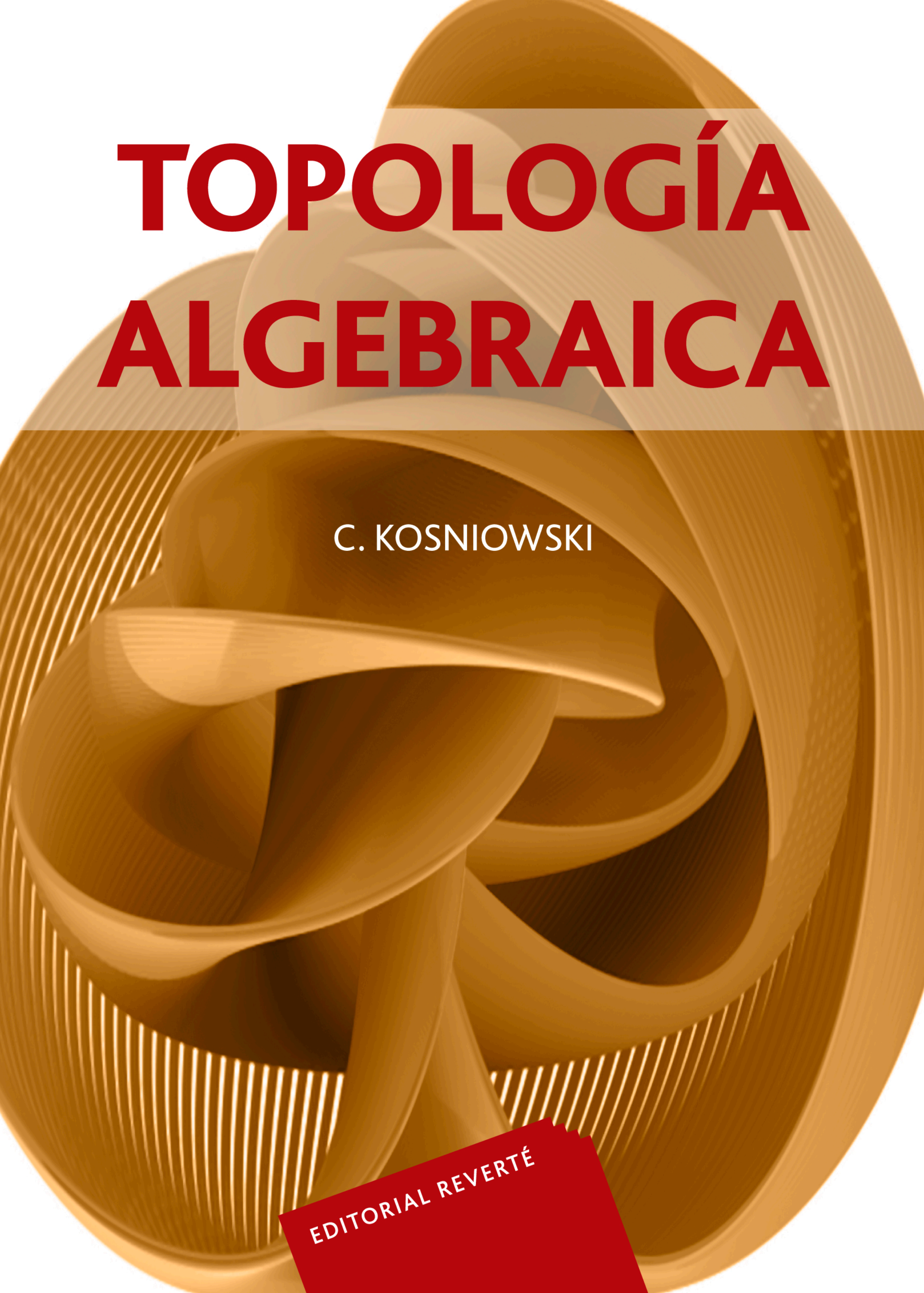
TOPOLOGÍA ALGEBRAICA



C. KOSNIOWSKI

EDITORIAL REVERTÉ

TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

C. KOSNIOWSKI

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
A first course in algebraic topology

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Cambridge University Press, Cambridge (England)

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1986
ISBN 978-84-291-5098-8

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9124-0

Versión española por:
Manuel Castellet Solanas
Catedrático de Matemáticas de la Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de Barcelona

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona - ESPAÑA
E-mail: reverte@reverte.com
Internet: http://www.reverte.com

988

Presentación

Este libro proporciona un amplio surtido de cursos introductorios auto-contenidos de topología algebraica para el estudiante medio. Ha sido escrito con espíritu geométrico y está profusamente ilustrado *(después de todo, la topología es una rama de la geometría). Se ha evitado en lo posible la abstracción y, en general, se ha seguido un enfoque bastante pedreste en el momento de introducir conceptos nuevos. En general, los prerrequisitos necesarios se reducen al mínimo y no se supone ningún conocimiento especial de topología general, con lo que el libro es especialmente adecuado para un primer curso de topología con especial énfasis en la topología algebraica. Utilizando este libro, el profesor dispondrá de mucha libertad para configurar un curso de primer ciclo («undergraduate») o de inicio al segundo ciclo.*

A lo largo del libro hay numerosos ejercicios de diferente grado de dificultad para ayudar al lector y al mismo tiempo comprobar su nivel de asimilación. Desde luego, es aconsejable resolver el mayor número posible de ejercicios; sin embargo, no es necesario hacerlos todos, ya que raramente en ningún momento se supone que el lector haya resuelto los ejercicios; normalmente, cuando se necesita la solución de un ejercicio, ésta está incluida en el texto.

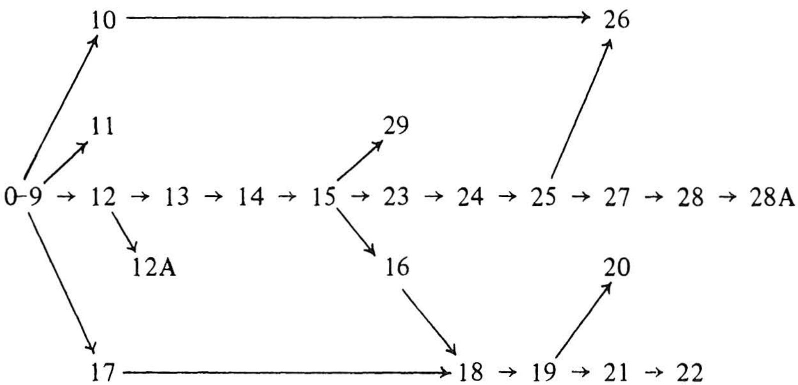
El contenido de este libro abarca algunos temas de topología y de topología algebraica seleccionados por su «capacidad para ser asimilados»; son, posiblemente, las partes más elegantes de la materia. En el último capítulo se dan algunas recomendaciones para el que desee seguir estudiando topología algebraica.

Aproximadamente una cuarta parte del libro está destinada a la topología general y tres cuartas partes a la topología algebraica. La topología general que presentamos está exenta de las patologías usuales. Se cubre suficiente material para que el lector pueda pasar rápidamente a la parte «importante» de la topología. En los capítulos dedicados a la topología algebraica se hace especial hincapié en el grupo fundamental de un espacio. Los estudiantes suelen asimilar con facilidad el concepto de grupo fundamental, que proporciona una buena introducción a la esencia de la topología algebraica. Se estudian con detalle la teoría de espacios recubridores y el teorema de Seifert-Van Kampen, que son usados para calcular grupos fundamentales. El libro incluye también otros temas como variedades y superficies, el teorema de la curva de Jordan (como un apéndice del Capítulo 12), teoría de nudos y un capítulo introductorio a la homología singular.

Puesto que este libro trata de topología y no de historia de la topología, no hemos incluido sistemáticamente nombres y fechas.

El libro no debe ser estudiado necesariamente de forma lineal. El diagrama siguiente muestra aproximadamente la interdependencia de los diversos capítulos. Por ejem-

plo, para poder comprender el Capítulo 18, el lector deberá haber estudiado previamente los Capítulos 0-9, 12-16 y 17.



Czes Kosniowski
Newscastle-upon-Tyne

Nota del traductor

Dos consideraciones sobre la edición en lengua castellana de este libro: una sobre el contenido, otra sobre el lenguaje.

Ampliando los comentarios que hace el autor sobre la adaptabilidad del libro a los curricula anglosajones, únicamente añadir que este texto encaja perfectamente con los conocimientos de topología general y de topología algebraica que debe poseer un estudiante español al finalizar el primer ciclo de la licenciatura de Matemáticas. El profesor deberá excluir, posiblemente, algunos capítulos según sus preferencias; como alternativas cabe sugerir los siguientes grupos: 12A, 17-22, 27-28A, 29.

El lenguaje merece un breve comentario. El traductor ha procurado en lo posible ser fiel a la expresividad del vocabulario utilizado por el autor. La topología es una de las disciplinas más ricas en expresiones folklóricas, motivadas por la imaginación y por la interpretación geométrica, expresiones que, a veces, pueden parecer extrañas en un texto, pero que forman parte del léxico de los topólogos. Y, en consecuencia, no hay que prescindir de ellas.

Índice analítico

Capítulo 0

Conjuntos y grupos

En este capítulo damos algunas definiciones y resultados básicos de teoría de conjuntos y de teoría de grupos que usaremos más adelante. Este capítulo servirá de referencia cuando sea necesario.

Para conjuntos X, Y la notación $Y \subseteq X$ significa que Y es un subconjunto de X e $Y \subset X$ significa que Y es un subconjunto de X distinto de X. Si $Y \subseteq X$ denotamos por $X - Y$ el conjunto de elementos de X que no pertenecen a Y. Al conjunto vacío lo denotaremos por $\emptyset$.

El producto *cartesiano* o *directo* de dos conjuntos X e Y es el conjunto de pares ordenados de la forma (x, y), donde $x \in X$ e $y \in Y$, es decir

$$X \times Y = \{ (x, y); x \in X, y \in Y \} .$$

El producto cartesiano de una colección finita $\{X_i; i=1, 2, \ldots, n\}$ de conjuntos puede definirse de manera análoga:

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n \} .$$

Una *función* o *aplicación* $f\colon X \to Y$ entre dos conjuntos es una correspondencia que asocia a cada elemento x de X un único elemento f(x) de Y. La *función identidad* de un conjunto X es la función $1\colon X \to X$ tal que $1(x) = x$ para todo $x \in X$. La *imagen* de la función $f\colon X \to Y$ está definida por

$$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{ y \in Y; y = f(x) \text{ para algún } x \in X \} .$$

Obsérvese que si W, W′ son dos subconjuntos de X,

$$f(W \cup W') = f(W) \cup f(W'),$$
$$f(W \cap W') \subseteq f(W) \cap f(W').$$

Más generalmente, si $\{W_j;\ j \in J\}$ es una colección de subconjuntos de X, donde J es un *conjunto de índices,* entonces

$$f\left(\bigcup_{j\in J} W_j\right) = \bigcup_{j\in J} f(W_j),$$
$$f\left(\bigcap_{j\in J} W_j\right) \subseteq \bigcap_{j\in J} f(W_j).$$

A menudo, si no hay peligro de confusión, escribiremos simplemente f en lugar de $f{:}X \to Y$. **Toda función $f\colon X \to Y$ define una función de X en f(X) que denotaremos también por f.** Si A es un subconjunto de X, la *restricción* de f a A será denotada por $f \mid A$; es la función $f \mid A : A \to Y$ definida por $(f \mid A)(a) = f(a)$ para $a \in A$.

Si Z es un subconjunto de Y y $f\colon X \to Y$ es una función, la *imagen inversa* de Z por f es

$$f^{-1}(Z) = \{\, x \in X;\ f(x) \in Z \,\}.$$

Obsérvese que

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} Z_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Z_j)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} Z_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Z_j),$$
$$f^{-1}(Y-Z_j) = X-f^{-1}(Z_j),$$

para cualquier colección $\{Z_j; j \in J\}$ de subconjuntos Z_j de Y.

Una aplicación $f\colon X \to Y$ es *inyectiva* si $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in X$, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$. Una aplicación $f\colon X \to Y$ es *exhaustiva* si $f(X) = Y$. Una aplicación $f\colon X \to Y$ se llama *biyectiva* si es a la vez inyectiva y exhaustiva; en este caso existe una aplicación inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ definida por

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son aplicaciones, la *aplicación compuesta* $gf\colon X \to Z$ está definida por

$$gf(x) = g(f(x)),\ x \in X.$$

Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación biyectiva, $ff^{-1}\colon Y \to Y$ y $f^{-1}f\colon X \to X$ son ambas las aplicaciones identidad. Recíprocamente, si $gf\colon X \to X$ y $fg\colon Y \to Y$ son ambas las aplicaciones identidad, entonces f y g son aplicaciones biyectivas, cada una de ellas la inversa de la otra. La condición de que $gf\colon X \to X$ sea la aplicación identidad, implica que f es inyectiva y g es exhaustiva.

Una *relación* en un conjunto X es un subconjunto $\sim$ de $X \times X$. Escribiremos usualmente $x \sim y$ si $(x,y) \in \sim$. Una relación $\sim$ en X es una *relación de equivalencia* si cumple las tres condiciones siguientes:

(i) reflexiva: $x \sim x$ para todo $x \in X$.
(ii) simétrica: Si $x \sim y$ entonces $y \sim x$.
(iii) transitiva: Si $x \sim y$ e $y \sim z$ entonces $x \sim z$.

La *clase de equivalencia* de x es el conjunto.

$$[x] = \{ y \in X; x \sim y \} .$$

Si $\sim$ es una relación de equivalencia en X, entonces cada elemento de X pertenece exactamente a una clase de equivalencia.

Una *operación binaria* en un conjunto X es una aplicación $f: X \times X \to X$. Pondremos xy en lugar de $f(x,y)$ (notación multiplicativa), o en algunas ocasiones $x + y$ (notación aditiva).

Un *grupo* es un conjunto G junto con una operación binaria que satisface las tres condiciones siguientes:

(1) Existe un elemento $1 \in G$, el *elemento identidad* de G, tal que $g1 = 1g = g$ para todo $g \in G$.

(2) Para cada $g \in G$ existe un elemento $g^{-1} \in G$, el *inverso* de g, tal que $gg^{-1} = g^{-1} g = 1$.

(3) Para todo $g_1,g_2,g_3 \in G$ se cumple $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ (*asociatividad*)

Cuando se usa notación aditiva el elemento identidad se denota por 0 y el inverso de g por $-g$. El *grupo trivial* es un grupo que sólo contiene el elemento identidad $\{1\}$ o $\{0\}$.

Un subconjunto H de un grupo G es un *subgrupo* de G si H es un grupo con la operación binaria de G. Si H es un subgrupo de G y $g \in G$, la *clase lateral por la izquierda de* H *por* g es el subconjunto

$$gH = \{ gh; h \in H \}$$

De manera análoga se define la *clase lateral por la derecha.* Dos clases laterales por la izquierda gH, g'H de un subgrupo H son disjuntas o coinciden.

El *producto directo* $G \times H$ de dos grupos G y H es el conjunto $G \times H$ dotado de la operación binaria definida por $(g,h)(g',h') = (gg',hh')$. En el caso aditivo hablaremos de *suma directa* y escribiremos $G \oplus H$.

Un *homomorfismo* $f: G \to H$ de un grupo G en un grupo H es una aplicación tal que

$$f(gg') = f(g)f(g')$$

para todo $g,g' \in G$. Si el homomorfismo $f: G \to H$ es biyectivo, diremos que G y H son *grupos isomorfos* y que f es un *isomorfismo;* escribiremos $G \cong H$ o $f: G \cong H$. *El núcleo* de un homomorfismo $f: G \to H$ es el conjunto

$$\ker f = \{ g \in G; f(g) = 1_H \}$$

donde 1_H es la identidad de H. El núcleo de un isomorfismo consta únicamente del elemento identidad de G.

Un subgrupo K de un grupo G es *normal* si $gkg^{-1} \in K$ para todo $g \in G$, $k \in K$. El núcleo de un homomorfismo f: $G \to H$ es un subgrupo normal de G. Un homomorfismo f: $G \to H$ es inyectivo si y sólo si ker f $= \{1\}$.

Si K es un subgrupo normal de G, la clase lateral por la izquierda gK coincide con la clase lateral por la derecha Kg y el conjunto G/K de todas las clases laterales por la izquierda de K es un grupo con la operación

$$(gK)(g'K) = (gg')K.$$

El grupo G/K se llama el *grupo cociente* de G por K.

El *primer teorema de isomorfismo* establece que si f: $G \to H$ es un homomorfismo exhaustivo de un grupo G en un grupo H con el núcleo K, entonces H es isomorfo al grupo cociente G/K.

Si $g \in G$, el *subgrupo generado por g* es el subconjunto de G formado por todas las potencias enteras de g

$$\langle g \rangle = \{ g^n ; n \in \mathbb{Z} \}$$

donde $g^n = \overbrace{gg \ldots g}^{n}$ si $n \geq 0$ y $g^n = \overbrace{g^{-1} g^{-1} \ldots g^{-1}}^{-n}$ si $n \leq 0$. Con notación aditiva

$$\langle g \rangle = \{ ng ; n \in \mathbb{Z} \}$$

donde $ng = \overbrace{g+g+\ldots+g}^{n}$ si $n \geq 0$ y $ng = \overbrace{-g+(-g)+\ldots+(-g)}^{-n}$ si $n \leq 0$. Si $G = \langle g \rangle$ para algún g, decimos que G es un *grupo cíclico* con generador g. En general, un *conjunto de generadores* de un grupo G es un subconjunto S de G tal que cada elemento de G es un producto de potencias de elementos de S. Si S es un conjunto finito decimos que G es *finitamente generado.*

Un grupo G se dice que es *abeliano* ó *conmutativo* si $gg' = g'g$ para todo $g, g' \in G$. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es un grupo abeliano con la operación suma (notación aditiva); más aún, es un grupo cíclico generado por $+1$ ó -1.

Un *grupo abeliano libre de rango n* es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ (la suma directa de n veces $\mathbb{Z}$).

El *teorema de descomposición para grupos abelianos finitamente generados* establece: Si G es un grupo abeliano finitamente generado, G es isomorfo a

$$H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_m$$

donde H_0 es un grupo abeliano libre y los H_i, $i=1,2,\ldots,m$, son grupos cíclicos de orden una potencia de un número primo. El rango de H_0 y los órdenes de los subgrupos cíclicos H_1, $H_2,\ldots,H_m$ están unívocamente determinados.

Un *conmutador* en un grupo G es un elemento de la forma $ghg^{-1}h^{-1}$. El *subgrupo conmutador* de G es el subconjunto de G formado por todos los productos finitos de conmutadores de G (es un subgrupo). El subgrupo conmutador K es un subgrupo normal de G y es de hecho el menor subgrupo de G para el cual G/K es abeliano.

Usaremos $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$ para denotar los conjuntos de los números reales, complejos, enteros, naturales (o enteros positivos) y racionales, respectivamente. A menudo nos referiremos a $\mathbb{R}$ como la recta real y a $\mathbb{C}$ como el plano complejo. El conjunto $\mathbb{R}^n$ es el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$. Usaremos la notación siguiente para ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ (llamados *intervalos*):

$$\begin{aligned}(a,b) &= \{ x \in \mathbb{R} ; a < x < b \}, \\ [a,b] &= \{ x \in \mathbb{R} ; a \leq x \leq b \}, \\ [a,b) &= \{ x \in \mathbb{R} ; a \leq x < b \}, \\ (a,b] &= \{ x \in \mathbb{R} ; a < x \leq b \}.\end{aligned}$$

El significado de los subconjuntos $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ y (a, ∞) es claro. Nótese que $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Obsérvese que usamos la misma notación (a,b) para un par de elementos, en $\mathbb{R}^2$ por ejemplo, y para un intervalo de $\mathbb{R}$. En cada caso concreto su significado quedará claro según el contexto.

Capítulo 1

Material básico: espacios métricos

En topología se estudian conjuntos con alguna «estructura» adicional que nos permita dar sentido a la pregunta ¿Es f: $X \to Y$ continua o no?, donde f: $X \to Y$ es una aplicación entre dos de estos conjuntos. En este capítulo pondremos al descubierto esta «estructura» fijándonos en los espacios euclídeos y métricos.

Recordemos que una aplicación f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es *continua en x* si para todo $\varepsilon_x > 0$ existe un $\delta_x > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon_x$ siempre que $|y - x| < \delta_x$. Se dice, entonces, que la aplicación es *continua* si lo es en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$. Podemos extender esta definición de continuidad a aplicaciones f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ simplemente reemplazando el signo «valor absoluto» por la «distancia euclídea». Más generalmente, si tenemos conjuntos con «funciones distancia», podemos definir la continuidad usando estas funciones distancia. Una «función distancia» —llamada con propiedad una métrica— debe satisfacer algunas (obvias) condiciones, lo que nos lleva a una definición.

1.1 Definición

Sea A un conjunto. Una función d: $A \times A \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* en A si satisface

(i) $d(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b$,
(ii) $d(a,b) + d(a,c) \geq d(b,c)$ para todo $a,b,c \in A$.

Un conjunto A con una métrica determinada se llama un *espacio métrico* y se denota por (A,d) o simplemente M.

La segunda propiedad se conoce con el nombre de *desigualdad triangular.*

1.2 Ejercicio

Demostrar que si d es una métrica en A, entonces $d(a,b) \geq 0$ y $d(a,b) = d(b,a)$ para todo $a,b \in A$.

Si tomamos $A = \mathbb{R}$ y $d(x,y) = |x - y|$ no es difícil ver que d es una métrica. Más generalmente, tomemos $A = \mathbb{R}^n$ y definamos d por

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x-y\|$$

donde $x = (x_1,x_2,...x_n)$ e $y = (y_1,y_2,...y_n)$. De nuevo, no es difícil demostrar que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$. Esta métrica se denomina la métrica *euclídea* o *usual*.

Otros dos ejemplos de métricas en $A = \mathbb{R}^n$ vienen dados por

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \,, \qquad d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Dejamos como ejercicio para el lector la comprobación de que estas dos funciones definen efectivamente una métrica.

Finalmente, podemos definir siempre una métrica en un conjunto arbitrario mediante $d(x,y) = 0$ si $x = y$ y $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$; la métrica resultante se llama la *métrica discreta* en A.

1.3 Ejercicios

(a) Demostrar que cada una de las funciones siguientes define una métrica en $\mathbb{R}^n$:

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x-y\| \,; \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x=y, \\ 1 \text{ si } x \neq y; \end{cases}$$

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \,; \quad d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

(b) Demostrar que $d(x,y) = (x - y)^2$ no define una métrica en $\mathbb{R}$.

(c) Demostrar que $d(x,y) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ no define una métrica en $\mathbb{R}^n$.

(d) Sean d una métrica y r un número real positivo. Demostrar que d_r definida mediante $d_r(x,y) = rd(x,y)$ es también una métrica.

(e) Sea d una métrica. Demostrar que d' definida por

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

es también una métrica.

(f) En $\mathbb{R}^2$ definimos $d(x,y)$ = menor entero mayor o igual que la distancia usual entre x e y. ¿Es d una métrica en $\mathbb{R}^2$?

La continuidad entre espacios métricos es ahora, tal como ya hemos indicado, fácil de definir.

1.4 Definición

Sean (A,d_A), (B,d_B) espacios métricos. Una aplicación $f\colon A \to B$ se dice *continua* en $x \in A$ si y sólo si para todo $\epsilon_x > 0$ existe un $\delta_x > 0$ tal que $d_B(f(x),f(y)) < \epsilon_x$ siempre que $d_A(x,y) < \delta_x$. La aplicación se dice *continua* si lo es en todos los puntos $x \in A$.

1.5 Ejercicios

(a) Sea A un espacio métrico con métrica d. Sea $y \in A$. Demostrar que la aplicación $f\colon A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x,y)$ es continua ($\mathbb{R}$ está dotado de la métrica usual).

(b) Sea M el espacio métrico $(\mathbb{R},d)$, donde d es la métrica usual. Sea M_0 el espacio métrico $(\mathbb{R},d_0)$, donde d_0 es la métrica discreta, es decir

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y, \\ 1 \text{ si } x \neq y. \end{cases}$$

Demostrar que cualquier aplicación $f\colon M_0 \to M$ es continua. Demostrar que no existe ninguna aplicación continua inyectiva de M a M_0.

Ocurre a menudo que cambiando la métrica en A o en B no cambia el conjunto de las aplicaciones continuas de A en B. Como ejemplos véanse los ejercicios siguientes.

1.6 Ejercicios

(a) Sean A,B espacios métricos con métricas d y d_B respectivamente, Sea d_r la métrica en A definida en el Ejercicio 1.3(d) (es decir $d_r(x,y) = rd(x,y)$). Sea f una aplicación de A en B. Probar que f es continua respecto a la métrica d de A si y sólo si lo es respecto a la métrica d_r de A.

(b) Como en (a) pero reemplazando d_r por la métrica d' del Ejercicio 1.3(e).

Así pues, la distancia no es el criterio ideal para determinar si una aplicación es continua o no. Lo que interesa verdaderamente es el concepto de «conjunto abierto».

1.7 Definición

Un subconjunto U de un espacio métrico (A,d) se dice que es *abierto* si para todo $x \in U$ existe un $\epsilon_x > 0$ tal que si $y \in A$ y $d(y,x) < \epsilon_x$ entonces $y \in U$.

En otras palabras, U es abierto si para todo $x \in U$ existe un $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(x) = \{y \in A;\ d(y,x) < \epsilon_x\} \subseteq U$.

Un ejemplo de un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ es $(0,1) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$. En $\mathbb{R}^2$ los siguientes conjuntos son abiertos:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}, \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 > 1\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

1.8 Ejercicios

(a) Demostrar que $B_\epsilon(x)$ es siempre un conjunto abierto, para todo x y todo $\epsilon > 0$.

(b) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (con la métrica usual) son abiertos?

$$\{(x,y);\ x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1,0)\}, \quad \{(x,y);\ x^2 + y^2 \leq 1\},$$
$$\{(x,y);\ |x| < 1\}, \quad \{(x,y);\ x + y < 0\},$$
$$\{(x,y);\ x + y \geq 0\}, \quad \{(x,y);\ x + y = 0\}.$$

(c) Demostrar que si $\mathscr{F}$ es la familia de todos los conjuntos abiertos de un espacio métrico, entonces

(i) El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total pertenecen a $\mathscr{F}$,

(ii) La intersección de dos miembros de $\mathscr{F}$ pertenece a $\mathscr{F}$,

(iii) La unión de una colección *arbitraria* de miembros de $\mathscr{F}$ pertenece a $\mathscr{F}$.

(d) Dar un ejemplo de una colección infinita de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ (con la métrica usual) cuya intersección no sea un conjunto abierto.

Usando el concepto de conjunto abierto, obtenemos el siguiente resultado crucial.

1.9 Teorema

Una aplicación $f: M_1 \to M_2$ entre dos espacios métricos es continua si y sólo si para todo conjunto abierto U de M_2 el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en M_1.

Este resultado nos dice que f es continua si y sólo si las imágenes *inversas* de conjuntos abiertos son abiertos. *No* afirma que las imágenes de conjuntos abiertos sean abiertos.

Demostración. Designemos por d_1 y d_2 las métricas de M_1 y M_2 respectivamente. Supongamos que f es continua y que U es un subconjunto abierto de M_2. Sea $x \in f^{-1}(U)$; entonces $f(x) \in U$. Puesto que U es abierto existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$. La continuidad de f asegura entonces la existencia de un $\delta > 0$ tal que

$$d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon,$$

o, en otras palabras, $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$, lo que significa que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$. Puesto que es cierto para todo $x \in f^{-1}(U)$, se deduce que $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de M_1.

Recíprocamente, sea $x \in M_1$; entonces, para todo $\epsilon > 0$ el conjunto $B_\epsilon(f(x))$ es un subconjunto abierto de M_2, por lo que $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ es un subconjunto abierto de M_1. Pero, puesto que $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$, esto significa que existe algún $\delta > 0$ con $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$; es decir, $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. En otras palabras, existe un $\delta > 0$ tal que $d_2(f(x),f(y)) < \epsilon$ siempre que $d_1(x,y) < \delta$; f es, pues, continua.

Este teorema nos dice, en particular, que si dos métricas en un conjunto dan lugar a la misma familia de conjuntos abiertos, entonces cualquier aplicación que sea continua usando una métrica será automáticamente continua usando la otra. Los Ejercicios 1.6 pueden ser enunciados así: «Demostrar que las métricas d, d_r y d' dan lugar a la misma familia de conjuntos abiertos».

1.10 Ejercicio

De las métricas $d(x,y) = \Sigma |x_i - y_i|$, $d(x,y) = \max |x_i - y_i|$ de $\mathbb{R}^n$, ¿cuáles dan lugar a la misma familia de conjuntos abiertos que la métrica usual de $\mathbb{R}^n$?

De lo anterior se desprende que en el estudio de la continuidad entre espacios métricos es la familia de conjuntos abiertos de cada métrica lo que importa, y no la métrica en sí misma. Ello nos lleva a la siguiente idea: Dado un conjunto X escojamos una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X y llamémosles «conjuntos abiertos» de X. Obtenemos así un nuevo objeto $(X,\mathscr{F})$ formado por un conjunto X junto con una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X. La continuidad entre dos de estos objetos $(X,\mathscr{F})$, $(Y,\mathscr{F}')$ puede, entonces, ser definida del siguiente modo: $f: X \to Y$ es continua si $f^{-1}(U) \in \mathscr{F}$ siempre que $U \in \mathscr{F}'$. Naturalmente, si admitiéramos familias arbitrarias no obtendríamos conceptos y resultados matemáticos interesantes. Por tanto, debemos imponer a la familia $\mathscr{F}$ de «conjuntos abiertos» ciertas condiciones simples, condiciones que cumpla la familia $\mathscr{F}$ de los conjuntos abiertos de un espacio métrico (Ejercicio 1.8(c)). Éstas son:

(i) (por conveniencia) el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto total pertenecen a $\mathscr{F}$,
(ii) la intersección de dos miembros de $\mathscr{F}$ pertenece a $\mathscr{F}$,
(iii) la unión de una colección *arbitraria* de miembros de $\mathscr{F}$ pertenece a $\mathscr{F}$.

La «estructura» asociada a un conjunto X, a la que nos referíamos al principio de este capítulo, es simplemente una familia $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X que satisfaga las tres propiedades anteriores. Este es el punto de partida de la topología.

Capítulo 2

Espacios topológicos

Un espacio topológico no es más que un conjunto junto con ciertos subconjuntos (que serán llamados conjuntos abiertos) que satisfacen tres propiedades.

2.1 Definición

Sea X un conjunto y $\mathscr{U}$ una colección de subconjuntos de X que cumpla

(i) $\emptyset \in \mathscr{U}$, $X \in \mathscr{U}$,
(ii) la intersección de dos miembros de $\mathscr{U}$ es de $\mathscr{U}$,
(iii) la unión de cualquier número de miembros de $\mathscr{U}$ es de $\mathscr{U}$.

Una tal colección de $\mathscr{U}$ de subconjuntos de X se llama una *topología* en X. El conjunto X junto con $\mathscr{U}$ se llama un *espacio topológico* y se denota por $(X,\mathscr{U})$, aunque a menudo escribiremos simplemente T o X. Los miembros $U \in \mathscr{U}$ se llaman los *conjuntos abiertos* de T. Los elementos de X se llaman los *puntos* de T.

Obsérvese que la condición (ii) implica que la intersección de un número finito de miembros de $\mathscr{U}$ es de $\mathscr{U}$. Si denotamos por $\mathscr{S}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X, una topología en X no es más que una elección de $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{S}(X)$ que satisfaga las condiciones (i), (ii) y (iii) anteriores. Diferentes elecciones dan lugar a diferentes topologías en X.

Es importante disponer de muchos ejemplos de espacios topológicos. Como primer ejemplo se deduce inmediatamente del capítulo anterior que todo espacio métrico da lugar a un espacio topológico. Se dice que el espacio resultante posee la *topología métrica* o la *topología usual.* El recíproco no es cierto —esto es, existen espacios topológicos que no se obtienen a partir de ningún espacio métrico— véase el Ejercicio 2.2(c). Los espacios topológicos que se obtienen a partir de un espacio métrico se llaman *metrizables*. Obsérvese que dos espacios métricos pueden dar lugar al mismo espacio topológico.

Considerando los casos extremos de las posibles familias de subconjuntos de un conjunto X que cumplen las condiciones para que X sea un espacio topológico, obtenemos nuestros dos siguientes ejemplos. El primero es cuando $\mathscr{U} = \{\emptyset, X\}$, que obviamente da una topología en cualquier conjunto X, llamada la topología *burda* de X. El otro caso extremo es cuando $\mathscr{U}$ es el conjunto $\mathscr{P}(X)$ de todos los subconjuntos de X; la topología que claramente resulta se llama topología *discreta* de X.

2.2 Ejercicios

(a) Demostrar que todo espacio topológico con la topología discreta es metrizable. (Indicación: considerar la métrica discreta.)

(b) Sea X un espacio topológico metrizable. Probar que para todo par a, b de puntos distintos de X existen conjuntos abiertos U_a y U_b disjuntos que contienen a y b respectivamente.

(c) Usar (b) para demostrar que si X posee como mínimo dos puntos y está dotado de la topología burda, entonces X no es metrizable.

Un ejemplo interesante de topología en un conjunto X es la llamada *topología de los complementos finitos.* Aquí $\mathscr{U}$ se compone de $\emptyset$, X y de aquellos subconjuntos de X cuyo complementario es finito. Desde luego si X es finito esta topología coincide con la topología discreta de X. Si X es infinito, debemos comprobar que la familia $\mathscr{U}$ cumple las tres condiciones para una topología. La primera condición es trivialmente cierta. Para la segunda supongamos que $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$, con lo que $X-U_1$ y $X-U_2$ son finitos. Así pues, $(X-U_1) \cup (X-U_2)$ es también finito; pero este conjunto coincide con $X-(U_1 \cap U_2)$, de donde $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{U}$. Para la tercera condición usamos el hecho de que $X-(\bigcup_{j\in J} U_j) = \bigcap_{j\in J}(X-U_j)$.

Si X está formado por dos puntos $\{a,b\}$, podemos dotar a X de cuatro diferentes topologías, a saber:

$$\mathscr{U}_1 = \{\emptyset, X\}\,;\ \mathscr{U}_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}\,;\ \mathscr{U}_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}\,;$$
$$\mathscr{U}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}.$$

Sabemos ya que $\mathscr{U}_1$ y $\mathscr{U}_4$ son topologías y dejamos para el lector la comprobación de que $\mathscr{U}_2$ y $\mathscr{U}_3$ lo son. Obsérvese que $(X,\mathscr{U}_2)$ y $(X,\mathscr{U}_3)$ no son metrizables.

En los ejercicios que siguen se dan otros ejemplos de espacios topológicos.

2.3 Ejercicios

En cada uno de los casos (a), (b) y (c) siguientes demostrar que $\mathscr{U}$ es una topología en X.

(a) $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x);\ x \in \mathbb{R}\}$.

(b) $X = \mathbb{N}$ = enteros positivos = números naturales, $\mathscr{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\} \cup \{O_n; n > 1\}$ donde $O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

(c) $X = \mathbb{R}$, $U \in \mathscr{U}$ si y sólo si U es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y para cada $s \in U$ existe un $t > s$ tal que $[s,t) \subseteq U$, donde $[s,t) = \{x \in \mathbb{R};\ s \leq x < t\}$.
(d) Determinar el número de topologías distintas en un conjunto de tres elementos.
(e) Demostrar que ninguna de las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ son topologías.

$$\mathscr{U}_1 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x]\,;\, x \in \mathbb{R}\}.$$
$$\mathscr{U}_2 = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(a,b);\, a,b \in \mathbb{R},\, a < b\}.$$

Para cualquier subconjunto Y de un espacio topológico X podemos considerar el mayor conjunto abierto contenido en Y; lo designaremos por $\mathring{Y}$ y se llama el *interior* de Y. En otras palabras

$$\mathring{Y} = \bigcup_{j \in J} U_j$$

donde $\{U_j; j \in J\}$ es la familia de todos los conjuntos abiertos contenidos en Y. Obviamente, $x \in \mathring{Y}$ si y sólo si existe un conjunto abierto $U \subseteq Y$ tal que $x \in U$.

Por ejemplo, sea I^n el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ siguiente:

$$I^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ 0 \leq x_i \leq 1,\ i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Si $\mathbb{R}^n$ tiene la topología usual (es decir, la topología métrica con la métrica «usual» $d(x,y) = (\Sigma_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$) entonces el interior de I^n es

$$\mathring{I}^n = \{x;\ 0 < x_i < 1,\ i = 1,2,\ldots,n\}.$$

Para verlo, sea $x \in \mathring{I}^n$ y pongamos $\epsilon = \min\{1 - x_i, x_i;\ i = 1,2,\ldots,n\}$. La bola abierta $B_{\epsilon}(x)$, de centro x y radio ϵ (esto es, $\{y \in \mathbb{R}^n;\ d(y,x) < \epsilon\}$) está contenida en $\mathring{I}^n$ y, por tanto, $\mathring{I}^n$ es abierto. Por otra parte, si, para algún i, $x_i = 1$ o $x_i = 0$, cualquier bola $B_r(x)$ de centro x y radio r contiene puntos que no son de I^n, independientemente del valor de r.

Los complementarios de los conjuntos abiertos tienen un nombre especial.

2.4 Definición

Un subconjunto C de un espacio topológico X se dice que es *cerrado* si y sólo si $X - C$ es abierto.

El siguiente resultado se deduce fácilmente de resultados de teoría de conjuntos sobre el complementario de una intersección y el complementario de una unión.

2.5 Teorema

(i) $\emptyset$, X son cerrados,
(ii) la unión de dos conjuntos cerrados es cerrado,
(iii) la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

El concepto de conjunto cerrado puede usarse para definir un espacio topológico.

2.6 Ejercicios

(a) Sea X un conjunto y $\mathscr{V}$ una familia de subconjuntos de X que cumpla
 (i) $\emptyset, X \in \mathscr{V}$,
 (ii) la unión de dos elementos cualesquiera de $\mathscr{V}$ pertenece a $\mathscr{V}$,
 (iii) la intersección de una colección arbitraria de elementos de $\mathscr{V}$ pertenece a $\mathscr{V}$.
 Demostrar que $\mathscr{U} = \{X-V;\ V \in \mathscr{V}\}$ es una topología en X.
(b) Probar que en un espacio topológico discreto todo subconjunto es abierto y cerrado a la vez.
(c) Demostrar que si un espacio topológico X consta de un número finito de puntos, cada uno de los cuales es un subconjunto cerrado, entonces la topología de X es la discreta.
(d) Demostrar que en el espacio topológico $(\mathbb{R},\mathscr{U})$, donde $\mathscr{U}$ está definido como en el Ejercicio 2.3(c), los conjuntos $[s,t)$ son a la vez abiertos y cerrados.

Para cualquier subconjunto Y de un espacio topológico X podemos considerar el menor conjunto cerrado que contiene a Y; este conjunto se denota por $\bar{Y}$ y se llama *adherencia* de Y. En otras palabras

$$\bar{Y} = \bigcap_{j \in J} F_j$$

donde $\{F_j;\ j \in J\}$ es la familia de todos los subconjuntos cerrados que contienen a Y. Los puntos que pertenecen a $\bar{Y}$ pero no a Y se llaman a menudo *puntos límite* de Y. El resultado siguiente da una descripción alternativa de $\bar{Y}$.

2.7 Lema

$x \in \bar{Y}$ si y sólo si para todo conjunto abierto U que contenga a x, $U \cap Y \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $x \in \bar{Y}$ y supongamos que existe un conjunto abierto U que contenga a x y tal que $U \cap Y = \emptyset$. Así pues, $X-U$ es cerrado y $Y \subseteq X-U$; por tanto $\bar{Y} \subseteq X-U$. Pero $x \in \bar{Y}$ y $x \in U$, que es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que $x \notin \bar{Y}$, es decir $x \in X - \bar{Y}$. Pero $X - \bar{Y}$ es abierto, y $(X - \bar{Y}) \cap \bar{Y} = \emptyset$; por tanto, $(X - \bar{Y}) \cap Y = \emptyset$, que es una contradicción.

Si consideramos $\mathbb{R}$ con su topología usual, la adherencia de los conjuntos (a,b), [a,b), (a,b] y [a,b] es [a,b].

2.8 Ejercicios

(a) Sea X la recta real $\mathbb{R}$ con su topología usual. Hallar la adherencia de cada uno de los subconjuntos de X siguientes

$$A = \{1,2,3,\dots\}, \; B = \{x; x \text{ es racional}\}, \; C = \{x; x \text{ es irracional}\}.$$

(b) Sea X el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología del Ejercicio 2.3(c). Hallar la adherencia de cada uno de los subconjuntos de X siguientes

$$(a,b),\; [a,b),\; (a,b],\; [a,b].$$

En los ejercicios siguientes se dan más propiedades de la adherencia de un conjunto.

2.9 Ejercicios

Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones.

(a) Si Y es un subconjunto de un espacio topológico X con $Y \subseteq F \subseteq X$ y F es cerrado, entonces $\bar{Y} \subseteq F$.
(b) Y es cerrado si y sólo si $Y = \bar{Y}$.
(c) $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$.
(d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.
(e) $X - \overset{\circ}{Y} = \overline{(X-Y)}$.
(f) $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$, donde $\partial Y = \bar{Y} \cap \overline{(X-Y)}$($\partial Y$ se llama la *frontera* de Y).
(g) Y es cerrado si y sólo si $\partial Y \subseteq Y$.
(h) $\partial Y = \emptyset$ si y sólo si Y es a la vez abierto y cerrado.
(i) $\partial(\{x \in \mathbb{R}; a<x<b\}) = \partial(\{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}) = \{a,b\}$.
(j) Probar que Y es la adherencia de algún conjunto abierto si y sólo si Y es la adherencia de su interior.

Un concepto que será útil más adelante es el de «entorno» de un punto.

2.10 Definición

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $N \subseteq X$ con $x \in N$ se dice que es un *entorno* de x si existe un conjunto abierto U tal que $x \in U \subseteq N$.

En particular, todo conjunto abierto es un entorno de cada uno de sus puntos. Más generalmente, todo conjunto A con interior no vacío es un entorno de cada uno de los puntos del interior de A. En el ejercicio siguiente se dan algunas propiedades simples de los entornos. (Los resultados de este ejercicio pueden ser usados para definir una topología.)

2.11 Ejercicio

Sea X un espacio topológico. Probar cada una de las afirmaciones siguientes.

(i) Para cada punto $x \in X$ existe por lo menos un entorno de x.
(ii) Si N es un entorno de x y $N \subseteq M$, M es también un entorno de x.
(iii) Si M y N son entornos de x, también lo es $N \cap M$.
(iv) Para cada $x \in X$ y cada entorno N de x existe un entorno U de x tal que $U \subseteq N$ y U es un entorno de cada uno de sus puntos.

Capítulo 3

Aplicaciones continuas

3.1 Definición

Una aplicación $f\colon X \to Y$ entre dos espacios topológicos se dice que es *continua* si la imagen inversa $f^{-1}(U)$ de todo conjunto abierto U de Y es abierto en X.

Los ejemplos más triviales de aplicaciones continuas son la aplicación identidad $1_X\colon X \to X$ y la aplicación constante $X \to Y$ que aplica todo punto de X en un mismo punto prefijado de Y.

Si consideramos un espacio X con la topología discreta, toda aplicación $f\colon X \to Y$ de X en cualquier espacio topológico Y es continua, puesto que la imagen inversa de cualquier subconjunto de Y es abierto en X. Por otra parte, si consideramos Y con la topología burda, toda aplicación $f\colon X \to Y$ de cualquier espacio topológico X en Y es también continua, como es fácil observar. De hecho, hay un recíproco de estos dos ejemplos, dado en el siguiente grupo de ejercicios.

La aplicación del ejemplo siguiente no es continua. Sea $X = (\mathbb{R},\mathcal{U})$, donde $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,x);\ x \in \mathbb{R}\}$ y sea $f\colon X \to X$ dada por $f(x) = x^2$. La aplicación f no es continua ya que $f^{-1}((-\infty,y^2)) = (-y,y)$ que no pertenece a $\mathcal{U}$. Se deja como ejercicio la determinación de las aplicaciones continuas de X en X (Ejercicio 3.2(d)).

3.2 Ejercicios

(a) Sea X un conjunto arbitrario y sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ dos topologías de X. Probar que la aplicación identidad $(X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{U}')$ es continua si y sólo si $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$.

(b) Sea X un espacio topológico con la propiedad de que, para cualquier espacio topológico Y, toda aplicación $f\colon X \to Y$ es continua. Demostrar que X tiene la topología discreta. (Indicación: tomar como Y el espacio X pero con la topología discreta.)

(c) Sea Y un espacio topológico con la propiedad de que, para cualquier espacio topológico X, toda aplicación f: $X \to Y$ es continua. Demostrar que Y tiene la topología burda. (Indicación: tomar X como el espacio Y pero con la topología burda.)

(d) Sea X el conjunto de los números reales con la topología $\{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x);\ x \in \mathbb{R}\}$. Probar que una aplicación f: $X \to X$ es continua si y sólo si es no decreciente (esto es, si $x > x'$ entonces $f(x) \geq f(x')$) y continua por la derecha en el sentido clásico (es decir, si para todo $x \in X$ y todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \leq x' < x + \delta$, $|f(x) - f(x')| < \epsilon$).

Las aplicaciones continuas pueden caracterizarse en términos de los conjuntos cerrados.

3.3 Teorema

Una aplicación f: $X \to Y$ entre dos espacios topológicos es continua si y sólo si, para todo subconjunto cerrado C de Y, $f^{-1}(C)$ es cerrado.

Demostración. Supongamos que f es continua. Si C es cerrado, $Y-C$ es abierto y, por tanto, $f^{-1}(Y-C)$ es abierto. Pero $f^{-1}(Y-C) = X - f^{-1}(C)$ y, por tanto, $f^{-1}(C)$ es cerrado. Recíprocamente, si U es abierto en Y, $Y-U$ es cerrado y $f^{-1}(Y-U) = X - f^{-1}(U)$ es cerrado, lo que significa que $f^{-1}(U)$ es abierto y, por tanto, f es continua.

Una aplicación que transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos se dice que es una *aplicación abierta.* Las aplicaciones abiertas no son necesariamente continuas. Por ejemplo, sea Y el conjunto formado por dos puntos $\{a,b\}$ con la topología discreta y sea X la recta real con la métrica usual. La aplicación f: $X \to Y$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a \text{ si } x \geq 0, \\ b \text{ si } x < 0, \end{cases}$$

es abierta pero no es continua ya que $f^{-1}(\{a\})$ no es abierto en X. Toda aplicación de un espacio topológico en un espacio topológico discreto es necesariamente abierta.

Diremos que una aplicación f: $X \to Y$ es *cerrada* si la imagen por f de cualquier conjunto cerrado es un cerrado. Las aplicaciones cerradas no son necesariamente continuas; de hecho, la aplicación abierta considerada en el último ejemplo es también cerrada. En general, una aplicación puede (i) no ser ni abierta ni cerrada, (ii) ser abierta pero no cerrada, (iii) ser cerrada pero no abierta, (iv) ser abierta y cerrada. Como ejemplos podemos considerar los siguientes: Para (i) sea X un conjunto A con la topología discreta, Y el mismo conjunto A con la topología burda y f la aplicación identidad. Para (ii) consideremos $X = \{a,b\}$ con la topología discreta e $Y = \{a,b\}$ con la topología $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$; la aplicación constante $a \in Y$ es abierta y continua pero no cerrada. Para (iii) tomemos $X = \{a,b\}$ con la topología discreta e $Y = \mathbb{R}$ con la topología usual; la aplicación f: $X \to Y$ dada por $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ es continua y cerrada pero no abierta. Por último, para (iv) podemos tomar un espacio topológico arbitrario $X = Y$ y como f la identidad. Desde luego, si añadimos algunas restricciones a f podemos conseguir que cualquiera de los casos anteriores no pueda darse.