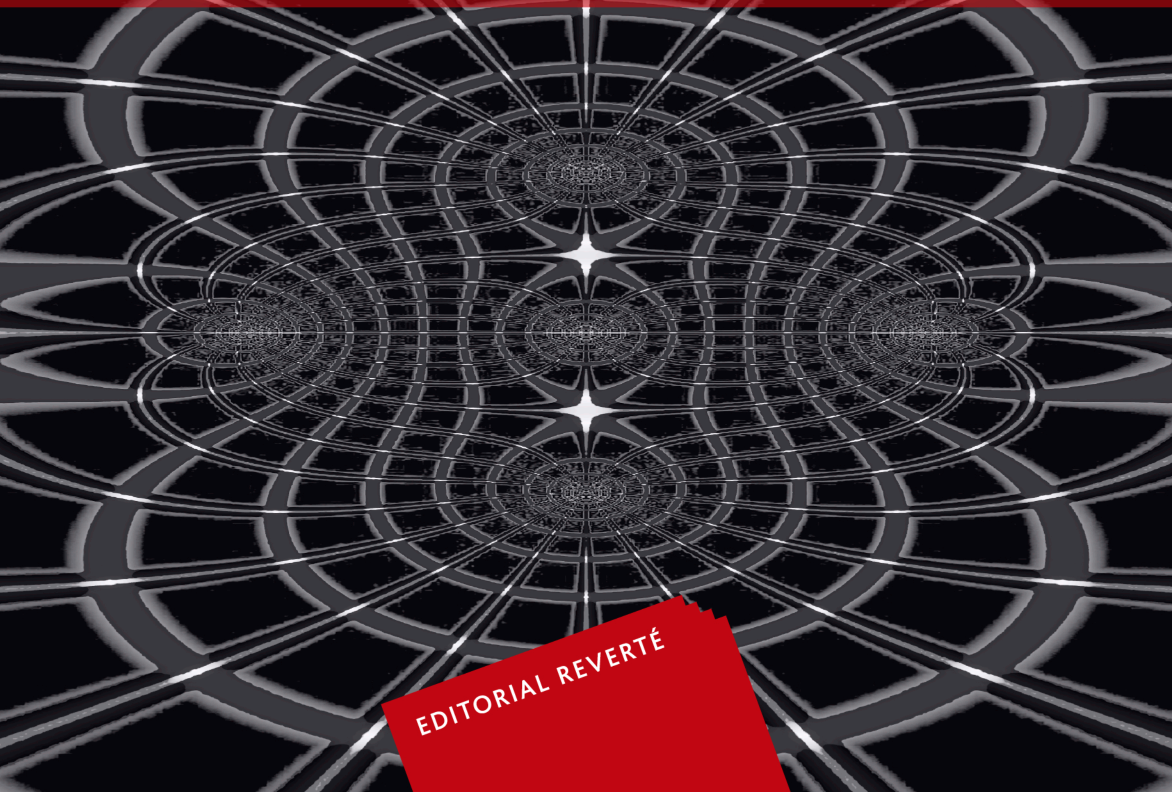
Variable compleja y ecuaciones diferenciales

R. Fuster \ I. Giménez



EDITORIAL REVERTÉ

Variable compleja y **ecuaciones** diferenciales

R. Fuster \ I. Giménez

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1995
ISBN 978-84-291-5032-2

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9111-0

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

#1117

Prólogo

Aunque es imposible ofrecer un curso que se adapte totalmente a los planes de estudio de cada una de las carreras técnicas, es evidente que las ecuaciones diferenciales ordinarias y la variable compleja, en mayor o menor medida, forman parte fundamental de los contenidos de las asignaturas de matemática aplicada de todas ellas. Pretendemos que este texto sirva de base, apoyo o consulta, tanto al profesor como al estudiante de carreras de ingeniería o ciencias que ya han cubierto al menos un primer curso de cálculo y álgebra lineal.

Nuestra intención ha sido la de hacer un libro ameno, completo, pero lo más conciso posible en cuanto a los contenidos: creemos que la mejor forma de presentar un resultado –al menos en un libro de texto– no es casi nunca la más general. También nos hemos propuesto mantener un razonable equilibrio entre el rigor y la intuición, procurando desterrar el formalismo (rigor no es formalismo) que en muchas circunstancias sólo les sirve a los estudiantes para oscurecer y hacer ininteligible aquello que era claro y perfectamente comprensible.

Por otra parte, hemos intentado dar a nuestro texto una cierta originalidad en la presentación de la materia, aunque somos conscientes de la dificultad de esta empresa en un tema tan bien conocido y sobre el que se han escrito textos de gran calidad científica y pedagógica.

Probablemente, la novedad más aparente radica en una cierta violación de la tradición docente: que nosotros sepamos, tanto en las escuelas técnicas como en las facultades de ciencias o de matemáticas, el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias suele preceder al de la variable compleja.

Esta tradición está posiblemente justificada desde el punto de vista histórico pero, a nuestro parecer, no lo está desde una perspectiva didáctica: por una parte, la teoría de ecuaciones diferenciales presenta escollos difíciles de salvar sin el apoyo de la variable compleja (el primero de ellos puede ser el tratamiento de las ecuaciones lineales con coeficientes analíticos); por otra *parte, es imposible fundamentar su estudio sin una cierta base de topología de espacios métricos o de convergencia uniforme, lo cual supone un grado de abstracción considerablemente superior al que se requiere para una razonable introducción de la variable compleja (básicamente, los prerrequisitos para tal introducción consisten en un buen conocimiento del cálculo infinitesimal de una y dos variables reales).*

Así pues, hemos alterado el orden clásico en la presentación de la materia, desarrollando en primer lugar el estudio de las funciones de variable compleja.

De este modo, el texto constará de dos partes. La primera, la presente, constituye en sí misma un curso de variable compleja.

La segunda, en fase de preparación, consistirá en un curso de ecuaciones diferenciales ordinarias complementado con temas relacionados con ellas y de gran importancia en matemática aplicada, como las ecuaciones en diferencias y las transformadas de Laplace.

Por razones de carácter didáctico, este primer volumen se ha organizado en tres bloques y dos apéndices. El primero de estos bloques comienza con un capítulo introductorio sobre las propiedades elementales de los números complejos y contiene las propiedades acerca de sucesiones de números complejos y de funciones complejas de variable compleja que pueden considerarse como la generalización lógica de las correspondientes propiedades en el contexto real.

El segundo bloque constituye el cuerpo del texto y contiene los resultados clásicos de la variable compleja. Hemos procurado ofrecer un tratamiento moderno, claro y elemental, evitando entrar en temas que podrían resultar escabrosos para un alumno que toma su primer contacto con la teoría. Así, el lector no encontrará ninguna alusión a funciones multiformes (definimos con precisión las determinaciones del logaritmo como distintas funciones uniformes) o a la topología de los conjuntos simplemente conexos (a todos los efectos que nos incumben, el concepto de conjunto estrellado, perfectamente claro tanto intuitiva como analíticamente, es suficiente).

Finalmente, el tercer bloque se dedica al estudio de la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones y de integrales paramétricas en el campo complejo, finalizando con la aplicación de los resultados obtenidos al estudio de las funciones Γ *y* β *de Euler. Los dos apéndices finales retoman el problema de la convergencia uniforme, ahora en el caso de la variable real. Su inclusión como tales apéndices se justifica por varias razones. Por una* *parte, es obvio que los estudiantes a los que va dirigido el texto poseen distintos niveles de conocimiento del análisis de una variable real y en concreto no todos ellos han estudiado el problema de la convergencia uniforme (real). Por otra parte, nos parece muy interesante la comparación de los resultados en los dos casos (real y complejo*). Finalmente, el conocimiento de las propiedades básicas de la convergencia uniforme (en variable real y compleja) va a ser imprescindible en la segunda parte de este libro.*

Un curso elemental de variable compleja podría estar constituido por los dos primeros bloques de este texto. Si se opta por el estudio de la convergencia uniforme, sugerimos la lectura previa al menos del primer apéndice, ya que es aquí donde hemos intentado justificar las ideas intuitivas, dando por sentado en el capítulo 11 que el lector ya está familiarizado con el concepto de convergencia uniforme.

En todo caso, si se ha de proseguir con el tratamiento de las ecuaciones diferenciales es necesario, como ya se ha dicho, estudiar también el tercer bloque y los dos apéndices.

La estructura del texto (con la relativa salvedad de los dos apéndices finales) es perfectamente lineal: cada capítulo sucede de forma lógica al anterior y presupone leídos todos los que le preceden. Los capítulos se dividen en secciones y ocasionalmente en subsecciones, con la intención de hacer más aparente la estructura de la materia.

Al final de cada uno de ellos el alumno encontrará una colección de ejercicios y problemas, *que van desde los ejercicios de cálculo destinados a la consolidación de las técnicas estudiadas en el texto hasta los problemas que permiten al lector interesado la profundización en la teoría, pasando por otros problemas que se resuelven por aplicación más o menos directa de la teoría o que anticipan o sugieren el desarrollo posterior de la misma*[†]*. Los ejercicios y problemas de cada capítulo se clasifican, aproximadamente, en las mismas secciones que éste.*

Tal vez la resolución de algún problema puede presentar serias dificultades. En todo caso, no nos interesan los problemas difíciles, *sino aquellos que tienen interés en sí mismos, ya sea por los resultados que se obtienen o por las técnicas que se precisan para resolverlos.*

---

*Evidentemente, los autores pretenden convencer al lector de la excelencia de la variable compleja.

[†]Hasta llegar al capítulo 7 nos hemos dedicado a *perseguir* a la función exponencial a través de las sucesivas secciones de problemas.

Este texto es el resultado de un largo período de trabajo, costoso pero muy satisfactorio, porque nos ha obligado a estudiar en profundidad algunas obras, como las que citamos en la bibliografía, verdaderamente hermosas. Debemos, y lo hacemos con sumo placer, agradecer a nuestros compañeros sus múltiples consejos y sugerencias (de todo tipo: científicas, literarias o estéticas). A editorial Reverté que ha tenido la amabilidad de publicar esta obra. Y muy especialmente a nuestros amigos Antonio Marquina –que nos enseñó variable compleja– y Josep H. Canós, Cristina Corral, Vicent del Olmo, Juan Carlos Ferrando y Josep Mas. Todos ellos han corregido errores, sugerido problemas y mejorado el texto en muchos aspectos.

R.F. e I.G.

VALÈNCIA, MAYO DE 1992

Indice

Funciones analíticas

Apéndices

A Guillem i Clàudia que han crescut amb aquest llibre
I.G.

Números complejos y funciones complejas

Capítulo 1

Los números complejos

Los números reales suelen introducirse, sea definiéndolos en forma axiomática, sea construyéndolos a partir de los números racionales, con el fin de asegurar la existencia de raíces cuadradas para todos los números positivos, lo que resulta conveniente desde el punto de vista geométrico, dado que el cuerpo de los números racionales no es el idóneo para medir longitudes. Ahora bien, los números reales también resultan deficientes, al menos si adoptamos una postura algebrista, ya que, por ejemplo, no nos permiten extraer raíces cuadradas de números negativos. Como consecuencia de ello, sabemos que la ecuación polinómica

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sólo puede resolverse (en $\mathbb{R}$) cuando $b^2 - 4ac \geq 0$. Para subsanar esta dificultad, entre otras, se introducen los números complejos.

1.1. Los números complejos: introducción

Nuestro objetivo es ampliar el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales de tal modo que obtengamos un conjunto de *números complejos*, que representaremos por $\mathbb{C}$, en el cual se puedan realizar las operaciones suma y producto y que éstas tengan las mismas propiedades que en el caso real: esto es, $\mathbb{C}$ deberá ser un cuerpo conmutativo que contenga a $\mathbb{R}$. Y queremos que en este cuerpo existan las raíces cuadradas de todos los números. El método que vamos a seguir para ello es el de dar por supuesto que dicho cuerpo existe y deducir así su estructura.

Dado que -1 no tiene raíz cuadrada real, en $\mathbb{C}$ existirá un número, que representaremos por i, que *no es real* y posee la propiedad siguiente: $i^2 = -1$. Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo, debemos poder multiplicar y sumar i con todos los números reales, de manera que expresiones como $a + bi$ deberán tener sentido en $\mathbb{C}$. En otras palabras, si a y b son dos números reales, $a+bi$ es un número complejo (más tarde veremos cómo no necesitaremos *añadir* más números al conjunto $\mathbb{C}$).

Consideremos entonces dos números complejos de la forma $a + bi$ y $c + di$ y veamos qué podemos decir sobre ellos.

Es fundamental saber cuándo $a + bi = c + di$: dado que $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo, aplicando las propiedades de esta estructura, tenemos que

$$a + bi = c + di$$

es equivalente a

$$a - c = (d - b)i \tag{1.1}$$

Ahora bien, si tuviéramos $b \neq d$, resultaría: $i = \frac{a-c}{d-b}$, lo cual es imposible dado que i no es un número real. Así pues, $b = d$ y entonces, de (1.1) se sigue que $a = c$.

Hemos, pues, obtenido así el primer resultado importante sobre los números complejos:

*Sean a, b, c y d números reales. Entonces, $a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.**

Volviendo a los dos números $a + bi$ y $c + di$, pasemos a calcular su suma y su producto: teniendo en cuenta las propiedades conmutativa y asociativa, obtenemos sin dificultad que

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

donde podemos observar que se mantiene la estructura inicial de *número real* + *número real* $\times i$; para el producto debemos trabajar un poco más:

*Si el lector considera que la anterior propiedad era evidente, le sugerimos que considere los números racionales $1/2$ y $3/6$.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= ac+(ad+bc)i-bd\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Llegados a este punto, debemos observar una cuestión importante: la suma y el producto de dos números *de la forma* $a + bi$ son *de la forma* $a + bi$. Este detalle tampoco es una trivialidad, dado que no hemos supuesto todavía que todos los números complejos son *de la forma* $a + bi$. Sin duda, este es el momento apropiado, no sólo para hacer tal suposición, sino para convertirla en la definición de $\mathbb{C}$.

1.2. Los números complejos y el álgebra

Definición 1.1 *Sea i un objeto cualquiera que no sea un número real. Un* **número complejo** *es cualquier expresión de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales. El conjunto de todos los números complejos se representa por $\mathbb{C}$, es decir*

$$\mathbb{C} = \{a+bi \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Se dice que dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son **iguales** *cuando $a = c$ y $b = d$.*

La **suma** *y el* **producto** *de dos números complejos se definen respectivamente por*

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(b+d)i\\ (a+bi)(c+di) &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

Se adoptan las siguientes convenciones con el fin de simplificar el uso de los números complejos:

* Los números complejos de la forma $a + 0i$ se representan simplemente por a. Es evidente que forman un subconjunto de $\mathbb{C}$ algebraicamente idéntico a $\mathbb{R}$. Por lo tanto, estos números se llamarán *reales* y podemos considerar que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

* Los números complejos de la forma $0 + bi$ se representan simplemente por bi y se llaman *imaginarios puros.* (El número $0 + 0i$, aunque también responde a esta descripción se representa por 0, como en el primer caso.)

* El número $1i$ se representa por i y se llama *unidad imaginaria.* (También $a + 1i$ se escribe simplemente como $a + i$.)

Para denotar números complejos se suelen utilizar más comúnmente las letras z y w. Así, $z = a + bi$ quiere decir el número complejo z de la forma $a + bi$, donde a y b son reales. Además, se utiliza la siguiente terminología:

* a se llama la *parte real* de z y se escribe $a = re(z)$

* b se llama la *parte imaginaria* de z y se escribe $b = im(z)$.

Veamos ahora que $\mathbb{C}$, así definido, tiene las propiedades que deseábamos.

Teorema 1.1 *El conjunto* $\mathbb{C}$ *con las operaciones suma y producto definidas arriba tiene estructura de cuerpo conmutativo.*

Demostración.- Las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y del producto y la distributiva se comprueban sin dificultad. El elemento neutro de la suma es el número 0, ya que

$$(a + bi) + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi$$

El opuesto de $z = a + bi$, $-z$, es $-a + (-b)i$ (que escribiremos como $-a - bi$), el neutro del producto es el número 1 y, finalmente, si $z = a + bi \neq 0$, su inverso, $z^{-1} = c + di$, deberá cumplir que

$$zz^{-1} = 1 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

es decir,

$$\begin{aligned} ac - bd &= 1 \\ ad + bc &= 0 \end{aligned}$$

sistema lineal cuya solución es

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

es decir,

$$z^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \quad \square$$

Teorema 1.2 $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Demostración.- $i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = (0 - 1) + (0 + 0)i = -1$. Además, sabemos que en cualquier cuerpo se verifica la regla de los signos, luego $(-i)^2 = -1$ $\square$

Nótese que este resultado era evidente puesto que desde él prácticamente hemos construido el conjunto $\mathbb{C}$. Así, hemos obtenido las raíces cuadradas de -1 y de este resultado podríamos deducir las raíces cuadradas de cualquier número real (positivo o negativo) en $\mathbb{C}$; hemos pues alcanzado uno de los objetivos iniciales. Veamos a continuación cómo el resultado es aún mejor.

Teorema 1.3 *a) Dado $z \in \mathbb{C}$, existe $w \in \mathbb{C}$ de manera que $w^2 = (-w)^2 = z$.*†

b) Toda ecuación polinómica de segundo grado admite raíces complejas.

Demostración.- a) Sea $z = a + bi$. Supondremos en principio que $b > 0$. Buscamos un $w = x + yi$ que verifique $(x + yi)^2 = a + bi$, es decir,

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned}$$

Si elevamos estas dos expresiones al cuadrado y las sumamos, obtenemos

† w y $-w$ se representan conjuntamente como $\sqrt{z}$ ó $\pm\sqrt{z}$. Si x es un número real positivo, entonces se representa como $\sqrt{x}$ la raíz cuadrada *positiva* de x. Dado que en $\mathbb{C}$ no podemos hablar de números positivos o negativos, no existe ninguna razón objetiva para representar como $\sqrt{z}$ a una u otra de las dos raíces cuadradas de z.

$$x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$$

luego

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

y puesto que $x^2 - y^2 = a$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= a + \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2y^2 &= -a + \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

es decir,

$$w = \pm \left[\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} i \right] \tag{1.2}$$

y se comprueba fácilmente la primera parte del teorema. (Se deja como ejercicio para el lector la demostración de los casos $b < 0$ y $b = 0$.)

b) Dada la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, multiplicando por $4a$ y sumando y restando convenientemente b^2, podemos escribirla como:

$$(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0$$

de donde, despejando x, obtenemos la fórmula clásica para la ecuación de segundo grado, que ahora sabemos que tiene solución en $\mathbb{C}$ para cualesquiera a, b, c números reales o complejos. □

Ejemplo.- Calculemos las raíces cuadradas de $z = 1 + i$. Según la fórmula (1.2)

$$\pm\sqrt{z} = \pm \left[\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} i \right]$$

Como la fórmula (1.2) no parece sencilla de memorizar, podemos repetir el proceso utilizado en la demostración para llegar hasta las raíces pedidas:

$$\begin{aligned} (x + yi)^2 = 1 + i \iff & x^2 - y^2 + 2xyi = 1 + i \\ \iff & x^2 - y^2 = 1,\ 2xy = 1 \\ \iff & x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = 1, 4x^2y^2 = 1 \\ \iff & x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = 2 \\ \iff & x^2 + y^2 = \sqrt{2} \quad (-\sqrt{2} \textit{ no puede ser !}) \end{aligned}$$

y como $x^2 - y^2 = 1$, entonces,

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \quad y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$$

y dado que $2xy = 1$, x e y tienen el mismo signo, y se obtiene la misma solución‡.

1.3. Los números complejos y la geometría

La suma de números complejos y el producto de un número complejo por un número real dan a $\mathbb{C}$ estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (de hecho, todo cuerpo es siempre espacio vectorial sobre sus subcuerpos, incluido él mismo). Además, es absolutamente trivial que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ a+bi & \longrightarrow & (a,b) \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

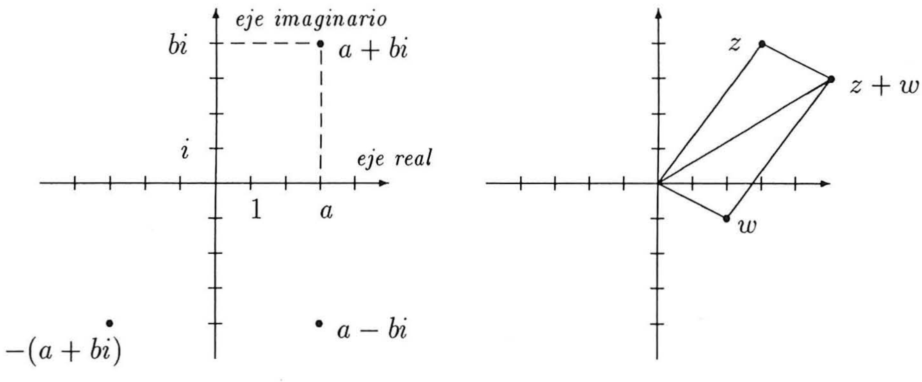


Figura 1.1: Interpretación geométrica.

Este isomorfismo nos permitirá trasladar muchas propiedades del plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$. En primer lugar, podemos identificar el número

‡Posteriormente veremos métodos más rápidos para calcular raíces.

complejo $a + bi$ con el punto (a, b) en un sistema plano de coordenadas cartesianas rectangulares (véase en este sentido la figura 1.1). Por este motivo, el conjunto $\mathbb{C}$ suele llamarse también *plano complejo* (obsérvese la analogía con la expresión *recta real*).

Llamaremos *eje real* y *eje imaginario* a los ejes de coordenadas horizontal y vertical respectivamente. Desde el punto de vista geométrico, la suma se puede identificar con la suma de los vectores libres según la clásica ley del paralelogramo. El opuesto viene también dado por el vector opuesto, es decir el simétrico del punto (a, b) respecto al origen.

Por analogía con el plano euclídeo, se define el módulo de un número complejo como sigue:

Definición 1.2 *Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definimos su* **módulo** *como el número real positivo $\sqrt{a^2 + b^2}$, que representaremos por $\mid z \mid$.*

Geométricamente, $\mid z \mid$ representa la longitud del vector (a, b), de la cual conoce ya el lector muchas propiedades:

$\mid z \mid \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\mid z \mid = 0$ si y sólo si $z = 0$

$\mid z + w \mid \leq \mid z \mid + \mid w \mid \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$ (*desigualdad triangular*)

$\mid az \mid = \mid a \mid \mid z \mid \quad \forall a \in \mathbb{R} \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\mid -z \mid = \mid z \mid \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\mid z - w \mid \geq \mid \mid z \mid - \mid w \mid \mid \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Otras propiedades del módulo se enuncian en el próximo teorema. Es conveniente introducir previamente la definición del conjugado de un número complejo.

Definición 1.3 *El* **conjugado** *del número complejo $z = a + bi$ se define como $\overline{z} = a - bi$.*

El conjugado de z se representa gráficamente por su simétrico respecto al eje real (ver figura 1.1). Sus propiedades se resumen a continuación junto con otras del módulo:

Teorema 1.4 *Dados dos números complejos z y w,*

a) $|z| = |\overline{z}|$

b) $z\overline{z} = |z|^2$

c) *si* $z \neq 0$ *entonces* $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|}^2$

d) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}, \quad \overline{-w} = -\overline{w}$

e) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \quad |zw| = |z||w|$

f) $\overline{\overline{z}} = z$

g) $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad \overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$

La demostración se deja como ejercicio para el lector. □

1.3.1. La forma polar

Con el fin de dar un significado geométrico al producto de números complejos, resulta conveniente introducir las coordenadas polares en el plano complejo (figura 1.2): sea $z = a + bi$ un número complejo no nulo de módulo r y cuyo vector de posición forma un ángulo α con la dirección positiva del eje real. Entonces, $a = r\cos\alpha$, $b = r\operatorname{sen}\alpha$ y por lo tanto,

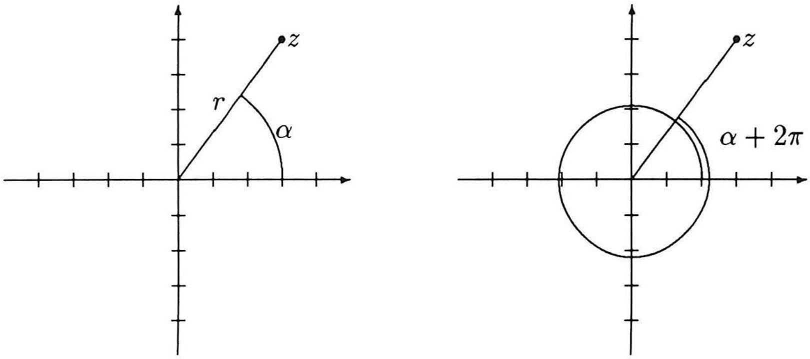
$$z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) \tag{1.3}$$

La expresión 1.3 se denomina *forma polar* o *trigonométrica* de z.

Conocidos $|z|$ y α, a partir de la expresión (1.3) podemos determinar el número z. Recíprocamente, conocidos a y b, las partes real e imaginaria de z, podemos calcular su módulo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, pero el ángulo α no está unívocamente determinado por el sistema

$$\begin{aligned} a &= |z|\cos\alpha \\ b &= |z|\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

ya que dos números reales tienen el mismo seno y el mismo coseno siempre que difieran en un múltiplo entero de 2π (ver la figura 1.2). Este hecho resulta de extraordinaria importancia en el estudio de las funciones de variable compleja, por lo que vamos a tratarlo de forma precisa.



Módulo y argumento de z *Otro argumento de z*

Figura 1.2: Forma polar de un número complejo.

Definición 1.4 *Dado el número complejo no nulo $z = a + bi$, se llama* **argumento** *de z al conjunto*

$$\operatorname{Arg} z = \{\alpha \in \mathbb{R} \ : \ \cos\alpha = \frac{a}{|\,z\,|}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|\,z\,|}\}$$

Cada elemento $\alpha \in \operatorname{Arg} z$ se dice que es **un argumento** *de z. Puesto que en cada intervalo semiabierto de longitud 2π ($[x-\pi, x+\pi[$) existe un único elemento de $\operatorname{Arg} z$, representaremos a éste por $\arg_x z$. Se llama* **argumento principal** *de z al argumento que se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi[$, es decir al $\arg_0$, que representaremos sencillamente por $\arg z$.*

Antes de seguir adelante con las propiedades del argumento, recalquemos que $\operatorname{Arg} z$ es un conjunto de números reales (de forma que dos cualesquiera de ellos difieren en un múltiplo entero de 2π) y que $\arg_x z$, $\arg z$ son elementos de aquel conjunto.[§]

Otra cuestión importante es que para el número 0 no tiene sentido el concepto de argumento: desde el punto de vista geométrico, el vector

[§]También debemos señalar que esta notación no está adoptada con carácter general, cosa que el estudiante deberá tener en cuenta al consultar otros textos.

de posición se reduce a un punto, que no forma ningún ángulo con el eje real; desde el punto de vista analítico,

$$0 = \mid 0 \mid (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

se verificaría para todo número real α.

Ejemplo.- El número $1+i$, cuyo módulo es $\sqrt{2}$, se escribe en forma polar como

$$\sqrt{2}(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

donde α es cualquier elemento del conjunto

$$\operatorname{Arg}(1+i) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

siendo su argumento principal $\frac{\pi}{4}$.

Como ejemplos simples, podemos ver que el argumento principal de los números reales positivos es 0 y el de los negativos $-\pi$, el de los imaginarios puros es $\frac{\pi}{2}$ ó $-\frac{\pi}{2}$, según que la parte imaginaria sea positiva o negativa respectivamente. La forma polar (1.3) de z suele abreviarse escribiendo simplemente

$$z = r_\alpha \tag{1.4}$$

donde $r = \mid z \mid$ y $\alpha \in \operatorname{Arg} z$, de forma que

$$r_\alpha = r'_\beta \iff r = r' \text{ y } \alpha = \beta + 2k\pi \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora podemos entender el significado geométrico del producto de números complejos: sean $z = r_\alpha$ y $w = r'_\beta$. Multiplicándolos obtenemos:

$$\begin{aligned} zw &= r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) r'(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta) \\ &= rr'[(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) \ + \ i(\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta)] \\ &= rr'[\cos(\alpha+\beta) \ + \ i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)] \\ &= rr'_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

Es decir, para multiplicar dos números complejos, debemos multiplicar sus módulos y aumentar los argumentos de uno de ellos en un argumento del otro. Geométricamente, realizar en el plano una homotecia de centro el origen de coordenadas y razón $| z |$ y un giro de amplitud un argumento de z. En particular, multiplicar por un número real positivo equivale a una homotecia y multiplicar por un complejo de módulo unidad equivale a un giro. (Figura 1.3.)

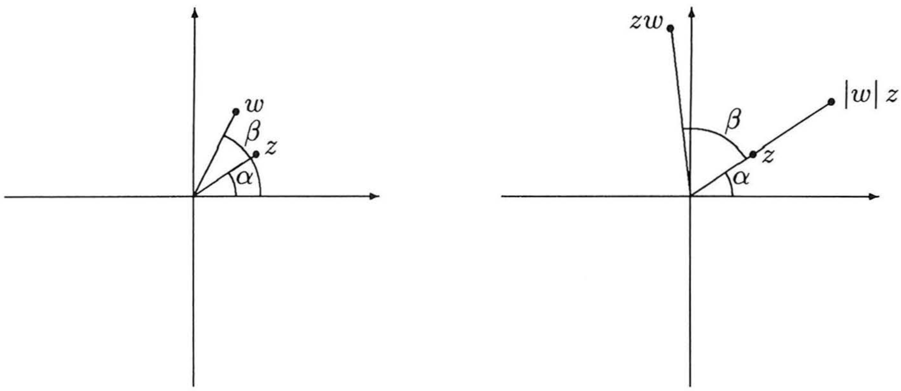


Figura 1.3: Producto de dos números complejos.

La expresión del producto en forma polar tiene otras consecuencias importantes; por supuesto, permite sospechar las siguientes propiedades del argumento:

Teorema 1.5 *Sean z y w dos números complejos no nulos. Entonces,*

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}(zw) &= \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w \\ \operatorname{Arg}(z^{-1}) &= -\operatorname{Arg} z \\ \operatorname{Arg} \overline{z} &= -\operatorname{Arg} z \\ \operatorname{Arg}(z/w) &= \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \end{aligned}$$

El lector debe encargarse de demostrar este teorema: téngase en cuenta que se trata de igualdades entre conjuntos. □

Por otro lado, es razonable pensar que la potenciación y la extracción de raíces deben simplificarse en forma polar. Efectivamente, si $z = r_\alpha$,

$$
\begin{array}{lllll}
z & = & r_\alpha & = & r(\cos\alpha\ +\ i\,\mathrm{sen}\,\alpha) \\
z^2 & = & r^2_{2\alpha} & = & r^2(\cos 2\alpha\ +\ i\,\mathrm{sen}\,2\alpha) \\
\vdots & & & & \\
z^n & = & r^n_{n\alpha} & = & r^n(\cos n\alpha\ +\ i\,\mathrm{sen}\,n\alpha)
\end{array}
$$

expresión que se conoce como *fórmula de De Moivre.* Su consecuencia más importante es la que sigue.

Teorema 1.6 *Todo número complejo no nulo $z = r_\alpha$ tiene exactamente n raíces n-ésimas distintas, w_0, $w_1, \ldots, w_{n-1}$, que vienen dadas por*

$$
w_k = \sqrt[n]{r}_{\frac{\alpha+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)\right] \tag{1.5}
$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$

Demostración.- Si aplicamos la fórmula de De Moivre a la expresión de los w_k obtendremos

$$
(w_k)^n = (r^{1/n})^n_{n\frac{\alpha+2k\pi}{n}} = r_{\alpha+2k\pi} = z
$$

Con lo que queda probado que todos los números w_k son raíces n-ésimas de z.

Veamos a continuación que son todos distintos: supongamos que $w_k = w_j$; esto significa que

$$
\exists m \in \mathbb{Z}\ /\ \ \frac{\alpha+2k\pi}{n} = \frac{\alpha+2j\pi}{n} + 2m\pi
$$

de donde

$$
2k\pi = 2j\pi + 2mn\pi
$$

o bien $k - j = mn$, es decir, $k - j$ es múltiplo de n . Pero

$$
0 \le k, j \le n-1 \ \Rightarrow\ -n+1 \le k-j \le n-1
$$

luego el único múltiplo de n posible es $k - j = 0$. En definitiva, $k = j$.

Finalmente, sólo queda por probar que las w_k son las únicas raíces n-ésimas de z: observemos que las raíces n-ésimas de z son las raíces del polinomio $w^n - z$, que por ser de grado n tiene a lo sumo n raíces distintas. $\square$

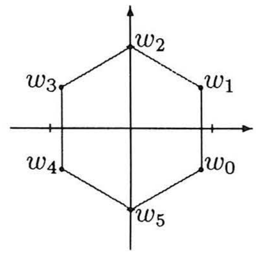
El símbolo $\sqrt[n]{z}$ representa las n raíces n-ésimas de z.

Ejemplo.- Vamos a calcular las raíces sextas de -1.

$$|-1| = 1, \ \arg(-1) = -\pi \rightarrow w_k = 1(\cos\alpha_k + i\,\mathrm{sen}\,\alpha_k)$$

donde, $\alpha_k = \frac{-\pi+2k\pi}{6}$ $k = 0, 1, 2, \ldots, 5$ es decir,

$$\begin{array}{lcccl}
w_0 & = & \cos\frac{-\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{6} & = & \frac{\sqrt{3}-i}{2} \\
w_1 & = & \cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} & = & \frac{\sqrt{3}+i}{2} \\
w_2 & = & \cos\frac{3\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{6} & = & i \\
w_3 & = & \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6} & = & \frac{-\sqrt{3}+i}{2} \\
w_4 & = & \cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6} & = & -i \\
w_5 & = & \cos\frac{9\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{6} & = & \frac{-\sqrt{3}-i}{2}
\end{array}$$



Nótese que las raíces n-ésimas se sitúan en una circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio $|z|$, formando los vértices de un polígono regular de n lados.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

LOS NÚMEROS COMPLEJOS Y EL ÁLGEBRA

1.1 Determinar las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos:

$$i, \ 1, \ 1+i, \ (1+i)(1-i), \ \frac{2+i}{1-i}, \ e^2, \ (a+bi)^2$$

1.2 Hallar las dos raíces cuadradas de $3+4i$, $4-3i$ y $-i$.

1.3 Completar la demostración del teorema 1.3.

1.4 Hallar las raíces de los siguientes polinomios:

a) $z^2 + z + 1$ b) $z^4 + z^2 + 1$ c) $z^2 + (3-i)z - 3i$