Física Teórica

Landau \ Lifshitz

Teoría de la elasticidad

Volumen 7

EDITORIAL REVERTÉ

† L. D. LANDAU E. M. LIFSHITZ
Academia de Ciencias, U. R. S. S.

Física Teórica
Volumen 7

Teoría de la elasticidad

EDITORIAL REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:

Теория упругости

Edición original en lengua rusa publicada por
MEZHUDUNARODNAYA KNIGA, Moscou

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1986
ISBN 978-84-291-4088-0 Tomo 7
ISBN: 978-84-291-4080-4 Obra completa

Edición en e-book:
© Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9058-8

Versión española por

Dr. Juan T. D'Alessio

Profesor de Física de la Facultad de Ciencias exactas de Buenos Aires
Profesor de Termodinámica y de Fisicoquímica de la Escuela Superior Técnica
Jefe del Servicio de Producción de la Comisión Nacional de Energía Atómica

Propiedad de
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

PRÓLOGO A LA «TEORÍA DE LA ELASTICIDAD»

En esta edición la teoría de la elasticidad se ha separado formando volumen aparte, como se había proyectado en el plan primitivo (el hecho de reunirla en un sólo libro con la hidrodinámica se debió a causas puramente accidentales).

Junto con pequeñas correcciones e insertos, se ha completado la obra con un nuevo capítulo acerca de la teoría macroscópica de las dislocaciones. Este capítulo se ha escrito en colaboración con A. M. Kosevich, Quisiera expresarle aquí mi sincera gratitud por la ayuda que así prestó.

Doy las gracias también a G. I. Barenblatt, V. L. Ginzburg, M. A. Isakovich, I. M. Lifshitz y a I. M. Shmushkevich por sus útiles observaciones.

Al estudiar el libro dentro del «mínimo teórico» para físicos teóricos, cabe recomendar que se prescinda de los §§ 8, 9, 11-21, 25-31.

Diciembre de 1964 E. M. LIFSHITZ

DEL PRÓLOGO A LA MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS

... En el libro, escrito por físicos y en primer lugar destinado a físicos, nos han interesado, naturalmente, cuestiones que de ordinario no se exponen en los cursos de teoría de la elasticidad; tales como, por ejemplo, ciertas cuestiones relativas a la conductibilidad térmica y a la viscosidad de los sólidos, o toda una serie de problemas de teoría de las vibraciones elásticas y de las ondas. A la vez, tan sólo de manera muy sucinta hemos tocado un cierto número de problemas especiales (por ejemplo, complicados métodos matemáticos de teoría de la elasticidad, teoría de las cáscaras, etc.), en los que, además, en modo alguno los autores pueden ser considerados como especialistas.

1953 L. LANDAU, E. LIFSHITZ

ALGUNOS SÍMBOLOS UTILIZADOS

Densidad de materia ϱ

Vector de desplazamiento $\mathbf{u}$

Tensor de deformación $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$

Tensor de tensiones σ_{ik}

Módulo de compresión hidrostática K

Módulo de extensión (módulo de Young) E

Coeficiente de Poisson σ

Velocidades longitudinal y transversal del sonido c_l y c_t (para sus expresiones en función de K, μ, E, σ, v. pág. 142).

Las cantidades K, μ y E, σ están ligadas por las fórmulas:

$$E = \frac{9K\mu}{3K+\mu}, \quad \sigma = \frac{3K - 2\mu}{2(3k+\mu)},$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}.$$

ÍNDICE DE MATERIAS

CAPÍTULO I

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

§ 1. El tensor de deformación

La *teoría de la elasticidad* estudia la mecánica de los cuerpos sólidos, considerados como medios continuos (*).

Bajo la acción de fuerzas aplicadas, los sólidos se deforman, o sea, cambian de forma y volúmen, en mayor o menor grado. La deformación de un cuerpo se describe analíticamente de la siguiente manera. La posición de cualquier punto del cuerpo queda definida mediante su radio vector **r** (con componentes $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) en cierto sistema de coordenadas. En general, cuando el sólido se deforma, cada punto se desplaza. Consideremos un punto particular; sea **r** su radio vector antes de la deformación, **r**′ (con componentes x'_i) después de la misma. El desplazamiento de este punto debido a la deformación está determinado por el vector **r**′ — **r**, que llamaremos **u**:

$$u_i = x'_i - x_i. \tag{1.1}$$

Al vector **u** se le denomina *vector de desplazamiento*. Las coordenadas x'_i del punto desplazado son, claro está, funciones de las coordenadas x_i del mismo punto antes de desplazarse. En consecuencia, el vector u_i es también función de las coordenadas x_i. Si se da **u** como función de las coordenadas x_i, la deformación del cuerpo queda totalmente determinada.

Cuando un cuerpo se deforma, varían las distancias entre sus puntos. Consideremos dos puntos muy próximos entre sí. Si el radio vector que los une antes de la deformación es $\mathrm{d}x_i$, el radio vector que una los mismos puntos en el cuerpo deformado será $\mathrm{d}x'_i = \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i$. La distancia entre los puntos es:

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2}$$

(*) Las ecuaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad fueron establecidas por Cauchy y Poisson en la década de 1820.

y después de la deformación resulta:

$$dl' = \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3}.$$

Utilizando la regla general de las sumatorias (*) podemos escribir:

$$dl^2 = dx_i^2, \quad dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2.$$

Substituyendo $du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$, expresemos dl'^2 en la forma:

$$dl'^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k\, dx_l.$$

Como la sumatoria en el segundo término de la derecha se extiende sobre los subíndices i y k, podemos escribir:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k.$$

En el tercer término intercambiamos los subíndices i y l. Así, dl'^2 toma finalmente la forma

$$dl'^2 = dl^2 + 2u_{ik}\, dx_i\, dx_k, \tag{1.2}$$

donde el tensor u_{ik} se define como

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{1.3}$$

Estas expresiones dan la variación de una longitud infinitesimal cuando el sólido se deforma.

El tensor u_{ik} recibe el nombre de *tensor de deformación*. Vemos por su definición que se trata de un tensor simétrico, o sea:

$$u_{ik} = u_{ki}. \tag{1.4}$$

(*) De acuerdo con la regla general, omitiremos en todas partes los signos de suma sobre índices vectoriales y tensoriales; por todo par de índices repetidos (en una expresión dada) entenderemos, en todas partes, suma sobre los valores 1, 2, 3.

Este resultado se ha obtenido escribiendo en dl'^2 el término $2\,\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\,dx_i\,dx_k$ en la forma evidentemente simétrica

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)dx_i\,dx_k.$$

Como se trata de un tensor simétrico, u_{ik} puede ser diagonalizado en cualquier punto. Esto significa que, en cualquier punto del sólido, puede elegirse un sistema de ejes coordenados — los ejes principales del tensor — de tal manera que solamente las componentes diagonales u_{11}, u_{22} y u_{33} del tensor sean diferentes de cero. Estas componentes — llamadas valores principales del tensor de deformación — se representarán en lo que sigue por $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ y $u^{(3)}$. Debe recordarse, sin embargo, que si el tensor está diagonalizado en un punto del cuerpo, en general no estará diagonalizado en otros puntos del mismo.

Si el tensor de deformación está diagonalizado en un punto, en sus proximidades el elemento de longitud (1.2) será:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= (\delta_{ik}+2u_{ik})\,dx_i\,dx_k \\ &= (1+2u^{(1)})\,dx_1{}^2+(1+2u^{(2)})\,dx_2{}^2+(1+2u^{(3)})\,dx_3{}^2. \end{aligned}$$

Vemos que esta expresión es la suma de tres términos independientes. En consecuencia, la deformación de un elemento de volumen puede considerarse compuesta por deformaciones a lo largo de tres ejes mutuamente perpendiculares, los ejes principales del tensor u_{ik}. Cada una de estas deformaciones es una dilatación (o contracción) simple en la dirección correspondiente: la longitud dx_1, medida a lo largo del primer eje principal, se convierte en $dx_1' = \sqrt{1+2u^{(1)}}\,dx_1$; lo mismo ocurre en los otros dos ejes. Por consiguiente, $\sqrt{1+2u^{(i)}} - 1$ es el alargamiento relativo $\left(\dfrac{dx'_i - dx_i}{dx_i}\right)$ a lo largo del i-ésimo eje principal.

Casi siempre, en la práctica, las deformaciones son pequeñas. Esto significa que la variación de una longitud, comparada con la longitud misma, es pequeña. En otras palabras, los alargamientos relativos son pequeños comparados con la unidad. En todo lo que sigue, consideraremos que las deformaciones son de este tipo.

Si un cuerpo está sujeto a pequeñas deformaciones, todas las componentes del tensor de deformación son pequeñas, porque sus elementos dan, como ya hemos señalado, las variaciones relativas de longitud en el cuerpo. Sin embargo, a veces el vector de desplazamiento u_i puede ser grande, aún para pequeñas deformaciones. Consideremos, por ejemplo, el caso de una varilla larga y delgada. Aun en el caso de una gran flexión, en la cual el extremo libre de la varilla se desplaza una distancia considerable, las tracciones y compresiones dentro de la varilla misma son pequeñas.

Excepto en tales casos particulares (*), el vector de desplazamiento de una pequeña deformación también es pequeño. En efecto, ningún cuerpo « tridimensional » (esto es, un sólido en el cual ninguna de las tres dimensiones es pequeña) puede deformarse de tal manera que algunas partes de él se muevan considerablemente sin que ocurran extensiones o compresiones importantes dentro del cuerpo.

En el capítulo 2 se discutirá en detalle el caso de las barras delgadas. En todos los demás casos, por consiguiente, u_i es pequeño para pequeñas deformaciones y podremos despreciar el último término en la expresión general (1.3) por ser de segundo orden de pequeñez. El tensor de deformación resulta, pues, para pequeñas deformaciones:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{1.5}$$

Las dilataciones relativas de los elementos de longitud a lo largo de los ejes principales del tensor (en un punto dado) resultan ser, salvo términos de orden superior:

$$\sqrt{1+2u^{(i)}}-1 \approx u^{(i)}$$

es decir, son directamente los valores principales del tensor u_{ik}.

Consideremos un elementos de volumen infinitesimal $\mathrm{d}V$ y calculemos el volumen $\mathrm{d}V'$ después de la deformación. Para hacerlo, hagamos coincidir los ejes coordenados con los ejes principales del tensor en el punto considerado. Los elementos de longitud $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$ a lo largo de estos ejes se convertirán, después de la deformación, en $\mathrm{d}x_1 = (1+u^{(1)})\,\mathrm{d}x_1$, etc. El volumen $\mathrm{d}V$ es el producto $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$, mientras que $\mathrm{d}V'$ será $\mathrm{d}x'_1\,\mathrm{d}x'_2\,\mathrm{d}x'_3$, o sea, será

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1+u^{(1)})\,(1+u^{(2)})\,(1+u^{(3)}).$$

Despreciando términos de orden superior, obtenemos:

$$\mathrm{d}V' = \mathrm{d}V(1+u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}).$$

La suma $u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$ de los valores principales de un tensor es, como es sabido,

(*) Entre los que figura, además de las deformaciones de las varillas delgadas, el de la flexión que transforma una placa delgada en una superficie cilíndrica.

su invariante, igual a la suma de los elementos diagonales $u_{ii} = u_{11}+u_{22}+u_{33}$ en cualquier sistema de coordenadas. Resulta pues:

$$dV' = dV(1+u_{ii}). \tag{1.6}$$

Observemos que la suma de los elementos diagonales del tensor de deformación es igual al cambio relativo de volumen

$$\frac{dV'-dV}{dV}.$$

A menudo es conveniente expresar las componentes del tensor de deformaciones en coordenadas esféricas o cilíndricas. Daremos aquí las fórmulas que expresan las componentes en términos de las derivadas del vector de desplazamiento en tales coordenadas. En coordenadas esféricas r, θ, φ tenemos:

$$\begin{gathered}
u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ u_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},\ u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r}\,\mathrm{ctg}\,\theta + \frac{u_r}{r},\\
2u_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta\right) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi},\ 2u_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta},\\
2u_{\varphi r} = \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}.
\end{gathered} \tag{1.7}$$

En coordenadas cilíndricas r, φ, z:

$$\begin{gathered}
u_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ u_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r},\ u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\\
2u_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z},\ 2u_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r},\\
2u_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

§ 2. El tensor de tensiones

En un cuerpo que no se halla deformado, la distribución de las moléculas corresponde a su estado de equilibrio térmico. Todas las partes del cuerpo se hallan en equilibrio mecánico. Esto significa que si consideramos una porción del sólido, la resultante de las fuerzas que sobre ella actúan debidas a todas las demás es cero.

Cuando ocurre una deformación, cambia la distribución de las moléculas y el cuerpo deja de encontrarse en su estado de equilibrio original. Aparecen entonces fuerzas que tienden a llevarlo nuevamente al equilibrio. Estas fuerzas internas que aparecen cuando el cuerpo se deforma se llaman *tensiones internas*. Si no hay deformación, no existen tensiones internas.

Las tensiones internas se deben a las fuerzas moleculares, o sea, a las fuerzas de interacción entre las moléculas. Un hecho muy importante para la teoría de la elasticidad es que estas fuerzas tienen un « radio de acción » muy corto. Su efecto se extiende solamente a la vecindad de la molécula que la ejerce, hasta una distancia del mismo orden que la distancia entre moléculas, mientras que la teoría de la elasticidad, por ser una teoría macroscópica, sólo considera distancias grandes comparadas con las distancias intermoleculares. El « radio de acción » de las fuerzas moleculares deberá tomarse, pues, como igual a cero en la teoría de la elasticidad. Podemos decir, entonces, que las fuerzas que producen las tensiones internas son fuerzas « de corto alcance ». Por consiguiente, las que ejercen sobre cualquier parte del sólido las partes vecinas, sólo se ejercen sobre la superficie de dicha parte.

Debe hacerse aquí la siguiente salvedad: la afirmación que precede no es válida en el caso de materiales en los que una deformación produce campos eléctricos macroscópicos (materiales piroeléctricos y piezoeléctricos). Sin embargo, no discutiremos el comportamiento de estas substancias en el presente volumen.

Consideremos la fuerza total que se ejerce sobre un volumen del cuerpo. Ante todo, esta fuerza total es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los elementos de volumen de la parte considerada, o sea, puede escribirse como la integral de volumen $\int \mathbf{F}\,\mathrm{d}V$ donde $\mathbf{F}$ es la fuerza por unidad de volumen y $\mathbf{F}\,\mathrm{d}V$ la fuerza que se ejerce sobre el elemento de volumen $\mathrm{d}V$. Por otra parte, las fuerzas que los distintos elementos de la porción considerada ejercen unos sobre otros, se anulan mutuamente en virtud de la igualdad de la acción y la reacción. La fuerza total requerida puede entonces considerarse como la suma de las fuerzas que ejercen sobre el volumen en cuestión las porciones de sólido que lo rodean. Pero, por lo dicho anteriormente, estas fuerzas actúan sobre la superficie de la región considerada, de modo que la fuerza resultante puede representarse como la suma de las fuerzas que se ejercen sobre todos los elementos de superficie, o sea, mediante una integral de superficie.

Entonces, para cualquier porción del sólido, cada una de las tres componentes $\int F_i\,\mathrm{d}V$ de la resultante de todas las tensiones internas puede ser transformada en una integral de superficie. Por el análisis vectorial sabemos que la integral de un escalar en un volumen arbitrario puede transformarse en una integral sobre la superficie si el escalar es la divergencia de algún vector. En nuestro caso, como tenemos la integral de volumen de un vector, y no de un escalar, este vector debe ser la divergencia de un tensor de segundo rango, o sea, F_i tiene la forma:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{2.1}$$

Así, la fuerza ejercida sobre cualquier volumen puede expresarse como una integral sobre la superficie cerrada que limita dicho volumen (*):

$$\int F_i \, \mathrm{d}V = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik} \, \mathrm{d}f_k, \tag{2.2}$$

donde $\mathrm{d}f_i$ son las componentes del vector elemento de superficie $\mathbf{df}$, dirigido, como siempre, según la normal exterior de la superficie (**).

El tensor σ_{ik} recibe el nombre de *tensor de tensiones*. Como vimos en (2.2), $\sigma_{ik} \, \mathrm{d}f_k$ es la *i*-ésima componente de la fuerza que actúa sobre el elemento de superficie $\mathbf{df}$. Tomando elementos de superficie en los planos xy, yz, zx, encontramos que la componente σ_{ik} del tensor de tensiones es la *i*-ésima componente de la fuerza que actúa sobre la unidad de área perpendicular al eje x_k. Por ejemplo, la fuerza sobre la unidad de área perpendicular al eje x normal a dicha área (o sea, a lo largo del eje x) es σ_{xx}, y las fuerzas tangenciales (paralelas a los ejes y y z) son σ_{yx} y σ_{zx}.

Es necesario hacer aquí la siguiente observación respecto del signo de la fuerza $\sigma_{ik} \, \mathrm{d}f_k$. La integral de superficie que aparece en (2.2) es la fuerza que actúa sobre el volumen encerrado por esa superficie, ejercida por las partes del cuerpo que lo rodean. Recíprocamente, la fuerza que el volumen considerado ejerce sobre dicha superficie es igual y de signo contrario. Así, por ejemplo, la fuerza ejercida por las tensiones internas sobre toda la superficie del cuerpo es

$$-\oint \sigma_{ik} \, \mathrm{d}f_k,$$

donde la integral se toma sobre toda la superficie del cuerpo y $\mathbf{df}$ tiene la dirección de la normal exterior al mismo.

Determinemos el momento de las fuerzas que actúan sobre una porción del cuerpo. El momento de la fuerza $\mathbf{F}$ puede escribirse como un tensor antisimétrico de segundo rango, cuyas componentes son $F_i x_k - F_k x_i$, donde x_i son las coordenadas del punto donde se aplica la fuerza (†). Por consiguiente, el momento de las fuerzas

(*) Por el teorema de Green la integral sobre una superficie se transforma en una integral en el volumen encerrado por ella reemplazando el elemento de superficie $\mathrm{d}f_i$ por el operador $\mathrm{d}V(\partial/\partial x_i)$.

(**) En realidad, para determinar la fuerza total que se ejerce sobre una porción deformada del cuerpo deberíamos integrar, no sobre las viejas coordenadas x_i sino sobre las coordenadas x_i' de los puntos del cuerpo deformado. En correspondencia con esto también las derivadas en (2.1) deberían tomarse respecto de x_i'. Sin embargo, considerando que la deformación es pequeña, las derivadas respecto de x_i y x'_i difieren en cantidades de orden superior, de manera que las derivadas pueden tomarse respecto de las coordenadas x_i.

(†) El momento de la fuerza $\mathbf{F}$ se define como el producto vectorial $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$; sabemos por análisis vectorial que las componentes de un producto vectorial forman un tensor antisimétrico de rango dos, como está escrito en el texto.

que actúan sobre el elemento de volumen dV es $(F_i x_k - F_k x_i)dV$, y el momento que actúa sobre todo el volumen es

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV.$$

Al igual que la fuerza total ejercida sobre un volumen cualquiera, este momento puede expresarse como una integral sobre la superficie que rodea el volumen. Usando la expresión (2.1) para F_i obtenemos:

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV$$

$$= \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV.$$

En el segundo término observamos que la derivada de una coordenada respecto de sí misma vale uno y respecto de las otras vale cero (debido a que son variables independientes). Resulta entonces $\dfrac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$, donde δ_{kl} es el tensor unidad; la multiplicación por σ_{ik} da $\delta_{kl}\sigma_{il} = \sigma_{ik}$, $\delta_{il}\sigma_{kl} = \sigma_{ki}$. En el primer término, el integrando es la divergencia de un tensor; por el teorema de Green, la integral de volumen puede transformarse en una de superficie. El resultado es:

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})\, dV.$$

Para que M_{ik} sea expresable como una integral sólo sobre la superficie, el segundo término debe ser idénticamente nulo, o sea, debe cumplirse que $\sigma_{ik} - \sigma_{ki} = 0$, es decir,

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \tag{2.3}$$

Llegamos así a un resultado importante: el tensor de tensiones es simétrico. El momento de las fuerzas que actúan sobre una porción del cuerpo es simplemente:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\, dV = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\, df_l. \tag{2.4}$$

Es fácil hallar el tensor de tensiones para un cuerpo que sufre una compresión uniforme en todas direcciones *(compresión hidrostática)*. En este caso, sobre cada elemento unitario de superficie actúa una presión de igual magnitud y con la dirección de la normal interior al cuerpo. Si denotamos con p esta presión, sobre el elemento $\mathrm{d}f_i$ actúa una fuerza $-p\,\mathrm{d}f_i$. Esta fuerza, en términos del tensor de tensiones, debe ser igual a $\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k$. Escribiendo $-p\,\mathrm{d}f_i = -p\,\delta_{ik}\,\mathrm{d}f_k$, vemos que el tensor de tensiones para la compresión hidrostática es

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \tag{2.5}$$

Sus componentes no nulas son simplemente iguales a la presión.

En el caso general de una deformación arbitraria, las componentes no diagonales del tensor de tensiones tendrán un valor distinto de cero. Esto significa que sobre cada elemento de superficie no sólo actuará una fuerza normal a la misma, sino que también aparecerán tensiones tangenciales « de corte ». Estas tensiones tienden a desplazar a los elementos de superficie paralelos, unos respecto de otros.

En el equilibrio, la resultante de las tensiones internas en cada elemento de volumen debe anularse, o sea, debemos tener $F_i = 0$. Las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo deformado serán entonces:

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0. \tag{2.6}$$

Si el cuerpo se halla en el campo gravitatorio, la suma $\mathbf{F}+\varrho\mathbf{g}$ de las tensiones internas y de la fuerza de gravedad ($\varrho\mathbf{g}$ por unidad de volumen) debe anularse; ϱ es la densidad (*) y $\mathbf{g}$ el vector de aceleración de la gravedad, dirigido verticalmente hacia abajo; en este caso la ecuación de equilibrio es:

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} + \varrho g_i = 0. \tag{2.7}$$

Las fuerzas externas aplicadas sobre la superficie de un cuerpo (que habitualmente son la causa de las deformaciones) aparecen en las condiciones de contorno de las ecuaciones de equilibrio. Sea $\mathbf{P}$ la fuerza externa por unidad de superficie del cuerpo; una fuerza $\mathbf{P}\,\mathrm{d}f$ actuará sobre el elemento $\mathrm{d}f$. En el equilibrio deberá ser anulada por la fuerza $-\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k$ producida por las tensiones internas que actúan sobre ese elemento de superficie. Por consiguiente, debe ser

$$P_i\,\mathrm{d}f - \sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k = 0.$$

(*) En sentido estricto, la densidad de un cuerpo cambia al deformarse. Sin embargo, para pequeñas deformaciones este efecto no tiene importancia, pues el cambio de densidad involucra cantidades pequeñas de orden superior.

Reemplazando df_k por $n_k\,df$, donde n_k es un vector unitario en la dirección de la normal externa a la superficie, obtenemos:

$$\sigma_{ik} n_k = P_i. \tag{2.8}$$

Ésta es la condición que debe satisfacerse en cada punto de la superficie de un cuerpo en equilibrio.

Obtendremos ahora una fórmula para el valor medio del tensor de tensiones de un cuerpo deformado. Para hacerlo, multiplicamos la ecuación (2,6) por x_k e integramos en todo el volumen del cuerpo:

$$\int \frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k \,\mathrm{d}V = \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k)}{\partial x_l}\,\mathrm{d}V - \int \sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l}\,\mathrm{d}V = 0.$$

La primera integral de la derecha se transforma en una integral de superficie; en la segunda integral ponemos $\dfrac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$. Resulta entonces:

$$\oint \sigma_{il} x_k \,\mathrm{d}f_l - \int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V = 0.$$

Substituyendo (2.8) en la primera integral resulta

$$\oint P_i x_k \,\mathrm{d}f = \int \sigma_{ik}\,\mathrm{d}V = V\bar{\sigma}_{ik},$$

donde V es el volumen del cuerpo, y $\bar{\sigma}_{ik}$, el valor promedio del tensor de tensiones en todo el volumen. Como $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, esta fórmula se puede escribir en la forma simétrica

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \oint (P_i x_k + P_k x_i)\,\mathrm{d}f. \tag{2.9}$$

Resulta, pues, que el valor medio del tensor de tensiones puede hallarse inmediatamente a partir de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo sin necesidad de resolver las ecuaciones de equilibrio.

§ 3. Termodinámica de las deformaciones

Consideremos un cuerpo deformado y supongamos que se varía un poco la deformación, de manera tal que el vector de desplazamiento u_i cambia en una pequeña cantidad δu_i; determinemos ahora el trabajo realizado por las tensiones internas en este cambio. Multiplicando la fuerza $F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$ por el desplazamiento δu_i e integrando en todo el volumen resulta:

$$\int \delta R \, \mathrm{d}V = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \delta u_i \, \mathrm{d}V,$$

donde δR es el trabajo realizado por las tensiones internas, por unidad de volumen. Integrando por partes, obtenemos:

$$\int \delta R \, \mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik} \delta u_i \, \mathrm{d}f_k - \int \sigma_{ik} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} \mathrm{d}V.$$

Considerando un medio ilimitado no deformado en el infinito, podemos hacer tender a infinito la superficie de integración en la primera integral; entonces sobre ella $\sigma_{ik} = 0$ y la integral se anula. La segunda integral, en virtud de la simetría del tensor σ_{ik}, puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\int \delta R \, \mathrm{d}V &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{2} \int \sigma_{ik} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \mathrm{d}V \\ &= -\int \sigma_{ik} \delta u_{ik} \, \mathrm{d}V.\end{aligned}$$

De este modo, hallamos:

$$\delta R = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}. \tag{3.1}$$

Esta fórmula nos da el trabajo realizado al variar el tensor de deformación.

Si la deformación de un cuerpo es suficientemente pequeña, éste retorna a su estado inicial cuando dejan de actuar las fuerzas externas que originaron la deformación. A este tipo de deformaciones se las llama *elásticas*. Cuando las deformaciones son grandes, al suprimir las fuerzas externas la deformación no desaparece totalmente; queda una deformación residual y el estado final del cuerpo no coincide con el estado en el cual se hallaba antes que se aplicasen las fuerzas. Estas deformaciones se conocen con el nombre de *plásticas*. A continuación, sólo estudiaremos las deformaciones elásticas.

Supondremos, además, que el proceso de deformación ocurre tan lentamente que el cuerpo está en equilibrio termodinámico con el medio exterior en todo instante. (Esta hipótesis casi siempre está justificada en la práctica.) El proceso será entonces termodinámicamente reversible.

A continuación referiremos las magnitudes termodinámicas como la entropia S, la energía interna $\mathscr{E}$ etc., a la unidad de volumen (*) (y no a la unidad de masa como en la mecánica de los fluidos) y las representaremos por letras mayúsculas.

Un cambio infinitesimal $d\mathscr{E}$ en la energía interna es igual a la diferencia entre el calor adquirido por el volumen unitario considerado y el trabajo $\mathrm{d}R$ realizado por las tensiones internas. Para un proceso reversible, la cantidad de calor es $T\mathrm{d}S$, donde T es la temperatura. Así, pues, $d\mathscr{E} = T\mathrm{d}S - \mathrm{d}R$; si utilizamos para $\mathrm{d}R$ la expresión dada por (3.1), obtenemos:

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = T\mathrm{d}S + \sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik}. \tag{3.2}$$

Esta es la relación termodinámica fundamental para cuerpos deformados.

En la compresión hidrostática, el tensor de tensiones es $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ (2.5). En este caso:

$$\sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} = -p\delta_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} = -p\,\mathrm{d}u_{ii}.$$

Hemos visto, sin embargo (v. 1.6), que la suma u_{ii} es el cambio relativo de volumen debido a la deformación. Si consideramos un volumen unitario, u_{ii} es simplemente la variación de ese volumen y $\mathrm{d}u_{ii}$ es el elemento $\mathrm{d}V$ de esta variación. La relación termodinámica toma entonces su forma habitual:

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V.$$

Introduciendo la energía libre del cuerpo $F = \mathscr{E} - TS$, escribimos la relación (3.2) en la forma:

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T + \sigma_{ik}\,\mathrm{d}u_{ik} \tag{3.3}$$

(*) Debe señalarse lo siguiente: En general el volumen unitario, antes y después de la deformación contiene diferente cantidad de materia. Nosotros referiremos siempre las magnitudes termodinámicas al volumen unitario del cuerpo no deformado; o sea, a la cantidad de materia contenida en su interior, que, a su vez, puede ocupar un volumen diferente luego de la deformación. De acuerdo con esto, por ejemplo, la energía total del cuerpo se obtiene siempre integrando $\mathscr{E}$ en el volumen del cuerpo no deformado

Finalmente, el potencial termodinámico Φ se define por

$$\Phi = \mathscr{E} - TS - \sigma_{ik}u_{ik} = F - \sigma_{ik}u_{ik}. \tag{3.4}$$

Ésta es una generalización de la expresión usual $\Phi = \mathscr{E} - TS + pV$ (*). Substituyendo (3.4) en (3.3) obtenemos:

$$d\Phi = -SdT - u_{ik}\, d\sigma_{ik}. \tag{3.5}$$

Las variables independientes en (3.2) y (3.3) son S, u_{ik} y T, u_{ik}, respectivamente. Las componentes del tensor de tensiones pueden obtenerse derivando $\mathscr{E}$ o F respecto de las componentes del tensor de deformaciones, a entropía constante o a temperatura constante, respectivamente:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial u_{ik}}\right)_S = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)_T. \tag{3.6}$$

Análogamente, derivando Φ respecto de las componentes σ_{ik}, obtenemos las componentes u_{ik}:

$$u_{ik} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ik}}\right)_T. \tag{3.7}$$

§ 4. Ley de Hooke

A fin de poder aplicar las fórmulas generales de la termodinámica a cualquier caso particular de deformación, debemos conocer la energía libre F del cuerpo como función del tensor de deformaciones. Esta expresión se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que las deformaciones son pequeñas y, de acuerdo con esto, desarrollando la energía libre en serie de potencias de u_{ik}. Por ahora, consideraremos solamente el caso de cuerpos isótropos. Los resultados correspondientes a cristales se obtendrán más adelante, en el § 10.

Al considerar un cuerpo deformado que se encuentra a cierta temperatura (la misma para todo el cuerpo), tomaremos como estado no deformado el del cuerpo en ausencia de fuerzas externas y a la misma temperatura; esta condición es necesaria teniendo en cuenta la existencia de la dilatación térmica (§ 6). Entonces, para

(*) Para la compresión hidrostática, la expresión (3.4) se convierte en $\Phi = F + pu_{ii} = F + p(V - V_0)$, donde $V - V_0$ es el cambio de volumen que resulta de la deformación. Vemos, pues, que la definición de Φ dada aquí difiere de la definición usual $\Phi = F + pV$ en la cantidad $-pV_0$.

$u_{ik} = 0$ las tensiones internas también son cero, o sea $\sigma_{ik} = 0$. Como $\sigma_{ik} = \dfrac{\partial F}{\partial u_{ik}}$, vemos que en el desarrollo en serie de F en potencias de u_{ik} no podrán aparecer términos lineales.

Además, como la energía libre es un escalar, cada término del desarrollo de F debe ser también un escalar. Con las componentes del tensor simétrico u_{ik} se pueden formar dos escalares independientes de segundo grado: éstos pueden ser, por ejemplo, el cuadrado u_{ii}^2 de la suma de los elementos diagonales y la suma u_{ik}^2 de los cuadrados de todas las componentes del tensor u_{ik}. Por consiguiente, desarrollando F en potencias de u_{ik}, tenemos, hasta el segundo orden, una expresión de la forma:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2. \tag{4.1}$$

Ésta es la expresión general para la energía libre de un cuerpo isótropo deformado. Las cantidades λ y μ se llaman *coeficientes de Lamé.*

Hemos visto en § 1 que el cambio de volumen está dado por la suma u_{ii}. Si esta suma es cero, entonces no cambia el volumen durante la deformación y sólo se produce un cambio de forma. Tales deformaciones en las que no varía el volumen, se llaman *deformaciones de corte.*

El caso opuesto es aquél en que la deformación produce un cambio de volumen, pero sin cambiar la forma del cuerpo. Cada elemento de volumen en tal deformación retiene su forma. Veremos luego que el tensor para esta deformación es u_{ik} = constante $\times\, \delta_{ik}$. Esta deformación se llama *compresión hidrostática.*

Cualquier deformación puede representarse como la suma de un corte o deslizamiento y una compresión hidrostática. Para hacerlo basta utilizar la identidad:

$$u_{ik} = (u_{ik} - \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) + \tfrac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}. \tag{4.2}$$

El primer término de la derecha es evidentemente un *corte puro*, porque la suma de sus términos diagonales es cero (recordemos que $\delta_{ii} = 3$). El segundo término es una compresión hidrostática.

Como expresión general de la energía libre de un cuerpo isótropo deformado, es conveniente reemplazar (4.1) por otra fórmula, utilizando esta descomposición de una deformación arbitraria en un corte puro y una compresión hidrostática. Tomemos como escalares independientes de segundo grado las sumas de los cuadrados de las componentes de los términos primero y segundo de (4.2). F será entonces (*):

$$F = \mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\,\delta_{ik}u_{ll}\right)^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2. \tag{4.3}$$

Los coeficientes K y μ se llaman *módulo de compresión hidrostática* y *módulo de rigidez*, respectivamente. K está relacionado con los coeficientes de Lamé por la expresión:

$$K = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu. \tag{4.4}$$

Como es sabido, en el estado de equilibrio termodinámico, la energía libre es mínima. Si no actúan fuerzas externas sobre el cuerpo, F como función de u_{ik}, debe tener un mínimo para $u_{ik} = 0$. Esto significa que la forma cuadrática (4.3) debe ser positiva. Si el tensor u_{ik} es tal que $u_{ll} = 0$, sólo queda en (4.3) el primer término; si, por otra parte el tensor es de la forma u_{ik} = constante $\times$ δ_{ik}, sólo queda el segundo término. Vemos en consecuencia que una condición necesaria (y, evidentemente, suficiente), para que la expresión (4.3) sea positiva, es que ambos coeficientes, K y μ, lo sean. Resulta, pues, que los módulos de compresión y rigidez son ambos positivos.

$$K > 0,\ \mu > 0. \tag{4.5}$$

Ahora, utilizaremos la ecuación termodinámica (3.6) para determinar el tensor de tensiones. Para calcular las derivadas $\dfrac{\partial F}{\partial u_{ik}}$ escribiremos la diferencial total dF (a temperatura constante). Tenemos:

$$\mathrm{d}F = Ku_{ll}\,\mathrm{d}u_{ll} + 2\mu(u_{ik} - \tfrac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik})\,\mathrm{d}(u_{ik} - \tfrac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik}).$$

En el segundo término, el producto del primer paréntesis por δ_{ik} es cero. con lo que resulta:

$$\mathrm{d}F = Ku_{ll}\,\mathrm{d}u_{ll} + 2\mu\left(u_{ik} - \frac{1}{3}\,u_{ll}\,\delta_{ik}\right)\mathrm{d}u_{ik}$$

o, reemplazando du_{ll} por δ_{ik} du_{ik},

(*) El término constante F_0 es la energía libre del cuerpo no deformado y no presenta particular interés. Por simplicidad, lo omitiremos y tomaremos para F la energía libre de la deformación o, como suele llamársela, la energía libre elástica.