas. De acuerdo con la teoría de los sólidos, las velocidades de las ondas longitudinales y transversas son, respectivamente:  $v_l = [E(1-\sigma)/\rho(1-2\sigma)]^{1/2}$ ,  $v_t = [E/2\rho(1+\sigma)]^{1/2}$ , donde  $E$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  son el módulo de rigidez, la densidad y el módulo de Poisson del éter. Así pues, la velocidad de la luz es  $c = v_t$  y posiblemente la velocidad de la onda longitudinal (indetectable) es infinita, por lo cual  $\sigma = 1/2$ . De acuerdo con  $v_t = c$  resulta que  $E$  es sumamente grande y  $\rho$  muy pequeño, lo que

contradice nuestras nociones cotidianas sobre un sólido. Las propiedades mecánicas del éter nunca fueron medidas.

De acuerdo con la teoría del éter, los campos electromagnéticos podrían interpretarse como estados de esfuerzos del éter, correspondiendo el campo eléctrico a esfuerzos de tracción-compresión y el magnético a esfuerzos de cizalladura. Esta versión sugiere que el campo electromagnético no sería más que un campo elástico.

Sin embargo, los experimentos ópticos de finales del siglo XIX hicieron insostenible la teoría del éter elástico, hasta que fue abandonada en la teoría especial de la relatividad de Einstein en 1905. Véase Sepúlveda (2016), capítulo 8.

Ahora bien, en cada experimento, la teoría de Maxwell mostró su eficacia descriptiva hasta la época de los experimentos de Hertz, quien habiendo generado ondas de radio, y probado por tanto una de las conclusiones de Maxwell, descubrió un nuevo efecto —el fotoeléctrico— que se resistió a cualquier descripción maxwelliana; este fenómeno comenzó a mostrar los límites de la electrodinámica clásica. El primer indicio de la debilidad de la electrodinámica maxwelliana surgió casi en el momento (Hertz, 1887) en que se probaba su eficacia.

En 1900, con el trabajo de Planck, y en 1905, con el de Einstein, la teoría de la luz se encontró con una nueva opción, pues también puede describirse en términos de un paquete de partículas. Esta nueva idea —la del *fotón*— abrió un camino en el que este encontró su lugar como partícula dotada de frecuencia.

La electrodinámica clásica es ejemplo hermoso de una teoría de campos sin acción a distancia, pues según ella las acciones electromagnéticas se propagan con velocidad finita: la de la luz en el vacío. En la relatividad especial resultaría ser esta la máxima velocidad posible.

El presente texto, que en buena medida es un ejercicio de física matemática, no pretende explorar las bases experimentales de la electrodinámica. Hace énfasis, con toda intención, en sus aspectos matemáticos, por lo que largamente se detiene en la teoría de funciones de Green concebida como una herramienta poderosa en esta teoría lineal.

No pretende, por tanto, ser un texto autocontenido y debería ser precedido por un buen curso básico sobre los fenómenos electromagnéticos, pues el espíritu que lo anima es físico-matemático.

Es necesario decir que no se pretende en forma alguna suplantarse o completar los textos hermosos que en la literatura científica abundan sobre el tema. Baste con aceptar que la inspiración fundamental y el tono de la presentación quieren ser los que surgen de una lectura cuidadosa y comprensiva del inagotable libro de J. D. Jackson *Classical Electrodynamics*. Si el orden, los temas, los desarrollos y el espíritu que animan este texto llegan a parecerse no será una coincidencia.

Los problemas propuestos, a diferencia de muchos textos clásicos, están intercalados con el hilo central de la exposición. Esto indica que cada problema puede ser resuelto con los conceptos desarrollados hasta ese momento.

## Envío

La vida es escuela única. Más allá de la academia persistente que tanto nos asiste, están el desorden vital y las noches inevitables y hermosas que tanto enseñan. En ellas, entre las copas, están el amigo, el compañero, el estudiante, cada uno con su inocente sugerencia o su crítica amable y profunda. De cada una de las personas que me ha regalado la vida es este texto. A ellas lo envío.

Entre los que participaron en la elaboración de este texto en LaTeX, mi especial reconocimiento a Johan Mazo, Guillermo Miranda y Diego Restrepo por la transcripción, a Gonzalo Montoya por su trabajo de edición y a Lorena Campuzano por su paciencia y dedicación en el trabajo de diagramación y ajuste en LaTeX.

*Alonso Sepúlveda Soto*  
Medellín, febrero de 2009

## Para esta edición

El cambio de fondo que marca la intención de esta edición es el paso del sistema de unidades cgs al MKSA. Los gráficos fueron, casi en su totalidad, rediseñados y dibujados en LaTeX por el autor. Un trabajo de detalle se hizo corrigiendo erratas de la primera edición. En su estructura general el texto fue poco intervenido, aunque se hizo una mejor distribución de las ecuaciones y los gráficos. Se reescribieron y ampliaron algunas secciones.

Los armónicos esféricos vectoriales fueron enviados al apéndice y se incluyeron nuevas secciones: condensadores y capacitancia, inducción mutua y autoinducción, ondas en medios anisotrópicos, reacción de radiación, teoría clásica del electrón (dispersión en gases, efecto Zeeman, birrefringencia), antimateria, transformaciones de Lorentz superluminales, taquiones y electrodinámica no lineal de Born-Infeld.

\* Las secciones con asterisco pueden omitirse en una primera lectura sin perder la continuidad.

Un cuadro que contiene fechas básicas en la historia del electromagnetismo puede encontrarse en:

<http://history.hyperjeff.net/electromagnetism.html>

*Alonso Sepúlveda Soto*  
Medellín, noviembre de 2019

# Electrostática

El concepto inicial y fundamental de la electrostática es el de *carga eléctrica*. Desempeña en el electromagnetismo un papel análogo al que el concepto de *masa gravitacional* desempeña en la teoría de Newton de la gravitación universal.

La carga eléctrica aparece por primera vez en la ley de Coulomb. Tanto en la electrostática, como en la gravitación, la ley básica que rige la interacción es de la forma  $1/r^2$ , y en ambos casos las teorías correspondientes conducen con facilidad a la idea de *campo* como fuerza por unidad de carga o por unidad de masa. También en ambos casos es posible definir el *potencial* eléctrico o gravitacional, cuyo comportamiento matemático se expresa con una ecuación de Poisson. La forma del potencial en ambas teorías conduce a una ley de conservación de la energía.

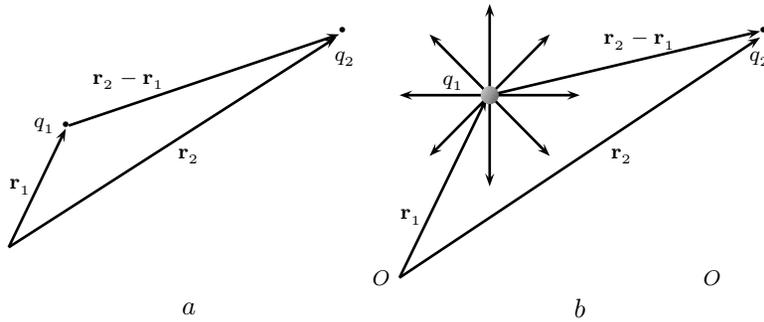
Lo anterior sugiere que la electrostática y la gravitación tienen una estructura matemática semejante, aunque carga y masa tengan un contexto físico bastante diferente. La magnetostática y los campos variables disolverán las semejanzas.

Este capítulo pretende construir la base teórica de la electrostática, y mostrar los métodos más elementales de solución a sus ecuaciones básicas.

## 1.1. Ley de Coulomb

Los experimentos de Coulomb (1785) permiten concluir que hay dos tipos de carga eléctrica,  $+$  y  $-$ , y que la fuerza entre dos cuerpos pequeños y fijos, cargados eléctricamente y separados una distancia grande comparada con sus dimensiones:

- Es proporcional al producto  $q_1 q_2$  de las cargas (cantidad de electricidad).
- Actúa a lo largo de la línea que une las cargas.
- Es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa las cargas. Dentro del error experimental la potencia de  $r$  es  $-2 \pm 10^{-16}$ .
- Es atractiva si las cargas eléctricas son de signo opuesto, repulsiva si son del mismo signo.



**Figura 1.1.** Propiedades de la fuerza eléctrica. *a.* Las cargas eléctricas  $q_1$  y  $q_2$  experimentan interacción eléctrica; *b.* La dirección de las líneas del campo electrostático de una carga puntual va de la posición  $\mathbf{r}_1$  de la carga hacia el punto  $\mathbf{r}_2$

Los experimentos, empezando con los de Millikan (1907), han demostrado que la carga eléctrica está cuantizada. Las cargas eléctricas del protón y el electrón son iguales en magnitud y opuestas en signo, siendo el electrón negativo. Se acepta actualmente que el protón y el neutrón están formados por *quarks*  $u$  y  $d$  cuyas cargas eléctricas son  $2/3$  y  $-1/3$  de la carga del protón. La estructura del protón es  $uud$  y la del neutrón es  $udd$ .

Puede demostrarse que la fuerza total sobre una carga pequeña, debida a una distribución de cargas, es igual a la suma *vectorial* de las fuerzas ejercidas por cada una de las cargas sobre la carga de prueba. Esto significa que las fuerzas eléctricas satisfacen el *principio de superposición*.

La ley de Coulomb (véase figura 1.1*a*) tiene, en un sistema inercial, la forma:

$$\mathbf{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \{\text{Fuerza que } q_1 \text{ ejerce sobre } q_2\} = k \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$

Es obvia la analogía con la ley de gravitación, excepto por el hecho de que la masa es siempre positiva y de que la acción gravitacional depende de la masa, factor que ya aparece en la mecánica. Esto trae como consecuencia que en la teoría de gravitación hay solo una cantidad nueva, la constante de Cavendish  $G$ , que puede determinarse experimentalmente. En contraste, en la ley de Coulomb aparecen dos cantidades nuevas,  $q$  y  $k$ , ninguna de las cuales se refiere a cantidades introducidas previamente en física.

La constante de proporcionalidad  $k$  puede determinarse al escoger una unidad de carga. De modo recíproco, puede también escogerse arbitrariamente la constante de proporcionalidad, lo que fija la unidad de carga. Esto significa que es posible definir dos tipos de unidades eléctricas:

**1. Unidades electrostáticas (esu).** La unidad de carga es aquella que ejerce una fuerza de 1 dina sobre otra igual colocada a 1 cm de distancia. Esta unidad se

conoce como *statculombio* (stc). La constante de proporcionalidad tiene valor 1 en dinas  $\text{cm}^2/\text{stc}^2$ .

**2. Unidades MKSA (sistema internacional).** El sistema de unidades aprobado internacionalmente es el sistema MKSA y no el MKSC, aunque en la práctica no existe diferencia entre ellos. Así pues, la unidad de carga, conocida como *culombio* (C), se obtiene del amperio (A) mediante la definición  $\text{culombio} = \text{amperio} \times \text{s}$ , como se verá en la sección 7.2.1, donde se estudia la forma de escoger la unidad de corriente eléctrica.

En estas unidades la constante de proporcionalidad se escoge como  $k = 10^{-7}c^2 = 8,9874$  (con unidades de  $\text{N m}^2/\text{C}^2$ ), que habitualmente se escribe  $k = 1/4\pi\epsilon_0$ , donde  $\epsilon_0$  tiene un valor de  $8,854 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N m}^2$  y se conoce como *permitividad del vacío*.

El culombio es la cantidad de carga que colocada en el vacío a 1 metro de otra igual la repele con una fuerza de  $1/4\pi\epsilon_0$  newtons.

Puesto que es posible escribir, cambiando de unidades:

$$8.9874 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2 = 8.9874 \times 10^{18} \text{ dina cm}^2/\text{C}^2 = 1 \text{ dina cm}^2/\text{stc}^2$$

se sigue (con  $1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dinas}$ ) que la relación entre los dos tipos de unidades de carga es:

$$1 \text{ C} = 2.997 \times 10^9 \text{ stc} \approx 3 \times 10^9 \text{ stc}.$$

El apéndice I muestra la forma de hacer conversiones entre los dos sistemas de unidades. En este texto se utiliza el sistema MKSA.

La fuerza que la carga  $q_1$  en  $\mathbf{r}_1$  ejerce sobre la carga  $q_2$  en  $\mathbf{r}_2$ , ambas en reposo, se escribe, entonces, en MKSA como:

$$\boxed{\mathbf{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}}. \quad (1.1)$$

Análogamente, la fuerza ejercida por  $q_2$  sobre  $q_1$  es:

$$\mathbf{F}_{q_2 \rightarrow q_1} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3},$$

tal que  $\mathbf{F}_{q_1 \rightarrow q_2} + \mathbf{F}_{q_2 \rightarrow q_1} = \mathbf{0}$ , por lo cual, la ley de acción-reacción es válida, al menos, en el caso electrostático.

Las cargas eléctricas  $q_1$  y  $q_2$  se consideran cantidades algebraicas *escalares* (véase apéndice F) que toman valores reales positivos o negativos.

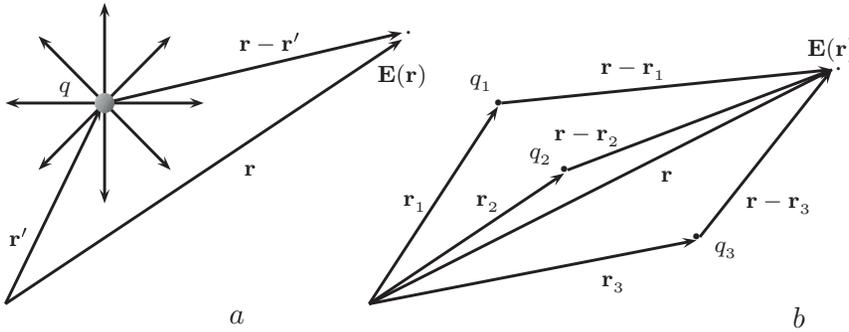
## 1.2. Campo eléctrico

La ley de Coulomb (1.1), que describe la interacción entre *cargas*, puede también pensarse como interacción entre  $q_2$  y el *campo* eléctrico generado por  $q_1$  en el punto donde se halla  $q_2$  (véase figura 1.2b). Definimos *el campo eléctrico*  $\mathbf{E}_1$  debido a  $q_1$  como la fuerza por unidad de carga  $q_2$ , ejercida por  $q_1$ :

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{\mathbf{F}_{q_1 \rightarrow q_2}}{q_2} = \frac{q_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}. \quad (1.2)$$

Análogamente, el campo eléctrico en  $\mathbf{r}_1$  debido a la carga  $q_2$  tiene la forma:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = \frac{\mathbf{F}_{q_2 \rightarrow q_1}}{q_1} = \frac{q_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}.$$



**Figura 1.2.** Propiedades del campo eléctrico. *a.* La dirección de las líneas del campo  $\mathbf{E}$  de una carga puntual  $q$  va de la posición  $\mathbf{r}'$  de la carga hacia el punto  $\mathbf{r}$ ; *b.* El campo  $\mathbf{E}$  de una distribución de cargas puntuales es la combinación lineal de los campos de cada carga

Nótese que el campo eléctrico así definido depende solo de la carga que lo genera —la fuente—, siendo independiente de la carga de prueba.

El campo eléctrico, que por ahora es solo una *definición*, es una cantidad vectorial que satisface un principio de superposición: *el campo debido a una distribución de cargas es igual a la suma de los campos generados por cada elemento de la distribución*. Esto implica que *la electrostática es una teoría lineal*.

Al igual que  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{F}$ , el campo  $\mathbf{E}$  es un vector *polar* (véase apéndice F).

Así pues, cambiando a una notación en la que  $\mathbf{r}$  se refiere a puntos del espacio donde se evalúan los campos y  $\mathbf{r}'$  señala las fuentes puntuales o diferenciales, el campo eléctrico en el punto  $\mathbf{r}$  generado por una carga *puntual*  $q$  localizada en el punto  $\mathbf{r}'$  se expresa como (véase figura 1.2a):

$$\mathbf{E} = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.3)$$

Cuando el campo no es generado por cargas puntuales, sino por una distribución continua de cargas, esta distribución puede ser afectada por la presencia de una carga de prueba *finita*  $q'$ , como ocurre con los conductores. Bajo estas condiciones, la fuerza medida sobre  $q'$  no da información exacta sobre el campo original sino sobre el campo perturbado por la presencia de  $q'$ . Con el fin de eliminar el efecto perturbador de la carga de prueba, se define el campo eléctrico debido a una distribución de cargas que ejerce sobre  $q'$  una fuerza  $\mathbf{F}$ , como el límite:

$$\mathbf{E} = \lim_{q' \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q'}.$$

### 1.2.1. Distribuciones de carga

• De acuerdo con el principio de superposición, el campo eléctrico debido a una distribución *discreta* de cargas formada por  $n$  cargas puntuales  $q_i$  colocadas en puntos  $\mathbf{r}_i$  (véase figura 1.2b) está dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}. \quad (1.4)$$

• Para una distribución *continua* de cargas (véase figura 1.3a), la sumatoria anterior se convierte en una integral, por lo cual:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.5)$$

La distribución continua puede ser lineal, superficial o volumétrica, con densidades de carga dadas, respectivamente, por  $\lambda(\mathbf{r}')$ ,  $\sigma(\mathbf{r}')$ ,  $\rho(\mathbf{r}')$ ; esto es:

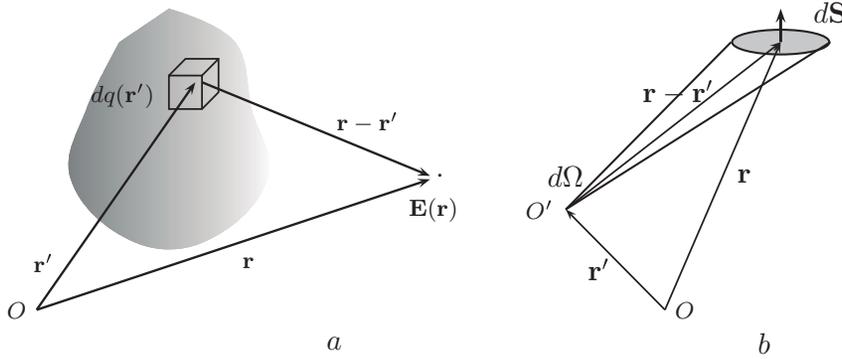
$$dq(\mathbf{r}') = \lambda(\mathbf{r}') dl(\mathbf{r}'), \quad dq(\mathbf{r}') = \sigma(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}'), \quad dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') dV(\mathbf{r}').$$

El campo eléctrico debido a una colección de cargas *puntuales* puede describirse utilizando la propiedad selectiva de la función delta de Dirac (véase apéndice B), como el producido por una densidad volumétrica equivalente. Así:

$$\begin{aligned} q = \text{carga total} &= \sum_{i=1}^n q_i \times 1 = \sum_{i=1}^n q_i \int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) dV' \\ &= \int \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) dV' = \int \rho(\mathbf{r}') dV'. \end{aligned}$$

En consecuencia, la densidad volumétrica de carga en el punto  $\mathbf{r}'$  equivalente a una colección de cargas puntuales localizadas en  $\mathbf{r}_i$  es:

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i). \quad (1.6)$$



**Figura 1.3.** *a.* El campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  de una distribución volumétrica de cargas se obtiene por integración, sobre el volumen de la distribución, de los campos debidos a cada elemento diferencial  $dq(\mathbf{r})$ ; *b.* Geometría del ángulo sólido  $d\Omega$  con vértice  $O'$

Por tanto, el campo eléctrico de esta distribución se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \int \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \end{aligned}$$

que es la expresión (1.4). La densidad volumétrica en cualquier punto  $\mathbf{r}$ , equivalente a una sola carga puntual colocada en  $\mathbf{r}'$ , es:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.7)$$

Las distribuciones puntuales, lineales y superficiales son distribuciones singulares, puesto que un punto, una línea, un plano son singularidades del espacio. La construcción de  $\rho(\mathbf{r})$  para la distribución puntual será extendida a distribuciones lineales y superficiales.

En lo que sigue se asumirá que *cualquier distribución de cargas, discreta o continua, es equivalente a una distribución volumétrica.*

Considérense dos ejemplos:

1. Plano  $xy$  con carga superficial  $\sigma(x, y)$ . Para una porción finita del plano, y como  $\int \delta(z) dz = 1$ :

$$q = \int \sigma dx dy = \int \sigma dx dy \int \delta(z) dz = \int \sigma(x, y) \delta(z) dV = \int \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.8)$$

La densidad volumétrica de carga es:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma(x, y) \delta(z).$$

2. Línea de carga  $\lambda(z)$  perpendicular al plano  $xy$  y que pasa por  $(x_0, y_0)$ . Para una porción del alambre, con  $\int \delta(x - x_0) dx = 1 = \int \delta(y - y_0) dy$ :

$$q = \int \lambda dz = \int \lambda dz \int \delta(x - x_0) dx \int \delta(y - y_0) dy = \int \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.9)$$

La distribución volumétrica equivalente es, entonces:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lambda(z) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0).$$

Véanse diversas distribuciones en la sección 4.1.4, numeral 4, y el apéndice B2.

### 1.3. Ley de Gauss

Una forma de evaluación del campo  $\mathbf{E}$ , utilizable en los casos en que la distribución de carga tiene una alta simetría, proviene de la ley de Gauss.

1. Considérese primero el caso simple de una carga *puntual*  $q$  localizada en  $O'$  (figura 1.3b), y una superficie *cerrada*  $S$  cuya forma es arbitraria. El punto  $O'$  puede ser interior o exterior a  $S$ . El campo electrostático en un punto  $\mathbf{r}$  sobre la superficie está dado por la ecuación (1.3):

$$\mathbf{E} = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

El flujo diferencial a través de  $d\mathbf{S}(\mathbf{r})$  es:

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r})}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3};$$

integrando sobre una superficie cerrada  $S$  que contenga la carga:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{4\pi} d\Omega,$$

donde, por definición del ángulo sólido (véase figura 1.3b):

$$d\Omega = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Al realizar la integración en  $d\Omega$  para la superficie cerrada se obtiene *ceros* si  $O'$  está fuera de  $S$  y  $4\pi$  si  $O'$  está dentro. Esto es, utilizando la propiedad básica de la función delta, se sigue que la integral de flujo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV$$

vale  $q/\epsilon_0$  si  $O'$  está dentro de  $S$ , y es cero si  $O'$  está fuera. Utilizando el teorema de Gauss podemos escribir:

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV,$$

por lo cual, para una carga puntual es cierto que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

2. Para  $n$  cargas puntuales contenidas dentro de la superficie  $S$ :

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{n=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV, \quad \text{de donde:}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{n=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i).$$

El campo  $\mathbf{E}$  (de acuerdo con el principio de superposición) es la suma de los campos debidos a cada carga puntual

3. Estos resultados pueden extenderse al caso de una distribución *continua* de cargas. La ley integral de Gauss será todavía válida para cada uno de los elementos diferenciales  $dq$ , tal que:

$$\oint_s \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq(\mathbf{r}')}{\epsilon_0},$$

donde  $\oint_s \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{S}$  da el flujo del campo a través de  $S$  debido a  $dq$ . El flujo total, debido a toda la distribución de carga, es:

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int dq;$$

la integración sobre la carga encerrada en la superficie conduce a:

$$\boxed{\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}}. \quad (1.10)$$

Conviene enfatizar que  $q$  es la carga neta *dentro* de la superficie cerrada.

En su forma integral, la ley de Gauss (1.10) afirma que el flujo *neto* de líneas del campo electrostático a través de una superficie cerrada se debe solo a la presencia de las cargas encerradas en la superficie. *Las cargas localizadas fuera de la superficie, aunque contribuyen al campo en todos los puntos, no contribuyen al flujo neto.*

Si no hay cargas dentro de la superficie  $S$ , o si su suma se anula dando una carga neta cero, las líneas de campo entran y salen en igual número dando flujo neto cero.

La forma de las líneas del campo electrostático no cambia con el tiempo. Como se verá en los capítulos sobre campos variables, la forma de estas líneas depende del tiempo si las fuentes no conservan sus posiciones.

### 1.3.1. Ley de Gauss en forma diferencial

Partiendo de la ley integral de Gauss (1.10):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV,$$

donde se ha tenido en cuenta que toda distribución equivale a una distribución volumétrica, y utilizando el teorema de la divergencia:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV,$$

válido para un volumen arbitrario  $V$  delimitado por la superficie  $S$ , se obtiene la ley de Gauss en forma diferencial, una expresión válida para *cualquier* distribución estática de cargas:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}}. \quad (1.11)$$

De acuerdo con esta ecuación, las cargas eléctricas son *fuentes* —o sumideros— de líneas del campo electrostático.

## 1.4. Potencial electrostático

Para una distribución continua de carga es válida la ecuación (1.5):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3};$$

teniendo en cuenta la identidad vectorial:

$$-\nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

donde  $\nabla$  opera solo sobre  $\mathbf{r}$ , se sigue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq(\mathbf{r}') \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

$\nabla$  puede extraerse de la integral porque no participa en la integración. Entonces,

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})}, \quad (1.12)$$

donde se ha definido el potencial electrostático o potencial escalar:

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}. \quad (1.13)$$

Para una distribución volumétrica de cargas es cierto que  $dq(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') dV'$ , y en particular para una carga *puntual*  $q$  localizada en  $\mathbf{r}'$ , de acuerdo con (1.7):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.14)$$

## 1.5. Ecuación de Poisson

Tomando el laplaciano en (1.13) y según (B.3) del apéndice B:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla^2\int\frac{dq(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int dq(\mathbf{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0}\int dq(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').\end{aligned}$$

Puesto que toda distribución de carga eléctrica es equivalente a una distribución volumétrica, se sigue:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\int\rho(\mathbf{r}')\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0},$$

resultado que se conoce como ecuación de Poisson:

$$\boxed{\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}}. \quad (1.15)$$

La ley de Gauss en la forma diferencial (1.11) puede ahora obtenerse en una forma más simple. De:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}),$$

puede escribirse, tomando la divergencia:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla\cdot(-\nabla\phi(\mathbf{r})) = -\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

**PROBLEMA:** Utilizando la densidad de carga volumétrica equivalente para una distribución discreta de cargas puntuales demuestre que:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^n\frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}. \quad (1.16)$$

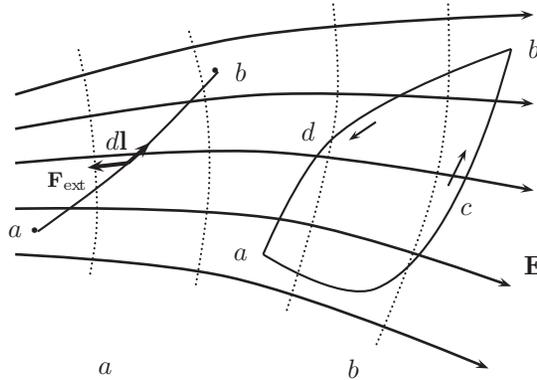
## 1.6. El campo electrostático es conservativo

El conjunto de puntos del espacio con el mismo valor del potencial conforma una superficie (o región) equipotencial. El interior de un conductor en equilibrio es una *región* de potencial constante. Alrededor de un cuerpo cargado existen *superficies* de potencial constante. La relación  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  afirma que las líneas de campo  $\mathbf{E}$  son perpendiculares a las equipotenciales. El signo menos indica que  $\mathbf{E}$  sigue la dirección en que el potencial decrece.

Las líneas de campo  $\mathbf{E}$  satisfacen la condición  $\mathbf{E} \times d\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Esta expresión provee la forma de las líneas de campo si se conoce  $\mathbf{E}$ .

Con el fin de dar un sentido físico al potencial  $\phi(\mathbf{r})$ , debe calcularse el trabajo realizado *sobre* una carga puntual  $q$  por una fuerza externa,  $\mathbf{F}_{ext}$ , para llevarla suavemente desde  $a$  hasta  $b$  en presencia de un campo eléctrico (véase figura 1.4a):

$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow b} &= \int_a^b \mathbf{F}_{ext.} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= q \int_a^b \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = q \int_a^b d\phi = q [\phi(b) - \phi(a)]. \end{aligned}$$



**Figura 1.4.** Campos conservativos. *a.* Una carga  $q$  es llevada de  $a$  a  $b$  por una fuerza externa, en un campo  $\mathbf{E}$ . El trabajo realizado entre los dos puntos no depende del camino; *b.* Como consecuencia, el trabajo realizado en una trayectoria cerrada es nulo. Las líneas punteadas son equipotenciales, perpendiculares a  $\mathbf{E}$

En consecuencia, el trabajo realizado no depende de la trayectoria específica entre  $a$  y  $b$  sino de los puntos inicial y final. Esto es exactamente lo que significa *campo conservativo*; es cierto, entonces, que:

$$\boxed{\frac{W_{a \rightarrow b}}{q} = \phi(b) - \phi(a) = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (1.17)$$

Las curvas punteadas en la figura 1.4 son *equipotenciales*  $\phi$  constante. Se sigue (véase figura 1.4b) que *el trabajo realizado por una fuerza electrostática para mover una carga  $a$  lo largo de una trayectoria cerrada es nulo*. En efecto, para una trayectoria cerrada:

$$\begin{aligned} \frac{W}{q} &= - \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{acb} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{bda} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= [\phi(b) - \phi(a)] + [\phi(a) - \phi(b)] = 0. \end{aligned}$$

Así pues, la *circulación*  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  del campo electrostático es nula.

Ahora, tomando el rotacional en (1.12) se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \nabla \phi(\mathbf{r}),$$

pero el último término es idénticamente nulo para una función  $\phi(\mathbf{r})$  “bien comportada”, es decir, univaluada, continua y derivable, lo que significa que el campo electrostático satisface la ecuación de campo:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}}, \quad (1.18)$$

La integral de circulación y el rotacional del campo electrostático están conectados por el teorema de Stokes (véase figura 1.5):

$$\int_s \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.19)$$

resultando que la circulación nula proviene de  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ , expresión que exige que el campo de Coulomb sea *central* (de dirección  $\pm \mathbf{r}$ ) y que satisfaga el principio de superposición, aunque no impone restricción sobre la dependencia con  $\mathbf{r}$ . En general, puede demostrarse que un campo *central*  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  de la forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = k \int \frac{f(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n+1}} dV(\mathbf{r}'), \quad \text{con } n = \text{real},$$

satisface la ecuación  $\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ . Es decir, es conservativo;  $f(\mathbf{r})$  es la densidad volumétrica de la fuente del campo  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ .

#### PROBLEMAS:

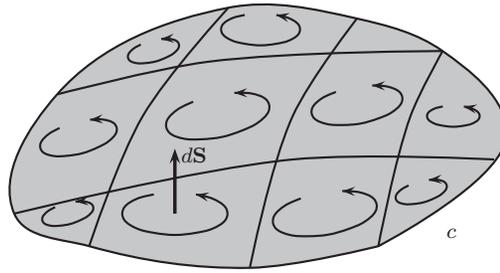
1. Demuestre que el campo  $\mathbf{M}(\mathbf{r})$  propuesto anteriormente es conservativo, y que  $\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) \propto f(\mathbf{r})$  solo si  $n = 2$ . Evalúe el potencial escalar correspondiente. Tenga en cuenta que:

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n+1}} = \begin{cases} -\frac{1}{n-1} \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{n-1}} \right) & \text{si } n \neq 1 \\ \nabla \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

2. Demuestre la conservación de la suma de la energía cinética y potencial eléctrica para una partícula con carga  $q$  colocada en un campo eléctrico:

$$\frac{1}{2}mv^2 + q\phi = \text{constante}.$$

Contrastando con lo anterior, la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  es válida solo si la dependencia con  $r$  es de inverso cuadrado ( $n = 2$ ).



**Figura 1.5.** Descomposición de una superficie finita en elementos diferenciales. La conexión entre las direcciones de  $c$  y  $d\mathbf{S}$  está dada por la regla de la mano derecha

### 1.6.1. Recalibración del potencial

El trabajo realizado por el campo eléctrico para mover una carga entre dos puntos depende solo de la *diferencia* de potencial entre ellos; existe por tanto una indeterminación en el valor numérico del potencial, puesto que puede añadirse una constante *arbitraria*  $C$  sin afectar las cantidades físicas medibles (como el trabajo y el campo  $\mathbf{E}$ ). Así, definiendo un nuevo potencial  $\phi'$  como:

$$\boxed{\phi' = \phi + C}, \quad (1.20)$$

se sigue, reemplazando en la expresión para el trabajo:

$$W'_{a \rightarrow b} = \phi'(b) - \phi'(a) = \phi(b) - \phi(a) = W_{a \rightarrow b}, \text{ y también:}$$

$$\mathbf{E}' = -\nabla\phi' = -\nabla(\phi + C) = -\nabla\phi = \mathbf{E}.$$

El campo electrostático es *invariante* bajo la recalibración  $\phi' = \phi + C$ , también conocida como *transformación gauge*. Análogamente, la aceleración  $\mathbf{g}$  de gravedad, expresable por  $\mathbf{g} = -\nabla\mathcal{G}$ , es invariante bajo la recalibración del potencial gravitacional  $\mathcal{G}' = \mathcal{G} + C$ .

De acuerdo con lo anterior, el potencial electrostático (1.13) puede escribirse en la forma general (válida para cargas en el espacio infinito, sin fronteras):

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \phi_0, \quad \phi_0 = \text{constante arbitraria}. \quad (1.21)$$

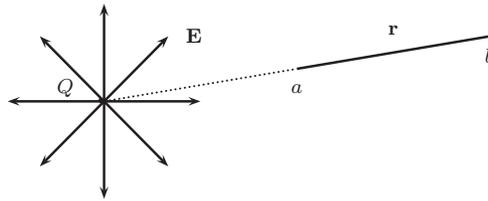
Dado el carácter *no unívoco* del potencial, es posible escoger un potencial cero de referencia (esta escogencia es enteramente arbitraria; lo que importa físicamente es la diferencia de potencial, es decir, el campo  $\mathbf{E}$ ). Esto puede verse en el caso

particularmente simple de una carga puntual  $Q$ . Utilizando la ecuación (1.17) y acudiendo a la figura 1.6:

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right)_a^b \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a} \right) = \phi(a) - \phi(b), \end{aligned}$$

que puede expresarse en la forma:

$$\phi(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) + \phi(b).$$



**Figura 1.6.** Diagrama para el cálculo del potencial debido a una carga puntual

Si se escoge  $r_a = r$  y  $r_b \rightarrow \infty$  se tendrá:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \phi(\infty).$$

Se asume por *conveniencia*, por *simplicidad*, y *arbitrariamente*, que  $\phi(\infty) = 0$ ; así, puede escribirse:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

La escogencia del potencial lejano como  $\phi(\infty) = 0$  es *siempre* posible para distribuciones *localizadas* de carga, esto es, distribuciones que en cada dirección del espacio tienen extensión finita. Toda distribución de esta clase se ‘ve’ desde lugares suficientemente lejanos como un punto.

Sin embargo, y como se verá en la ecuación (1.23) para el caso de un alambre rectilíneo infinito y cargado, es cierto que  $\phi \propto \ln r$ , por lo que no es posible escoger  $\phi(\infty) = 0$ . Pero puede escogerse  $\phi(a) = 0$  en un punto  $a$  *arbitrario* (ni  $r = 0$ , ni  $r \rightarrow \infty$ ). Es obvio que en este caso la distribución de carga *no está localizada*. En general, para distribuciones no localizadas no es posible hacer  $\phi(\infty) = 0$ . Hay que tener presente, sin embargo, que en la práctica experimental, y en el mundo real, *toda distribución es finita y localizada*; más aún si se toma en cuenta el tamaño finito del universo.