

Heinz Klaus Strick

# Mathematik ist wunder- wunder- schön

Noch  
mehr Anregungen  
zum Anschauen  
und Erforschen

für Menschen  
zwischen  
9 und 99 Jahren



Springer

---

Mathematik ist wunderwunderschön

---

Heinz Klaus Strick

# Mathematik ist wunderwunderschön

Noch mehr Anregungen zum Anschauen  
und Erforschen für Menschen zwischen 9  
und 99 Jahren

2., korrigierte und ergänzte Auflage

Heinz Klaus Strick  
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-63108-9      ISBN 978-3-662-63109-6 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-63109-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019, 2021

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Andreas Rüdinger

Zeichnungen: Heinz Klaus Strick, Leverkusen; Abb. 10.1 von Stephan Meyer, Dresden

Einbandabbildung: Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Einbandabbildung: deblik, Berlin

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

## Vorwort

*Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,  
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,  
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,  
was den grössten Genuss gewährt.*

(Carl-Friedrich Gauss, deutscher Mathematiker, Physiker und Astronom, 1777–1855)

Dass es keinen *Königsweg zur Mathematik* gibt, wusste bereits Euklid vor über 2300 Jahren. Auch dieser Ihnen hier vorliegende dritte Band über *schöne* Mathematik kann und will nicht den Anspruch erheben, den idealen Weg zur Mathematik zu weisen.

In einem aber bin ich sicher: Sie, liebe Leserin, lieber Leser, werden beim Blättern an irgendeiner Stelle auf etwas stoßen, das Ihr Interesse weckt und das Sie anregt, mehr über den dahinterliegenden Sachverhalt erfahren zu wollen.

*Mathematik ist schön*, sogar *wunderwunderschön*. Aber dass Mathematik schön ist, merkt man meist erst dann, wenn man Mathematik auch *macht*, also wenn man sich mit einem mathematischen Problem näher beschäftigt.

Es freut mich sehr, dass ich nach den beiden Büchern *Mathematik ist schön* und *Mathematik ist wunderschön* bereits jetzt auch den dritten Band in 2. Auflage (korrigiert und erweitert) präsentieren kann, der ähnliche Ziele wie die ersten beiden Bände verfolgt und in gleicher Weise strukturiert ist. Die zahlreichen positiven Rückmeldungen haben mich darin bestärkt, meine Leserinnen und Leser durch die folgende Vorgehensweise von der Schönheit der Mathematik zu überzeugen:

- faszinierende, farbige Grafiken nutzen, um die Neugier der Leserinnen und Leser zu wecken,
- Sachverhalte möglichst beispielgebunden verdeutlichen und auf allzu viele formale Beweise verzichten,
- auch eher unbekannte mathematische Sachverhalte aufgreifen – auch Themen, für die heute nur sehr selten Platz im Schulunterricht ist,
- und stets ausreichend Gelegenheit geben, eigene Gedanken zu entwickeln: *Anschauen, Nachdenken, Ausprobieren, Variieren, Recherchieren – Wundern.*

Übrigens: Diesem Motto folgten übrigens auch die von mir erstellten immerwährenden Kalender im DIN-A3-Format, die ich zugunsten von *Friedensdorf International* in Oberhausen verkauft habe ([www.mathematik-ist-schoen.de](http://www.mathematik-ist-schoen.de)). Auf dieser Seite finden Sie auch weitere Materialien (Kopiervorlagen) zu verschiedenen Themen aus diesem Buch.

Einfache Muster auf Quadraten und auf gleichseitigen Dreiecken führen in Kap. 1 hin zu einer systematischen Beschäftigung mit sog. *Friesmustern*. An den zahlreichen Beispielen wird deutlich, dass es gar nicht so schwierig ist, selbst schöne Muster zur Verzierung zu entwerfen und sich an ihnen zu erfreuen.

In der 2. Auflage konnte ich Kapitel 1 um einen neuen Abschnitt erweitern (Truchet-Fliesen) und außerdem am Ende noch ein zusätzliches dreizehntes Kapitel mit schönen, einfachen Mustern ergänzen: *Persische, keltische und afrikanische Ornamente*.

Schöne Muster erhält man auch, wenn man Kreise in verschiedenen Größen und unterschiedlichen Lagen zeichnet. In Kap. 3 werden einfache Konstruktionen betrachtet, bei denen sich Kreise schneiden oder auf unterschiedliche Weise Kreise in Kreisen angeordnet werden. Ein Abschnitt des Kapitels beschäftigt sich mit der Faszination der Yin & Yang-Kreisfiguren und variiert die hiermit verbundenen Flächenunterteilungen auf vielfältige Weise.

Und da ein Kapitel für das Thema *Kreise* nicht ausreicht, folgt eine Fortsetzung und Ausweitung der Fragestellungen in Kap. 9, in dem es u. a. um Elemente islamischer Kunst und um gotische Maßwerfenster, um Ovale (Eiformen) und um Gleichdicks geht.

Für das Multiplizieren von (natürlichen) Zahlen nutzt man heute in der Regel einen Taschenrechner; fast gilt das kleine Einmaleins schon als Expertenwissen. Welche Verfahren, welche Tricks wurden in vergangenen Zeiten (von Adam Ries bis John Napier) und in anderen Kulturen (Babylonier, Inder, Chinesen und russische Bauern) angewandt, um möglichst schnell und möglichst fehlerfrei zu rechnen? Das ist Thema in Kap. 2.

Euklid untersuchte in seinen *Elementen* die bemerkenswerten Eigenschaften von natürlichen Zahlen. Kap. 4 gibt Anregungen, diese Eigenschaften selbst zu entdecken: Wie kann man die Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl veranschaulichen? Wie lässt sich die Summe der Teiler einer Zahl berechnen? Was schätzen Sie: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei beliebige, zufällig ausgewählte natürliche Zahlen zueinander teilerfremd sind?

Im Rahmen des Schulunterrichts werden heute nur noch wenige Teilbarkeitsregeln vermittelt, etwa wie man durch bloßes Hinschauen oder mit geringem Aufwand erkennt, ob eine gegebene natürliche Zahl durch 2 oder durch 5 bzw. durch 3 oder durch 9 teilbar ist. Warum diese Regeln gelten, wie sie verallgemeinert werden können und wie man – im Prinzip – Teilbarkeitsregeln für eine beliebige natürliche Zahl entwickeln kann, ist in Kap. 5 ausgeführt. Entsprechende Regeln gelten auch in anderen Zahlensystemen - dies wird nun in der 2. Auflage in einem neuen Abschnitt ausgeführt.

Das Pascal'sche Dreieck taucht bereits in den ersten beiden Bänden über schöne Mathematik wiederholt auf und wird zur Berechnung von Anzahlen und von Wahrscheinlichkeiten benutzt. Tatsächlich ist dieses Thema fast unerschöpflich: Auch wenn

Kap. 7 das umfangreichste Kapitel dieses Buches ist, kann es nur Anregungen zur eigenen Weiterbeschäftigung geben ... Über die Verbindung zum Leibniz'schen Zahlendreieck wird dabei auch ein Zusammenhang mit den ägyptischen Brüchen hergestellt (Kap. 6 in *Mathematik ist wunderschön*).

Dass das Wurzelziehen, also die Suche nach einer (numerisch möglichst genauen) rationalen Zahl, deren Quadrat man kennt, heute noch ein Problem darstellt, kann man wohl kaum behaupten. In Kap. 7 wird dargestellt, welche Fülle an Ideen im Laufe der Jahrhunderte für die Berechnung der Wurzel aus der natürlichen Zahl 2 entwickelt wurden, und gezeigt, welche erstaunlich vielfältigen Anregungen sich aus den Lösungsverfahren für diese „einfache“ Aufgabe ergeben haben.

Dass es einen Zusammenhang zwischen der Fußball-Bundesliga, den klassischen Umfüllaufgaben und dem Billardspiel gibt, wird in Kap. 8 aufgezeigt. Mehr soll hier nicht verraten werden ... Genügt das, um Ihr Interesse zu wecken?

Rätsel und Denkspiele sind oft mit mathematischen Fragestellungen verbunden, und es ist kein Zufall, dass es Mathematiker waren, denen wir einige der anregendsten Sammlungen von Denksportaufgaben verdanken. Eines der klassischen Themen der sog. *Unterhaltungsmathematik*, die magischen Quadrate, stehen im Mittelpunkt von Kap. 10.

Aus dem einfachen Kartenspiel *Jeu de Treize* (13 nummerierte Karten eines Kartenspiels werden gemischt und nacheinander aufgedeckt ...) ergab sich eine interessante Fragestellung, deren Lösung man durchaus als *paradox* bezeichnen kann. Die ersten Abschnitte von Kap. 11 beschäftigen sich mit diesem Problem der möglichen Anordnungen (sog. *Rencontre-Problem*), weitere Abschnitte mit der Anordnung von Perlen in einer Perlenkette.

Das vorletzte Kapitel des Buches ist den Spiralen gewidmet. Dabei beschränken wir uns nicht auf die Spiralen im engeren Sinne (archimedische bzw. logarithmische Spiralen), sondern untersuchen auch andere ein- oder ausdrehende Kurven sowie spiralförmige Anordnungen – bis hin zu einer Veranschaulichung der Verteilung der Primzahlen.

Die dreizehn Kapitel des Buches sind durchweg unabhängig voneinander lesbar. Zumindest beim Einstieg in die einzelnen Themen wurde ein möglichst einfacher Zugang gewählt; dafür werden keine oder nur geringe Voraussetzungen aus dem Schulunterricht benötigt. Dass den einzelnen Kapiteln keine Zusammenfassung vorangestellt ist, hat einen einfachen (und hoffentlich überzeugenden) Grund: Das Interesse an einem Thema (und die Einsicht, dass ein Sachverhalt als *schön* empfunden wird) kann sich erst dann entwickeln, wenn man sich in das betreffende Thema „eingelese“ hat.

Die „Lösungen“ zu den eingestreuten *Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen* werden auch bei diesem Band auf der Internet-Seite des Verlags veröffentlicht (<http://www.springer.com/de/book/978-3-662-63109-6>).

Es ist ein wichtiges Anliegen auch dieses Buches, dass zum einen viele junge Menschen den Weg zur Mathematik finden und dass zum anderen diejenigen Leserinnen und Leser, deren Schulzeit schon einige Zeit zurückliegt, sich wieder erinnern und Neues entdecken können.

Auch wenn in jedem Kapitel Sätze, Regeln und Formeln grafisch besonders hervorgehoben werden, also die typischen Elemente eines Mathematikbuches enthalten sind, ist dies kein *Lehrbuch der Mathematik*. Beweise von Sätzen erfolgen in den meisten Fällen nur beispielgebunden – die zugrundeliegenden Ideen zu vermitteln, war mir stets wichtiger, als die formalen Schlüsse aufzuzeigen.

Wie in *Mathematik ist schön* und *Mathematik ist wunderschön* geben auch in diesem Band die Literaturhinweise am Ende eines Kapitels und am Ende des Buches Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen; insbesondere die Wikipedia-Beiträge (in deutscher, englischer und französischer Sprache) zu einzelnen Themen und die darin enthaltenen Literaturhinweise erwiesen sich als hilfreiche Informationsquellen.

Herzlich bedanke ich mich bei all denen, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben,

- bei meiner Frau, die es wieder geduldig ertrug, dass ich mich oft und lange in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei Wilfried Herget, der wieder zahlreiche Vorschläge machte, Formulierungen meiner Texte verständlicher zu gestalten,
- bei Olaf Grund, Eckhard Lohmann, Volker Pöhls und vielen anderen für ihre Anregungen zur 2. Auflage

und nicht zuletzt bei Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer-Verlag, die auch dieses Buch ermöglichten.

Leverkusen  
Mai 2021

Heinz Klaus Strick

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einfache Muster</b> .....	1
1.1	Ein einfaches Muster auf einer quadratischen Fliese.....	2
1.2	Einfache Fliesenmuster mit gleichseitigen Dreiecken.....	9
1.3	Parkettierung der Ebene mit den quadratischen und dreieckigen Fliesen .....	13
1.4	Fries-Ornamente .....	15
1.5	Truchet-Fliesen .....	26
1.6	Hinweise auf weiterführende Literatur .....	34
<b>2</b>	<b>Multiplikation natürlicher Zahlen</b> .....	35
2.1	Rechentricks der vedischen Mathematik .....	37
2.2	Rechentricks mit Quadratzahlen – die babylonische Multiplikation .....	39
2.3	Die Gelosia-Methode .....	41
2.4	Napier’s Bones .....	44
2.5	Napier’s Chessboard Calculator .....	47
2.6	Die russische Bauernmethode .....	49
2.7	Adam Ries: Das Rechnen auf den Linien .....	52
2.8	Ergänzung: Napiers Promptuarium .....	56
2.9	Hinweise auf weiterführende Literatur .....	59
<b>3</b>	<b>Kreisfiguren und Figuren aus Kreisen</b> .....	61
3.1	Einander schneidende Kreise .....	62
3.2	Flächenunterteilungen durch Kreisbögen – Yin und Yang .....	80
3.3	Kreise im Kreis .....	86
3.4	Ergänzung: Zur Darstellung von Mengen mithilfe von Venn-Diagrammen .....	91
3.5	Hinweise auf weiterführende Literatur .....	94

<b>4</b>	<b>Teiler und Teilbarkeit</b> . . . . .	95
4.1	Zueinander teilerfremde natürliche Zahlen . . . . .	96
4.2	Anzahl der zu einer natürlichen Zahl teilerfremden natürlichen Zahlen . . . . .	103
4.3	Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl . . . . .	109
4.4	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	122
<b>5</b>	<b>Teilbarkeitsregeln</b> . . . . .	123
5.1	Regeln für Endziffern . . . . .	124
5.2	Quersummen-Regeln . . . . .	125
5.3	Teilbarkeitsregeln für 2er-Quersummen, 3er-Quersummen, . . . . .	126
5.4	Alternierende Quersummen . . . . .	128
5.5	Überprüfen der Teilbarkeit durch Zerlegen einer Zahl in zwei Teilzahlen . . . . .	130
5.6	Teilbarkeit von Zahlen mit Ziffernwiederholung . . . . .	134
5.7	Teilbarkeitsregeln in anderen Zahlensystemen . . . . .	137
5.8	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	142
<b>6</b>	<b>Das Pascal'sche Dreieck</b> . . . . .	143
6.1	Definition des Pascal'schen Dreiecks . . . . .	144
6.2	Pascals Lösung des <i>Problème des partis</i> . . . . .	146
6.3	Zusammenhang zwischen dem Pascal'schen Dreieck und den binomischen Formeln . . . . .	150
6.4	Wege in einem Quadratgitter . . . . .	152
6.5	Anzahl der Auswahlmöglichkeiten – Darstellung der Binomialkoeffizienten als Produkt . . . . .	155
6.6	Der allgemeine binomische Lehrsatz . . . . .	161
6.7	Binomialkoeffizienten und Binomialverteilung . . . . .	162
6.8	Entdeckungen im Pascal'schen Dreieck . . . . .	165
6.9	Das harmonische Dreieck von Leibniz . . . . .	182
6.10	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	186
<b>7</b>	<b>Wurzel aus 2</b> . . . . .	187
7.1	Die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat ist keine rationale Zahl . . . . .	188
7.2	Von Quadratzahlen zu Quadratwurzeln – das Heron-Verfahren . . . . .	191
7.3	Eine besondere Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ . . . . .	195
7.4	Pell'sche Zahlenfolgen . . . . .	201
7.5	Eine babylonische Näherungsformel . . . . .	204
7.6	Weitere Verfahren zur Bestimmung eines Näherungswerts für $\sqrt{2}$ . . . . .	206

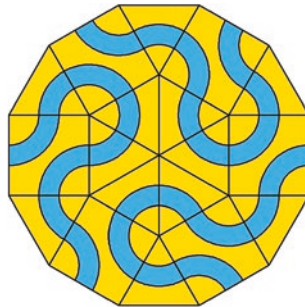
7.7	Bestimmung von $\sqrt{2}$ – mithilfe einer Interpolation. . . . .	212
7.8	Das Verfahren des schriftlichen Wurzelziehens. . . . .	214
7.9	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	219
<b>8</b>	<b>Fußball-Bundesliga, Umfüllprobleme und Ganzzahl-Billard. . . . .</b>	<b>221</b>
8.1	Grafische Darstellung von Zahlentripeln mit konstanter Summe . . . . .	223
8.2	Das klassische Umfüllproblem . . . . .	225
8.3	Ein Billardspiel auf einem rechteckigen Tisch mit ganzzahligen Seitenlängen. . . . .	235
8.4	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	241
<b>9</b>	<b>Kreisbögen und noch mehr Kreisfiguren . . . . .</b>	<b>243</b>
9.1	Muster aus Kreisen und Kreisbögen . . . . .	243
9.2	Gotische Maßwerkfenster . . . . .	253
9.3	Ovale, Korbbögen und Gleichdicks. . . . .	256
9.4	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	266
<b>10</b>	<b>Magische Quadrate. . . . .</b>	<b>269</b>
10.1	Magische $3 \times 3$ -Quadrate. . . . .	271
10.2	Magische $4 \times 4$ -Quadrate . . . . .	277
10.3	Zur Konstruktion magischer Quadrate mit ungerader Ordnung . . . . .	284
10.4	Geomagische Quadrate . . . . .	287
10.5	Weitere magische Figuren . . . . .	290
10.6	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	297
<b>11</b>	<b>Rencontre und mehr . . . . .</b>	<b>299</b>
11.1	Untersuchung von Ziehungsreihenfolgen . . . . .	300
11.2	Berechnung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis <i>keine</i> <i>Übereinstimmung</i> . . . . .	308
11.3	Anwendung der Überlegungen beim Rencontre-Problem. . . . .	311
11.4	Überlegungen zur Organisation einer Wichtelauslosung. . . . .	313
11.5	Ketten mit farbigen Kugeln . . . . .	317
11.6	Ketten mit dunklen und hellen Kugeln . . . . .	321
11.7	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	326
<b>12</b>	<b>Spiralen . . . . .</b>	<b>327</b>
12.1	Archimedische Spiralen. . . . .	328
12.2	Logarithmische Spiralen . . . . .	337
12.3	Beispiele weiterer Spiraltypen. . . . .	346
12.4	Spiralförmige Anordnungen natürlicher Zahlen . . . . .	350
12.5	Hinweise auf weiterführende Literatur . . . . .	356

---

<b>13</b>	<b>Persische, keltische und afrikanische Ornamente</b> .....	359
13.1	Girih-Kacheln .....	360
13.2	Keltische Knoten .....	370
13.3	Sona-Diagramme .....	381
13.4	Hinweise auf weiterführende Literatur .....	384
	<b>Allgemeine Hinweise auf geeignete Literatur</b> .....	387
	<b>Stichwortverzeichnis</b> .....	389

*Die Phantasie arbeitet in einem schöpferischen Mathematiker nicht weniger als in einem erfinderischen Dichter.*

(Jean-Baptiste le Rond d'Alembert, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph, 1717–1783)



Bereits vor Zehntausenden von Jahren haben die Menschen begonnen, die von ihnen hergestellten Gegenstände für den täglichen Gebrauch mit einfachen Mustern zu verzieren.

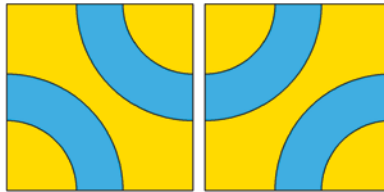
Die in diesem Kapitel angesprochenen Beispiele mögen dazu anregen, sich eigene Muster und Formen auszudenken und diese spielerisch zu variieren.

---

**Elektronisches Zusatzmaterial** Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, das berechtigten Benutzern zur Verfügung steht. [https://doi.org/10.1007/978-3-662-63109-6\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-63109-6_1)

## 1.1 Ein einfaches Muster auf einer quadratischen Fliese

Auf einer quadratischen Fliese sind zwei einander gegenüberliegende Viertelkreis-Bögen als Muster eingezeichnet. Wenn man diese Fliese um  $90^\circ$  dreht, sieht das zwar ein bisschen anders aus – aber man würde nicht von einem wirklich anderen Muster sprechen, sondern eher z. B. von Lage A und Lage B.



Da das betrachtete Fliesenmuster *punktsymmetrisch* zum Mittelpunkt der Fliese ist, ist die Fliese in Lage A nach einer Drehung um  $180^\circ$  wieder in Lage A. Entsprechendes gilt für Lage B.

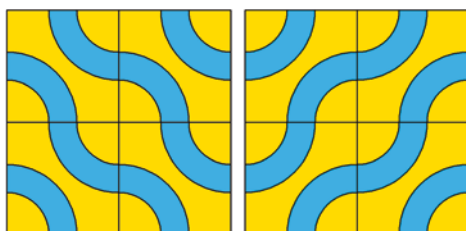
*Hinweis:* Wenn man in der Mathematik von einer Drehung um einen positiven Winkel spricht, meint man immer eine Drehung *im Gegenuhrzeigersinn*.

Legt man nun eine quadratische Fläche mit vier von diesen Fliesen aus, dann hat man für jede Fliese jeweils zwei Möglichkeiten, sie zu legen, also insgesamt  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$  Möglichkeiten der Kombination, und zwar:

- 1 Möglichkeit mit 4 Fliesen in Lage A,
- 4 Möglichkeiten mit 3 Fliesen in Lage A und 1 Fliese in Lage B,
- 6 Möglichkeiten mit 2 Fliesen in Lage A und 2 Fliesen in Lage B,
- 4 Möglichkeiten mit 1 Fliese in Lage A und 3 Fliesen in Lage B,
- 1 Möglichkeit mit 4 Fliesen in Lage B.

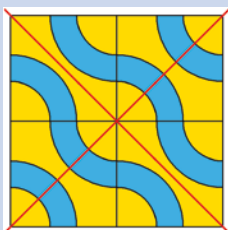
Den Anzahlen 1, 4, 6, 4, 1 werden wir in Kap. 6 *Das Pascal'sche Dreieck* mehrfach begegnen.

Auf diese Weise entstehen verschiedene Muster, aber einige stimmen bis auf eine Drehung überein. Dreht man beispielsweise ein Quadrat von vier Fliesen in Lage A um  $90^\circ$ , also das Muster  $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$ , dann erhält man ein entsprechendes Quadrat von vier Fliesen, die alle in Lage B gelegt wurden, also  $\begin{bmatrix} B & B \\ B & B \end{bmatrix}$ .



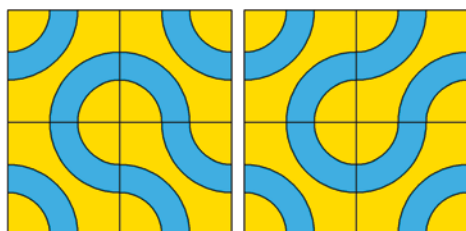
### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.1:** Welches Muster erhält man, wenn man das Muster  $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$  um  $180^\circ$  dreht?  
(Ein mögliches Argument für eine begründete Antwort kann die Symmetrieeigenschaft der Figur sein.)

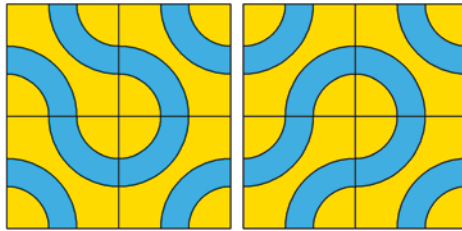


In der nächsten Abbildung ist das Muster  $\begin{bmatrix} B & A \\ A & A \end{bmatrix}$  dargestellt.

Dreht man dieses Muster um  $90^\circ$ , dann erhält man  $\begin{bmatrix} B & B \\ A & B \end{bmatrix}$ , denn durch eine Drehung um  $90^\circ$  wird jedes  $A$  in ein  $B$  verwandelt und jedes  $B$  in ein  $A$ .



Dreht man dann weiter noch einmal um  $90^\circ$ , erhält man so das Muster  $\begin{bmatrix} A & A \\ A & B \end{bmatrix}$  und nach einer weiteren Drehung um  $90^\circ$  das Muster  $\begin{bmatrix} B & A \\ B & B \end{bmatrix}$ .



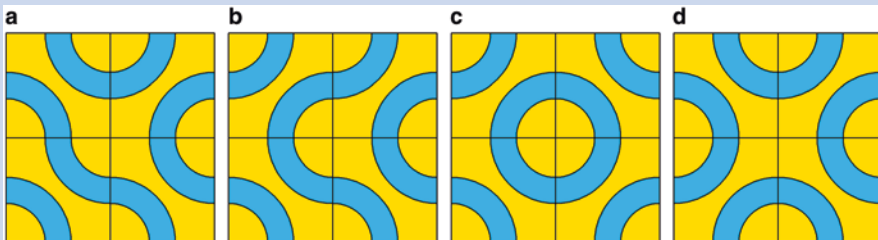
### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.2:** Mit welcher Eigenschaft hängt es zusammen, dass nicht nur zwei, sondern vier verschiedene Muster durch wiederholte Drehungen um  $90^\circ$  aus  $\begin{bmatrix} B & A \\ A & A \end{bmatrix}$  entstehen?

**A 1.3:** Welche Muster entstehen durch fortgesetzte  $90^\circ$ -Drehungen aus den folgenden Mustern? In welchen Fällen gibt es wie viele verschiedene Muster? Welche Achsen- und/oder Punktsymmetrie liegt jeweils vor?

(a)  $\begin{bmatrix} A & B \\ A & A \end{bmatrix}$ , (b)  $\begin{bmatrix} B & B \\ A & A \end{bmatrix}$ , (c)  $\begin{bmatrix} B & A \\ A & B \end{bmatrix}$ , (d)  $\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ ,

vgl. die folgenden Abbildungen. Legen Sie die einzelnen Muster aus.



Zusammengefasst können wir festhalten, dass es zwar 16 mögliche Kombinationen, aber eigentlich nur sechs verschiedene 4er-Muster gibt. Die übrigen Kombinationen stimmen – evtl. bis auf Drehungen um  $90^\circ$ , um  $180^\circ$  oder um  $270^\circ$  – mit einem dieser sechs Typen überein:

- Typ 1: Alle vier Fliesen haben die gleiche Lage (2 der 16 Kombinationen liefern *ein* Muster).
- Typ 2 und Typ 3: Eine Fliese hat die eine Lage, die anderen drei die andere Lage (4+4 der 16 Kombinationen liefern zwei verschiedene Muster).
- Typ 4, Typ 5 und Typ 6: Zwei Fliesen haben die eine Lage, zwei die andere Lage (4+1+1 der 16 Kombinationen liefern drei verschiedene Muster).

**Kombinationen von Fliesen in einem  $3 \times 3$ -Muster**

Insgesamt gibt es  $2^9 = 512$  Möglichkeiten, neun Fliesen in quadratischer Anordnung auszulegen.

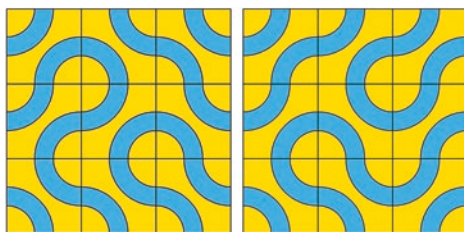
Mithilfe der Informationen aus Kap. 6 kann man ausrechnen, dass es dabei so viele Möglichkeiten gibt:

- 1 mit 9 Fliesen in Lage A,
- 9 mit 8 Fliesen in Lage A und 1 Fliese in Lage B,
- 36 mit 7 Fliesen in Lage A und 2 Fliesen in Lage B,
- 84 mit 6 Fliesen in Lage A und 3 Fliesen in Lage B,
- 126 mit 5 Fliesen in Lage A und 4 Fliesen in Lage B,
- 126 mit 4 Fliesen in Lage A und 5 Fliesen in Lage B,
- 84 mit 3 Fliesen in Lage A und 6 Fliesen in Lage B,
- 36 mit 2 Fliesen in Lage A und 7 Fliesen in Lage B,
- 9 mit 1 Fliese in Lage A und 8 Fliesen in Lage B sowie
- 1 mit 9 Fliesen in Lage B.

Von den 512 möglichen Auslegungen eines  $3 \times 3$ -Quadrats stimmen wieder etliche bis auf eine Drehung überein. Wir werden uns in diesem Abschnitt insbesondere mit den symmetrischen Figuren beschäftigen.

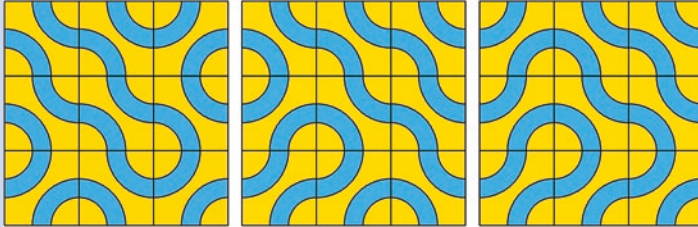
Das folgende links abgebildete 9er-Muster ist  $\begin{bmatrix} B & A & A \\ B & B & A \\ A & A & A \end{bmatrix}$ . Dreht man das Muster um  $90^\circ$ ,

vgl. Abbildung rechts, dann ergibt sich  $\begin{bmatrix} B & B & B \\ B & A & B \\ A & A & B \end{bmatrix}$ .

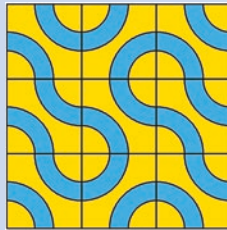
**Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen**

**A 1.4:** Welche Muster ergeben sich, wenn man  $\begin{bmatrix} B & B & B \\ B & A & B \\ A & A & B \end{bmatrix}$  noch einmal um  $90^\circ$  bzw. um  $180^\circ$  dreht?

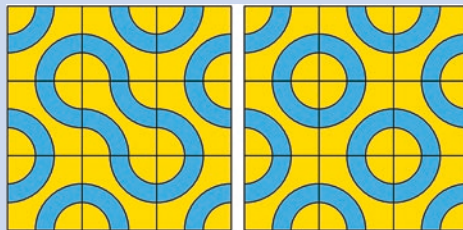
**A 1.5:** Untersuchen Sie die folgenden achsensymmetrischen Muster. Welche Muster erhält man, wenn die gesamte Figur jeweils um  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  gedreht wird?



**A 1.6:** Das folgende Muster ist punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des  $3 \times 3$ -Quadrats. Welche Muster erhält man, wenn die gesamte Figur um  $90^\circ$ , um  $180^\circ$ , um  $270^\circ$  gedreht wird? Bestimmen Sie zwei weitere punktsymmetrische 9er-Muster.

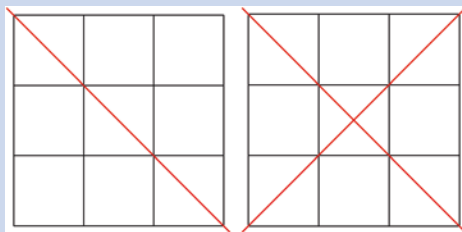


**A 1.7:** Welche Symmetrieeigenschaften haben die folgenden beiden Muster? Welche Muster erhält man, wenn die gesamte Figur um  $90^\circ$ , um  $180^\circ$ , um  $270^\circ$  gedreht wird?

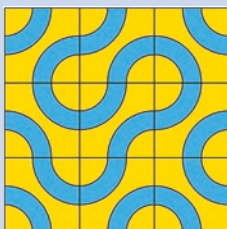


**A 1.8:** Wie viele von den 512 möglichen 9er-Mustern

- sind achsensymmetrisch zu der eingezeichneten Diagonale (vgl. die folgende Abb. links),
- sind achsensymmetrisch zu *beiden* Diagonalen (vgl. die folgende Abb. rechts),
- sind punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des  $3 \times 3$ -Quadrats,
- enthalten ein oder zwei geschlossene blaue Bänder (vgl. Abb. in A 1.7)?

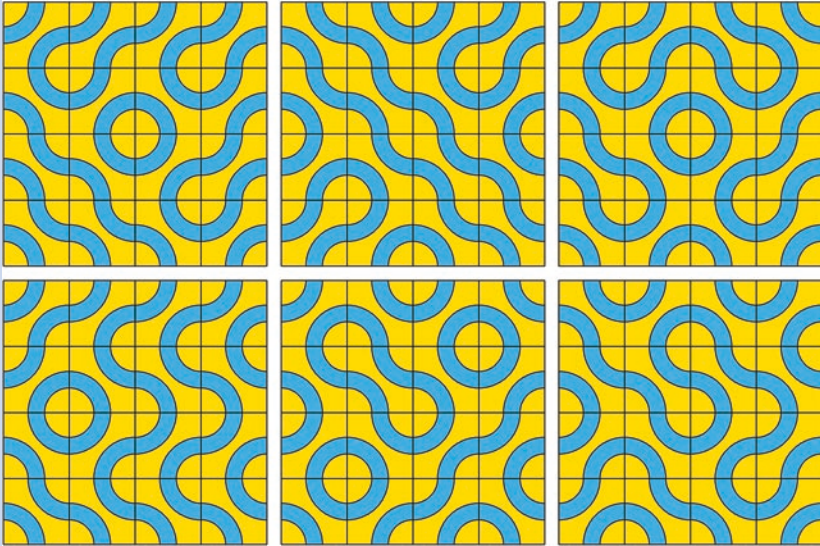


**A 1.9:** Durch wie viele der neun quadratischen Felder kann maximal ein durchgehendes blaues Band verlaufen?

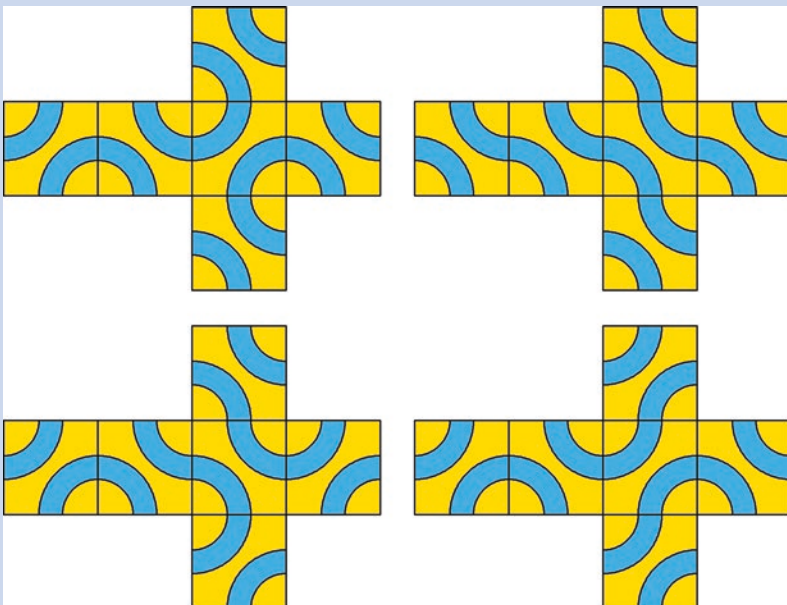


**A 1.10:** Für die Auslegung von  $4 \times 4$ -Quadraten mit den betrachteten quadratischen Fliesen gibt es  $2^{16} = 65536$  Möglichkeiten.

- Welche Symmetrieeigenschaften kann man bei diesen 16er-Mustern unterscheiden (vgl. Beispiele in den folgenden Abbildungen)? Geben Sie jeweils ein (weiteres) Beispiel an.
- Bestimmen Sie ein Muster mit einem möglichst langen durchgehenden blauen Band (vgl. letzte Abbildung; es gibt noch längere durchgehende Bänder).



**A 1.11:** Die folgenden Abbildungen zeigen Netze eines Würfels. Beschreiben Sie, wie die blauen Bänder verlaufen, wenn die Würfel-Seitenflächen mit Klebestreifen versehen und zusammengebaut sind. Können Sie sich das vorstellen, ohne den Würfel zusammenzukleben?



## 1.2 Einfache Fliesenmuster mit gleichseitigen Dreiecken

Ein Muster mit Fliesen mit blauem Band kann man auch mit gleichseitigen Dreiecken erzeugen. Dreht man eine solche Fliese um  $120^\circ$  oder um  $240^\circ$ , dann entstehen entsprechend drei verschiedene Lagen.



Mithilfe solcher Dreiecksfliesen kann ein regelmäßiges Sechseck ausgelegt werden. Hierfür gibt es dann  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$  Möglichkeiten. Von diesen stimmen aber etliche Muster überein. Man kann zeigen, dass es insgesamt 130 verschiedene Muster gibt.

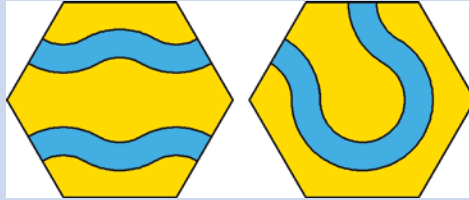
Darunter sind auch wieder punkt- oder achsensymmetrische Figuren, z. B. die folgenden:



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

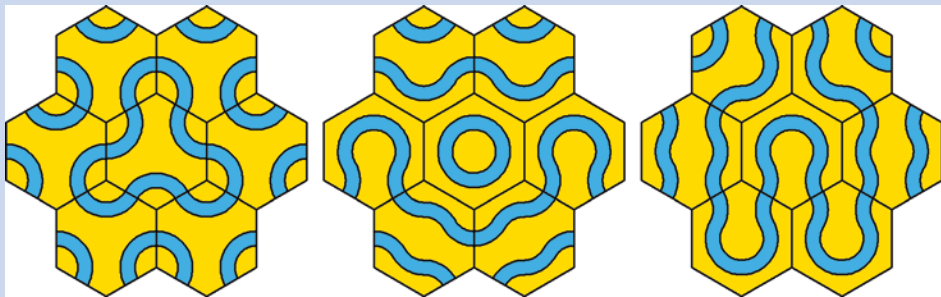
**A 1.12:** Finden Sie weitere Sechsecke, die mit den dreieckigen Fliesen ausgelegt sind und ein symmetrisches Muster haben. Welche Symmetrie-Arten sind möglich?

**A 1.13:** Anstelle der zu einem Sechseck zusammengesetzten Dreiecksfliesen kann man auch direkt Sechseckfliesen verwenden. Außer den drei abgebildeten Formen sind auch noch die folgenden beiden Typen geeignet (mit durchgehenden blauen Bändern):

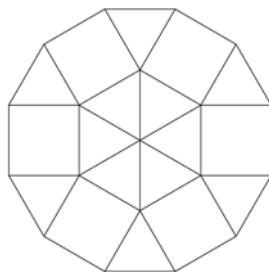


Mit regelmäßigen Sechsecken kann man die Ebene parkettieren, vgl. *Mathematik ist wunderschön*, Kap. 3.

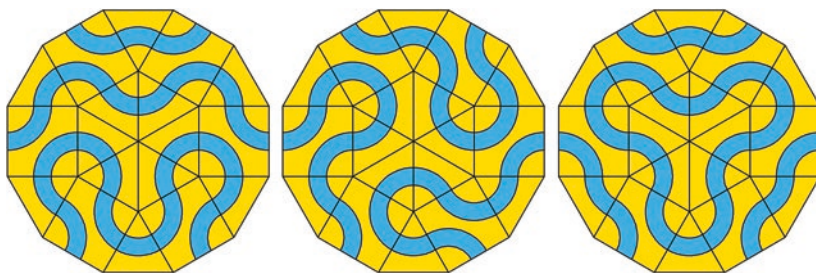
Die folgenden Abbildungen zeigen Beispiele von symmetrischen Figuren, die jeweils aus sieben Sechseckfliesen gebildet wurden. Legen Sie selbst weitere Figuren aus.



Die betrachteten Dreieck- und Viereckfliesen kann man auch dazu verwenden, um ein regelmäßiges Zwölfeck auszulegen, vgl. dazu auch *Mathematik ist wunderschön*, Abschn. 3.3.



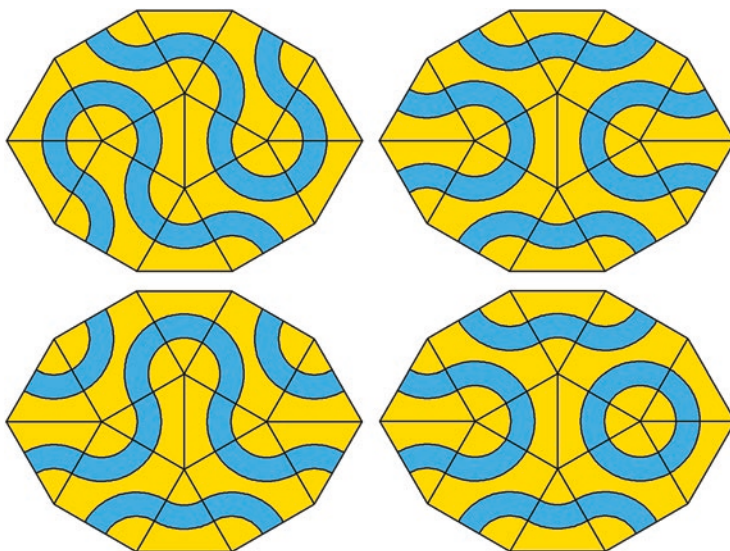
Dabei kann man achsen- oder punktsymmetrische Muster finden, aber auch Muster mit *dreizähliger* Drehsymmetrie (= bei Drehungen um  $120^\circ$  und um  $240^\circ$  erhält man wieder die gleiche geometrische Figur), vgl. die folgenden Beispiele. Im Folgenden sollen nur solche Beispiele betrachtet werden, bei denen die „blauen“ Bänder von Rand zu Rand laufen, also nicht im Innern enden.



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.14:** Finden Sie alle weiteren symmetrischen Muster für die Auslegung der regelmäßigen Zwölfecke mit den quadratischen und den dreieckigen Fliesen. (Beachten Sie: Die blauen Bänder dürfen nicht im Innern enden.)

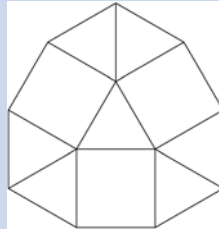
Es gibt auch noch andere Möglichkeiten, gleichseitige Dreiecke und Quadrate zu achsen- und/oder punktsymmetrischen Formen zu kombinieren, z. B. das folgende symmetrische Zehneck mit zehn gleich langen Seiten, das zwei zueinander senkrechte Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum besitzt.



### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

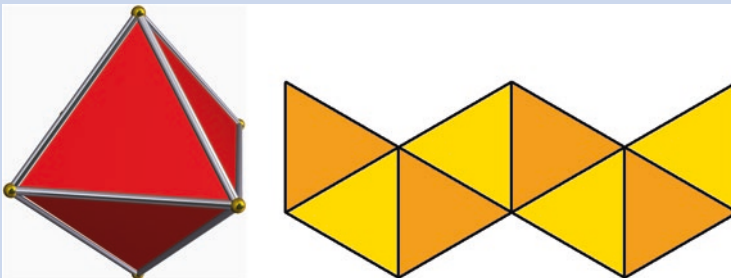
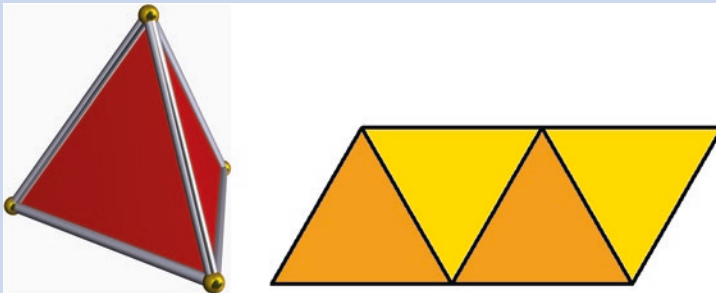
**A 1.15:** Finden Sie alle weiteren symmetrischen Muster für die Auslegung des zuletzt betrachteten Zehnecks mit den quadratischen und den dreieckigen Fliesen. (Beachten Sie: Die blauen Bänder dürfen nicht im Innern enden.)

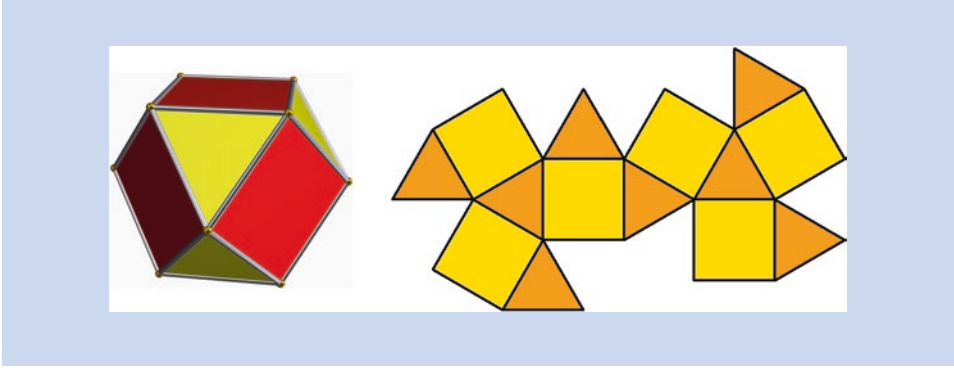
**A 1.16:** Kann das folgende symmetrische Neuneck mit den quadratischen und den dreieckigen Fliesen so ausgelegt werden, dass ein symmetrisches Muster entsteht? (Beachten Sie: Die blauen Bänder dürfen nicht im Innern enden.)



**A 1.17:** Mithilfe der o. a. einfachen Fliesenmuster für gleichseitige Dreiecke und Quadrate kann man auch die Oberfläche eines Tetraeders, eines Oktaeders und eines Kuboktaeders belegen (Abbildungen dieser platonischen bzw. archimedischen Körper aus *Mathematik ist wunderschön*, Kap. 10).

Basteln Sie diese Körper mithilfe der jeweils daneben abgebildeten Netze und tragen Sie geeignete blaue Bögen ein.



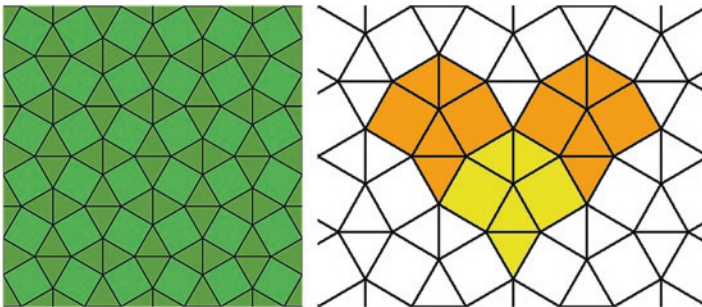


### 1.3 Parkettierung der Ebene mit den quadratischen und dreieckigen Fliesen

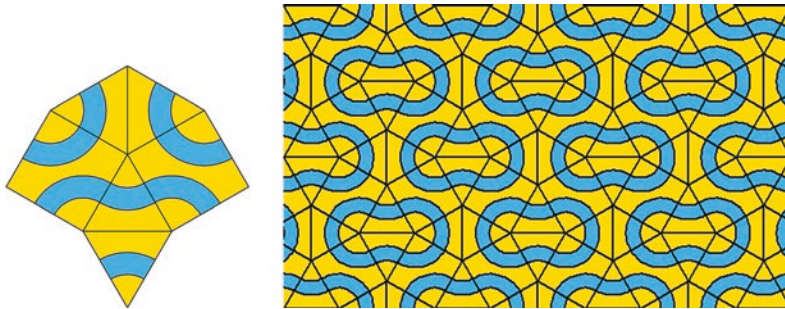
Dass man die Ebene vollständig mit gleichseitigen Dreiecken und Quadraten auslegen kann, wird in Kap. 3 von *Mathematik ist wunderschön* dargestellt.

Dies kann u. a. mithilfe von abwechselnd senkrecht und waagrecht liegenden „Diamanten“ aus zwei aneinanderliegenden gleichseitigen Dreiecken geschehen, zwischen denen Quadrate liegen (vgl. die folgende Abb. links).

Sechs nebeneinanderliegende Flächenstücke kann man so zu einem achsensymmetrischen Puzzlestück zusammenfassen, dass die gesamte Ebene mit solchen Puzzlestücken bedeckt werden kann (vgl. die folgende Abb. rechts).



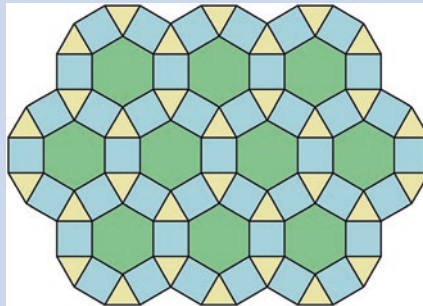
Wählt man für die Auslegung des Puzzlestücks die in der folgenden Abbildung links dargestellte Möglichkeit, dann zeigt die Abbildung rechts die Parkettierung der Ebene mit lauter solchen Puzzlestücken.



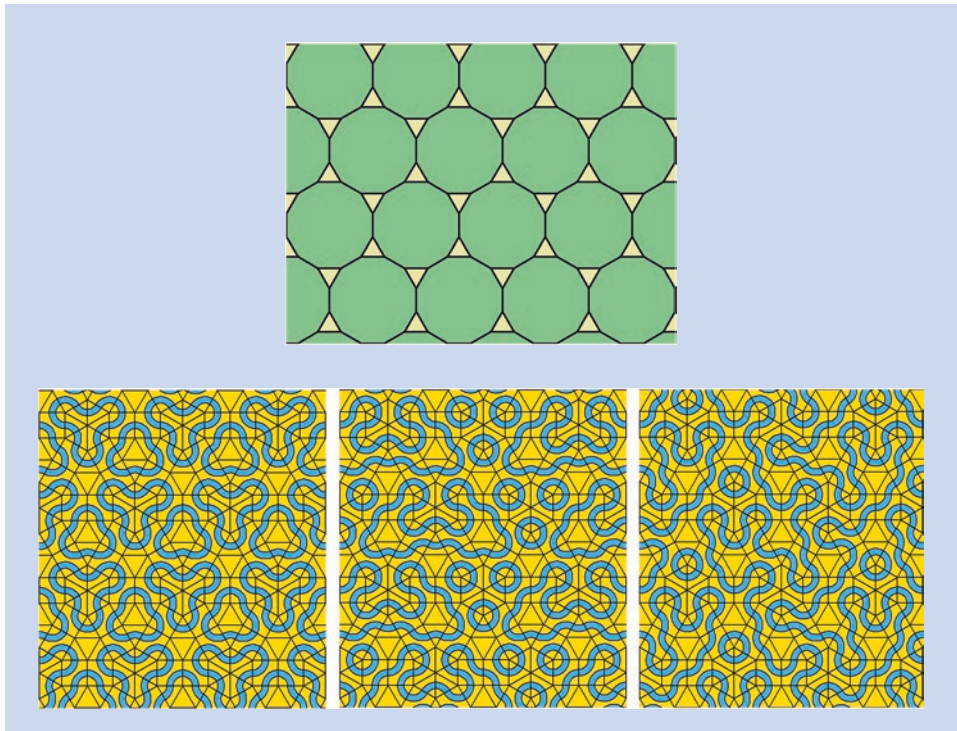
### Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

**A 1.18:** Die Parkettierung der Ebene kann auch mithilfe von sich teilweise überschneidenden regelmäßigen Zwölfecken erfolgen (vgl. die folgende Abbildung aus *Mathematik ist wunderschön*, Kap. 3).

Begründen Sie: Wenn man verlangt, dass ein Muster durchgehende oder geschlossene blaue Bänder enthält, dann ist es nicht möglich, diese Parkettierung mit den bisher betrachteten Fliesen vorzunehmen.

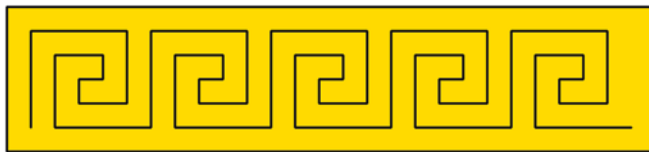


**A 1.19:** Man kann aber auch die regelmäßigen Zwölfecke so aneinanderlegen, wie in der folgenden Abbildung zu sehen ist. Die Lücken zwischen den Zwölfecken (grün) lassen sich dabei mit gleichseitigen Dreiecken füllen (gelb). Wenn man für diese Fülldreiecke Fliesen ohne blaue Bänder verwendet, entstehen wieder schöne Muster. Probieren Sie es selbst aus!



## 1.4 Fries-Ornamente

An alten Häusern und auf vielen Keramiken findet man Streifen mit Mustern, die man in der Architektur und in der Kunst als **Fries** bezeichnet.



Das hier abgebildete Muster bezeichnet man als Mäander (nach dem griechischen Wort *Μαίανδρος* [Maiandros], einem Fluss in der heutigen Westtürkei, der viele Fluss-schleifen hat).

Alle Frieze haben eine gemeinsame Eigenschaft: Ein bestimmtes Motiv wiederholt sich nach links und nach rechts beliebig oft (oder umläuft das Objekt wie ein geschlossenes Band, z. B. bei einer Vase).

In der Mathematik bezeichnet man eine solche Wiederholung als *Translation* (Parallelverschiebung) einer Ausgangsfigur in eine bestimmte Richtung (sog. *Fries-Richtung*).

Es gibt unendlich viele Möglichkeiten, einen Fries zu gestalten. Bezüglich ihrer geometrischen Eigenschaften kann man bei diesen **Bandornamenten** sieben verschiedene Typen unterscheiden.

*Hinweis:* Berücksichtigt man außer der Translation, der Achsenspiegelung und der Gleitspiegelung auch die Möglichkeit der Rotation (Drehung), dann kann man 17 verschiedene Typen von Ornamenten unterscheiden, mit denen eine Ebene parkettiert werden kann (vgl. Literaturhinweise zu den sog. **Ornamentgruppen**, engl. Wallpaper [wörtlich: Tapetenmuster]).

Der Engländer **John Horton Conway** (1937–2020), ehemaliger Professor der Princeton University, war einer der kreativsten Mathematiker unserer Zeit (u. a. erfand er 1970 das Spiel „Game of Life“). Er hatte die Idee, die sieben möglichen Fries-Ornamente mithilfe von Fußabdrücken zu charakterisieren.

In den folgenden Abschnitten sind die verschiedenen Kombinationen von Fußabdrücken abgebildet (Bildquelle: Wikipedia Frieze group, CC-BY-SA-4.0, Autor: Tomruen).

### Fries-Typ F1

Das einfachste Fries-Ornament erhält man durch Wiederholung einer Figur, die nicht notwendig symmetrisch ist.

In der folgenden Abbildung besteht die Ausgangsfigur aus einem einzelnen Fußabdruck.

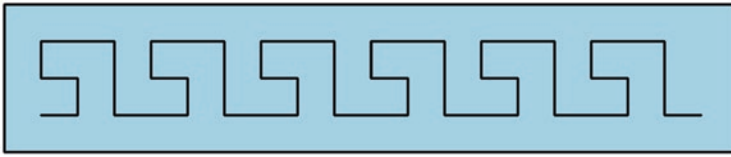


Das entsprechende Conway-Ornament entsteht dadurch, dass eine Person auf einem Bein vorwärtshüpft – deshalb bezeichnete Conway es als „hop“ (engl. *hüpfen*).

Unter den Buchstaben des Alphabets gibt es viele, die für ein entsprechendes einfaches Fries-Ornament infrage kommen, beispielsweise der nichtsymmetrische Buchstabe F.



Die folgende Abbildung zeigt eine vereinfachte Form des Mäander-Ornaments.



Man kann einen Fries aber auch mithilfe von quadratischen Fliesen mit einfachem Bandmuster gestalten.



*Hinweis: Da die quadratischen Fliesen mit den blauen Bändern selbst punktsymmetrisch sind, könnte man diesen Fries auch als Fries vom Typ F4 auffassen (s. u.).*

### Fries-Typ F2

Eine weitere Möglichkeit ergibt sich, indem man eine zu einer horizontalen Achse (der Fries-Richtung) symmetrische Figur wiederholt längs dieser horizontalen Achse zeichnet.

In der folgenden Abbildung wird zunächst der nach rechts gerichtete Abdruck des linken Fußes an einer horizontalen Achse gespiegelt (dies ergibt dann den passenden rechten Fuß); so entsteht eine zu einer horizontalen Achse symmetrische Figur.



Das entsprechende Conway-Ornament entsteht, wenn die Person mit beiden Füßen vorwärtshüpft – deshalb bezeichnete Conway es als „jump“ (engl. *springen*).

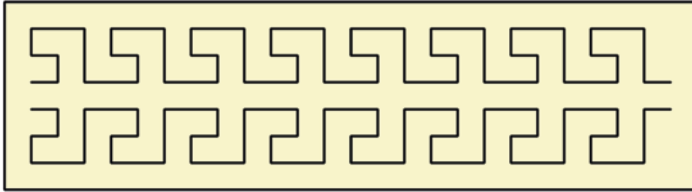
Auch hier gibt es unter den Buchstaben des Alphabets mehrere, die für ein entsprechendes Fries-Ornament infrage kommen, beispielsweise:



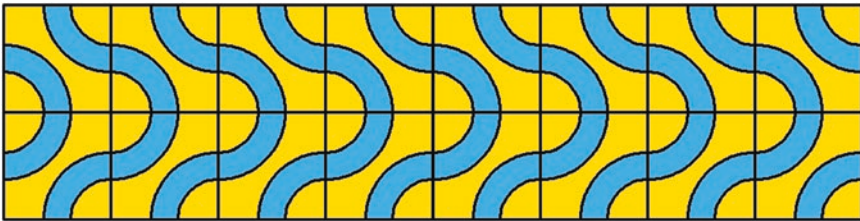
Wenn man noch zusätzlich das Entstehen der Ausgangsfigur durch Spiegelung an einer horizontalen Achse herausstellen möchte, muss man Kleinbuchstaben des Alphabets betrachten, beispielsweise:



Ein Fries dieses Typs mit dem o. a. vereinfachten Mäandermuster sieht dann wie folgt aus:



Und entsprechend lässt sich ein Fries mithilfe der o. a. quadratischen Fliesen gestalten:



### Fries-Typ F3

Beim dritten Fries-Typ wird eine zu einer vertikalen Achse symmetrische Figur wiederholt längs einer horizontalen Achse gezeichnet.

In der folgenden Abbildung wird zunächst der nach oben gerichtete Abdruck des linken Fußes an einer vertikalen Achse gespiegelt (sodass dann auch der rechte Fuß abgebildet ist); so entsteht eine zu vertikalen Achsen symmetrische Figur.



Das entsprechende Conway-Ornament entsteht, wenn die Person seitwärts hüpf – deshalb bezeichnete Conway es als „side“ (englische Bezeichnung für die Tänzelsbewegung eines Pferdes).