Física Teórica

Landau \ Lifshitz

MECÁNICA DE FLUIDOS

Volumen 6

EDITORIAL REVERTÉ

Academia de Ciencias, U.R.S.S.

Landau \ Lifshitz

Física Teórica

MECÁNICA DE FLUIDOS

Volumen 6

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА.
Т. VI. Гидродинамика

Edición original en lengua rusa publicada por
MEZHDUNARODNAYA KNIGA, MOSCOU

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1986
ISBN - 978-84-291-4087-3 Tomo 6
ISBN - 978-84-291-4080-4 Obra completa

Edición en e-book:
© Editorial Reverté, S. A., 2021
ISBN 978-84-291-9057-1

Verslón española por el
Prof. Dr. J. Aguilar Peris
Catedrático de Termología
Facultad de Física de la Universidad Complutense de Madrid

y el

Prof. Dr. J. de la Rubia Pacheco
Catedrático de Mecánica Estadística
Facultad de Física de la Universidad de Valencia

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
e-mail: reverte@reverte.com
www.reverte.com

PREFACIO A LA EDICIÓN INGLESA

Este libro tiene por objeto el estudio de la mecánica de fluidos, es decir, la teoría del movimiento de los líquidos y los gases.

La naturaleza del libro viene determinada ampliamente por el hecho de que describe la mecánica de fluidos como una rama de la física teórica y, por tanto, es notablemente diferente de otros libros de texto escritos sobre el mismo tema. Hemos intentado desarrollar al máximo posible todas las materias de interés físico y hacerlo de modo que nos ofrezcan la imagen más clara posible de los fenómenos y sus interrelaciones. En consecuencia, no discutiremos métodos aproximados de cálculo en mecánica de fluidos, ni teorías empíricas desprovistas de significado físico. Por otra parte, se tratan algunos tópicos que no se encuentran habitualmente en textos de esta materia: la teoría de la transmisión y difusión del calor en fluidos; acústica; la teoría de la combustión; la dinámica de los superfluidos, y la dinámica relativista de fluidos.

En este campo de la mecánica de fluidos, tan extensamente estudiado, es inevitable que hayan aparecido nuevos resultados durante los últimos años desde que se publicó la última edición rusa. Es lamentable que nuestra preocupación por otras materias nos haya impedido su inclusión en la edición inglesa. Simplemente hemos añadido un capítulo más sobre la teoría general de fluctuaciones en dinámica de fluidos.

Agradecemos a los Dres. Sykes y Reid la excelente versión inglesa del libro y a Pergamon Press su conformidad respecto a diferentes cuestiones relacionadas con la publicación.

Moscú

L. D. LANDAU
E. M. LIFSHITZ

NOTACIÓN

ρ densidad
p presión
T temperatura
s entropía por unidad de masa
ϵ energía interna por unidad de masa
$w = \epsilon + p/\rho$ entalpía
$\gamma = c_p/c_v$ cociente entre los calores específicos a presión constante y a volumen constante
η viscosidad dinámica
$\nu = \eta/\rho$ viscosidad cinemática
κ conductividad térmica
$\chi = \kappa/\rho c_p$ conductividad termométrica
R número de Reynolds
c velocidad del sonido
M cociente entre la velocidad del fluido y la del sonido

Índice analítico

III. Turbulencia

IV. Capas límites

V. Conducción térmica en los fluidos

VI. Difusión

VII. Fenómenos superficiales

VIII. Sonido

IX. Ondas de choque

X. Flujo gaseoso monodimensional

XI. Intersección de superficies de discontinuidad

XII. Flujo gaseoso bidimensional

XIII. Flujo que rodea a cuerpos finitos

XIV. Dinámica de fluidos de la combustión

CAPÍTULO I

FLUIDOS IDEALES

§ 1. Ecuación de continuidad

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina *dinámica de fluidos*. Puesto que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son macroscópicos, un fluido se considera como un medio continuo. Esto significa que siempre se supone que cualquier elemento de volumen pequeño del fluido es suficientemente grande para contener un número muy elevado de moléculas. De acuerdo con ello, cuando hablamos de elementos de volumen infinitamente pequeños, siempre queremos significar aquellos que son «físicamente» infinitamente pequeños, es decir, muy pequeños en comparación con el volumen del cuerpo o sistema en consideración, pero grandes comparados con las distancias entre las moléculas. En un sentido semejante han de entenderse las expresiones *partícula de fluido* y *punto en un fluido*. Si, por ejemplo, hablamos del desplazamiento de alguna partícula fluida, no entendemos entonces el desplazamiento de una molécula individual, sino el de un elemento de volumen que contiene muchas moléculas aunque siga considerándose como un punto.

La descripción matemática del estado de un fluido móvil se efectúa con funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$ y de dos magnitudes termodinámicas cualesquiera que pertenezcan al fluido, por ejemplo, la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad $\rho(x, y, z, t)$. Como es bien conocido, todas las magnitudes termodinámicas quedan determinadas dados los valores de dos cualesquiera de ellas junto con la ecuación de estado; de aquí que si se tienen cinco magnitudes determinadas, a saber las tres componentes de la velocidad $\mathbf{v}$, la presión p y la densidad ρ, queda totalmente determinado el estado del fluido en movimiento.

En general, todas estas magnitudes son funciones de las coordenadas x, y, z y del tiempo t. También resaltamos que $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ es la velocidad del fluido en un punto determinado (x, y, z) del espacio y en un instante determinado t; es decir, se refiere a puntos fijos en el espacio y no a partículas fijas del fluido; en el curso del tiempo, estas últimas se estarán moviendo en el espacio. Lo mismo hay que señalar respecto a ρ y p.

Deduciremos a continuación las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos. Empezaremos con la ecuación que expresa la conservación de la materia. Consideremos un cierto volumen V_0 del espacio. La masa de fluido contenida en este volumen es $\int \rho\, dV$, siendo ρ la densidad del fluido y realizándose la integración respecto al volumen V_0. La masa del fluido que circula por unidad de tiempo a través de un elemento $\mathbf{df}$ de la superficie que limita a este volumen es $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{df}$; el módulo del vector $\mathbf{df}$ es igual al área del elemento superficial y su dirección coincide con la normal a la misma. Por convenio, consideraremos que $\mathbf{df}$ tiene el sentido normal hacia fuera. Entonces, $\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{df}$ es positivo si el fluido está saliendo del volumen y negativo si el flujo es hacia el interior del mismo. La masa total de fluido que sale del volumen V_0 en la unidad de tiempo es, por consiguiente,

$$\oint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{df},$$

en donde la integración se extiende a la totalidad de la superficie cerrada que limita el volumen en cuestión.

A continuación, puede escribirse la disminución de la masa del fluido en el volumen V_0 por unidad de tiempo, como

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV.$$

Igualando ambas expresiones, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV = -\oint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{df}. \tag{1.1}$$

La integral de superficie puede transformarse mediante la fórmula de Green en una integral de volumen:

$$\oint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{df} = \int \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\, dV.$$

Así pues,

$$\int \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right] dV = 0.$$

Como esta ecuación debe ser válida para cualquier volumen, el integrando debe anularse, es decir,

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{1.2}$$

Esta es la denominada *ecuación de continuidad*. Desarrollando la expresión div ($\rho\mathbf{v}$), podemos también escribir (1.2) como

$$\partial\rho/\partial t+\rho \operatorname{div} \mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,\rho = 0. \tag{1.3}$$

El vector

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \tag{1.4}$$

se denomina *densidad de flujo másico*. Su dirección es la del movimiento del fluido, mientras que su valor o módulo es igual a la masa del fluido que circula por la unidad de tiempo a través de la unidad de área perpendicular a la velocidad.

§ 2. Ecuación de Euler

Consideremos cierto volumen del fluido. La fuerza total que actúa sobre el mismo es igual a la integral

$$-\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{f}$$

de la presión, extendida a la superficie que limita el volumen. Transformándola en una integral de volumen, tenemos

$$-\oint p\,\mathrm{d}\mathbf{f} = -\int \mathbf{grad}\,p\,\mathrm{d}V.$$

Como puede verse, el fluido que rodea a cualquier elemento de volumen $\mathrm{d}V$ ejerce sobre el mismo una fuerza $-\mathrm{d}V\,\mathbf{grad}\,p$. En otras palabras, podemos decir que sobre la unidad de volumen del fluido actúa una fuerza $-\mathbf{grad}\,p$.

A continuación podemos escribir la ecuación del movimiento de un elemento de volumen del fluido igualando la fuerza $-\mathbf{grad}\,p$ al producto de la masa por unidad de volumen (ρ) por la aceleración $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$:

$$\rho\,\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = -\mathbf{grad}\,p. \tag{2.1}$$

La derivada $\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$ que aparece aquí designa, no la variación respecto al tiempo de la velocidad del fluido en un punto fijo del espacio, sino la variación respecto al tiempo de la velocidad de una partícula fluida determinada cuando se mueve en el espacio. Esta derivada ha de expresarse en función de magnitudes que se refieren a puntos fijos en el espacio. Para ello observemos que la variación $\mathrm{d}\mathbf{v}$ de la velocidad de la partícula fluida dada durante el tiempo $\mathrm{d}t$ se descompone en dos partes, a saber, la variación durante $\mathrm{d}t$ de la velocidad en un punto fijo del espacio y la diferencia entre las velocidades (en el mismo instante) en dos puntos separados $\mathrm{d}\mathbf{r}$, siendo $\mathrm{d}\mathbf{r}$ la distancia recorrida por la partícula de fluido dada durante el tiempo $\mathrm{d}t$. La primera parte es $(\partial\mathbf{v}/\partial t)\mathrm{d}t$, en donde se considera que la derivada $\partial\mathbf{v}/\partial t$ corresponde a valores x, y, z constantes, es decir, a un punto determinado de espacio. La segunda parte es

$$\mathrm{d}x\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathrm{d}z\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = (\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}.$$

Así pues,

$$\mathrm{d}\mathbf{v} = (\partial\mathbf{v}/\partial t)\mathrm{d}t + (\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v},$$

o sea, dividiendo ambos miembros por dt,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}. \tag{2.2}$$

Sustituyendo esta expresión en (2.1), nos encontramos con

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\,p. \tag{2.3}$$

Esta es la ecuación requerida del movimiento del fluido. Fue obtenida por primera vez por L. EULER en 1755. Se denomina *ecuación de Euler* y es una de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos.

Si el fluido está en el interior de un campo gravitatorio, sobre cualquier volumen unidad actúa una fuerza adicional $\rho\mathbf{g}$, siendo $\mathbf{g}$ la aceleración debida a la gravedad. Esta fuerza debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (2.1), de modo que la ecuación (2.3) toma la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{\mathbf{grad}\,p}{\rho} + \mathbf{g}. \tag{2.4}$$

Al deducir las ecuaciones del movimiento no hemos tenido en cuenta los procesos de disipación de energía que pueden producirse en un fluido en movimiento como consecuencia de la fricción o rozamiento interno (viscosidad) del fluido y el intercambio térmico entre las diferentes partes del mismo. La totalidad del análisis realizado en ésta y en las secciones siguientes de este capítulo es válida, por consiguiente, sólo en el caso de movimientos de fluidos en los que carecen de importancia la conductividad térmica y la viscosidad; dichos fluidos se denominan *ideales*.

La ausencia de intercambio térmico entre las diferentes partes del fluido (y también, como es natural, entre el fluido y los cuerpos que lo rodean) significa que el movimiento a través del fluido es adiabático. Así pues, el movimiento de un fluido ideal debe suponerse necesariamente que es adiabático.

En el movimiento adiabático la entropía de una partícula cualquiera del fluido permanece constante cuando dicha partícula se mueve en el espacio.

Designando por s la entropía por unidad de masa, podemos expresar la condición correspondiente al movimiento adiabático como

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 0, \tag{2.5}$$

en donde la derivada total respecto al tiempo designa, como en (2.1), la variación respecto al tiempo de la entropía para una partícula fluida determinada cuando ésta se mueve. Dicha condición puede escribirse también

$$\partial s/\partial t + \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\, s = 0. \tag{2.6}$$

Esta ecuación es la que de modo general describe el movimiento adiabático de un fluido ideal. Utilizando (1.2), podemos escribirla como una «ecuación de continuidad» correspondiente a la entropía:

$$\partial(\rho s)/\partial t + \mathrm{div}\,(\rho s\mathbf{v}) = 0. \tag{2.7}$$

El producto $\rho s\mathbf{v}$ es la «densidad de flujo de entropía».

Conviene recordar que la ecuación adiabática normalmente puede ponerse en una forma mucho más sencilla. Si, como suele suceder, la entropía es constante a través del volumen del fluido en un instante inicial determinado, sigue manteniendo el mismo valor constante en todo instante durante cualquier movimiento subsiguiente del fluido. En este caso podemos escribir la ecuación adiabática simplemente como:

$$s = \text{constante}, \tag{2.8}$$

que es lo que haremos normalmente en adelante. Dicho movimiento se dice, entonces, que es *isoentrópico*.

Podemos utilizar el hecho de que el movimiento es isoentrópico para poner la ecuación del movimiento (2.3) en una forma ligeramente distinta. Para ella emplearemos la familiar relación termodinámica

$$\mathrm{d}w = T\,\mathrm{d}s + V\,\mathrm{d}p,$$

en donde w es la entalpía* por unidad de masa de fluido, $V = 1/\rho$ el volumen específico y T la temperatura. Puesto que $s =$ constante, tenemos simplemente

$$\mathrm{d}w = V\,\mathrm{d}p = \mathrm{d}p/\rho,$$

y, por tanto, $(\mathbf{grad}\, p)/\rho = \mathbf{grad}\, w$. Por consiguiente, la ecuación (2.3) puede escribirse en la forma

$$\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\, w. \tag{2.9}$$

* N. del T. — Habitualmente la entalpía se representa por la letra H (o h si es por unidad de masa).

Es interesante señalar otra forma que puede adquirir la ecuación de Euler, en la cual interviene sólo la velocidad. Utilizando una fórmula bien conocida en el análisis vectorial,

$$\tfrac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,v^2 = \mathbf{v}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v},$$

podemos escribir (2.9) en la forma

$$\partial\mathbf{v}/\partial t+\tfrac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,v^2-\mathbf{v}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,w. \tag{2.10}$$

Si tomamos el rotacional de ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v}) = \ \mathbf{rot}\ (\mathbf{v}\times\ \mathbf{rot}\ \mathbf{v}), \tag{2.11}$$

en la que interviene sólo la velocidad.

Las ecuaciones del movimiento han de suplementarse con las condiciones límites que deben ser satisfechas en las superficies que limitan el fluido. En el caso de un fluido ideal la condición límite expresa simplemente que el fluido no puede penetrar en una superficie sólida. Esto significa que la componente de la velocidad del fluido normal a la superficie límite debe anularse si dicha superficie está en reposo:

$$v_n = 0. \tag{2.12}$$

En el caso general de una superficie móvil, v_n debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

En una superficie límite entre dos fluidos inmiscibles, la condición es que la presión y la componente de velocidad normal a la superficie de separación debe ser la misma para ambos fluidos y cada una de estas componentes de velocidad debe ser igual a la componente correspondiente de la velocidad de la superficie.

Como se ha dicho al principio del § 1, el estado de un fluido móvil queda determinado por cinco magnitudes: las tres componentes de la velocidad $\mathbf{v}$ y, por ejemplo, la presión p y la densidad ρ. De acuerdo con esto, un sistema completo de ecuaciones de la dinámica de fluidos deberá tener un número de cinco ecuaciones. En el caso de un fluido ideal éstas son las ecuaciones de Euler, la ecuación de continuidad y la ecuación adiabática.

PROBLEMA

Escribir las ecuaciones del movimiento monodimensional de un fluido ideal en función de las variables a, t, siendo a (denominada *variable lagrangiana*†) la cordenada x de una partícula fluida en un momento determinado $t = t_0$.

† Aunque estas variables suelen denominarse *lagrangianas*, debemos mencionar que las ecuaciones del movimiento en estas coordenadas fueron obtenidas en primer lugar por Euler, al mismo tiempo que las ecuaciones (2.3).

Solución. Con estas variables la coordenada x de una partícula fluida cualquiera en un instante también cualquiera se considera como una función de t y de su coordenada a en el instante inicial: $x = x(a, t)$. La condición de conservación de masa durante el movimiento de un elemento de fluido (ecuación de continuidad) se escribe de acuerdo con ello, $\rho\, dx = \rho_0\, da$, o sea,

$$\rho\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = \rho_0,$$

en donde $\rho_0(a)$ es una distribución de densidad inicial determinada. La velocidad de una partícula fluida es, por definición, $v = (\partial x/\partial t)_a$, y la derivada $(\partial v/\partial t)_a$ da la variación respecto al tiempo de la velocidad de la partícula durante su movimiento. La ecuación de Euler se reduce entonces a

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_a = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_t,$$

y la ecuación adiabática es

$$(\partial s/\partial t)_a = 0.$$

§ 3. Hidrostática

En el caso de un fluido en reposo dentro de un campo gravitatorio uniforme, la ecuación de Euler (2.4) toma la forma

$$\mathbf{grad}\, p = \rho \mathbf{g}. \tag{3.1}$$

Esta ecuación describe el equilibrio mecánico del fluido. (Si no existe ninguna fuerza externa, la ecuación del equilibrio es simplemente $\mathbf{grad}\, p = 0$, es decir, $p =$ constante; la presión es la misma en todos los puntos del fluido.)

La ecuación (3.1) puede integrarse inmediatamente si la densidad del fluido puede suponerse constante a través de todo su volumen, es decir, si no existe ninguna compresión significativa del fluido bajo la acción de la fuerza exterior. Tomando el eje z vertical y hacia arriba, tenemos

$$\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0, \qquad \partial p/\partial z = -\rho g.$$

De aquí

$$p = -\rho g z + \text{constante}.$$

Si el fluido en reposo tiene una superficie libre a una altura h, en la cual se aplica una presión externa p_0, que es la misma en todos sus puntos, dicha superficie debe estar en el plano horizontal $z = h$. A partir de la condición $p = p_0$ para $z = h$, encontramos que la constante es $p_0 + \rho g h$, de modo que

$$p = p_0 + \rho g(h - z). \tag{3.2}$$

En el caso de masas grandes de líquido, y para un gas, la densidad ρ no puede, en general, suponerse constante; esto se aplica especialmente en los gases (por ejemplo, la atmósfera). Supongamos que el fluido no solamente está en equilibrio mecánico, sino también en equilibrio térmico. Entonces, la temperatura es la misma en todos su puntos y la ecuación (3.1) puede integrarse del modo siguiente. Utilizamos la relación termodinámica familiar

$$d\Phi = -s dT + V dp,$$

en donde Φ es el potencial termodinámico por unidad de masa.(*) En el caso de temperatura constante

$$d\Phi = V dp = dp/\rho.$$

Es fácil ver que la expresión $(\mathbf{grad}\, p)/\rho$ puede escribirse en este caso como $\mathbf{grad}\, \Phi$, de modo que la ecuación de equilibrio (3.1) toma la forma

$$\mathbf{grad}\, \Phi = \mathbf{g}.$$

En el caso de un vector constante $\mathbf{g}$ dirigido a lo largo del eje z negativo tenemos

$$\mathbf{g} \equiv -\mathbf{grad}(gz).$$

Así pues,

$$\mathbf{grad}(\Phi + gz) = 0,$$

De aquí resulta que en todo el fluido

$$\Phi + gz = \text{constante}; \tag{3.3}$$

gz es la energía potencial de la unidad de masa de fluido en el campo gravitatorio. La condición (3.3) resulta de la física estadística aplicada al equilibrio termodinámico de un sistema en un campo externo.

Podemos mencionar aquí otra consecuencia sencilla de la ecuación (3.1). Si un fluido (como la atmósfera) está en equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, la presión en él puede ser una función sólo de la altura z (puesto que, si la presión fuese diferente en los distintos puntos con la misma altitud, no estaría en equilibrio). Así resulta a partir de (3.1) que la densidad

$$\rho = -\frac{1}{g}\frac{dp}{dz} \tag{3.4}$$

es también sólo una función de z. La presión y la densidad juntas determinan la temperatura, que es, por tanto, de nuevo una función exclusiva de z. Así pues, en el equilibrio mecánico dentro de un campo gravitatorio, las distribuciones de presión, densidad y temperatura dependen sólo de la altura.

(*) N. del T. Este potencial suele representarse con el símbolo G en la mayor parte de los textos de termodinámica y se denomina potencial de Gibbs o entalpía libre.

Si, por ejemplo, la temperatura es distinta en los diferentes puntos que tienen la misma altitud, entonces es imposible el equilibrio mecánico.

Finalmente, deduciremos la ecuación de equilibrio para una masa muy grande de fluido, cuyas partes separadas se mantienen reunidas por la atracción gravitatoria — como una estrella. Sea ϕ el potencial gravitatorio newtoniano del campo debido al fluido. Éste satisface la ecuación diferencial

$$\triangle\phi = 4\pi G\rho, \tag{3.5}$$

en donde G es la constante de Newton de la gravitación. La aceleración gravitatoria es $-\mathbf{grad}\,\phi$ y la fuerza sobre una masa ρ es $-\rho\,\mathbf{grad}\,\phi$. La condición del equilibrio es, por tanto,

$$\mathbf{grad}\,p = -\rho\,\mathbf{grad}\,\phi.$$

Dividiendo ambos miembros por ρ, tomando la divergencia de ambos miembros y utilizando la ecuación (3.5), obtenemos

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\,p\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.6}$$

Debe resaltarse que el estudio actual se refiere sólo al equilibrio mecánico; la ecuación (3.6) no presupone la existencia de un equilibrio térmico completo.

Si el cuerpo no está girando, será esférico cuando esté en equilibrio y las distribuciones de densidad y de presión tendrán simetría esférica. La ecuación (3.6) toma entonces la forma en coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi G\rho. \tag{3.7}$$

§ 4. Caso en que la convección está ausente

Un fluido puede estar en equilibrio mecánico (es decir, no presentar ningún movimiento macroscópico) sin estar en equilibrio térmico. La ecuación (3.1), que es la condición para el equilibrio mecánico, puede satisfacerse aunque la temperatura no sea constante en todo el seno del fluido. Sin embargo, la cuestión que entonces se plantea es la estabilidad de dicho equilibrio. Se encuentra que el equilibrio es estable sólo cuando se cumplen determinadas condiciones. En otro caso, el equilibrio es inestable y esto conduce a la aparición de corrientes en el fluido que tienden a mezclar dicho fluido, de modo tal que se llegue a igualar la temperatura. Este movimiento se denomina *convección.* Así pues, la condición para que un equilibrio mecánico sea estable es la ausencia de convección. Esta puede deducirse del modo siguiente.

Consideremos un elemento fluido a una altura z con un volumen específico $V(p, s)$, en donde p y s son la presión y entropía de equilibrio a la altura z. Supongamos que este elemento fluido sufre un desplazamiento adiabático hacia arriba a lo largo de un pequeño intervalo ξ; su volumen específico se transforma entonces en $V(p', s)$, en donde p' es la presión a la altura $z + \xi$. Para que el equilibrio sea estable, es necesario (aunque no suficiente, en general) que la fuerza resultante sobre el elemento tienda a devolverlo a su posición original. Esto significa que el elemento debe ser más pesado que el fluido que «desplaza» en su nueva posición. El volumen específico de este último es $V(p', s')$, siendo s' la entropía de equilibrio a la altura $z + \xi$. Así pues, tenemos la condición de estabilidad

$$V(p', s') - V(p', s) > 0.$$

Desarrollando esta diferencia en potencias de $s' - s = \xi \mathrm{d}s/\mathrm{d}z$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} > 0. \tag{4.1}$$

Las fórmulas de la termodinámica dan

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_p = \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

en donde c_p es el calor específico a presión constante. Tanto c_p como T son positivos, de modo que (4.1) puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} > 0. \tag{4.2}$$

La mayoría de las sustancias se dilatan al calentarse, es decir, $(\partial V/\partial T)_p > 0$. La condición de que esté ausente la convección se reduce entonces a

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}z > 0, \tag{4.3}$$

es decir, la entropía debe aumentar con la altura.

A partir de este resultado encontramos con facilidad la condición que debe ser satisfecha por el gradiente de temperaturas $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z$. Desarrollando la derivada $\mathrm{d}s/\mathrm{d}z$, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{c_p}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} > 0.$$

Finalmente, sustituyendo la expresión dada por (3.4) $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -g/V$, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} > -\frac{gT}{c_p V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{4.4}$$

Puede producirse la convección si la temperatura disminuye al aumentar la altura y el valor del gradiente de temperaturas excede a $(gT/c_pV)(\partial V/\partial T)_p$.

Si consideramos el equilibrio de una columna de un gas perfecto, entonces

$$(T/V)(\partial V/\partial T)_p = 1,$$

y la condición correspondiente al equilibrio estable es simplemente

$$\mathrm{d}T/\mathrm{d}z > -g/c_p. \tag{4.5}$$

§ 5. Ecuación de Bernoulli

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos se ven grandemente simplificadas en el caso de flujo estacionario. Entendemos por *flujo estacionario* aquél en el cual la velocidad es constante en el tiempo en cada punto ocupado por el fluido. En otras palabras, $\mathbf{v}$ es una función sólo de las coordenadas, de modo que $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$. La ecuación (2.10) se reduce entonces a

$$\tfrac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,v^2 - \mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v} = -\mathbf{grad}\,w. \tag{5.1}$$

Introduzcamos ahora el concepto de *línea de corriente*. Estas líneas tienen la propiedad de que la tangente a ellas en cualquier punto indica la dirección de la velocidad en dicho punto; quedan determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x} = \frac{\mathrm{d}y}{v_y} = \frac{\mathrm{d}z}{v_z}. \tag{5.2}$$

En el caso de flujo estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, coincidiendo con las trayectorias de las partículas fluidas. En el flujo no estacionario deja de cumplirse esta coincidencia: las tangentes a las líneas de corrientes dan las direcciones de las velocidades de las partículas fluidas en diversos puntos del espacio en un instante dado, mientras que las tangentes a las trayectorias indican las direcciones de las velocidades de las partículas de fluido dadas en distintos instantes de tiempo.

Formemos el producto escalar de la ecuación (5.1) con el vector unitario tangente a la línea de corriente en cada punto; designaremos este vector unidad por $\mathbf{l}$. La proyección del gradiente en cualquier dirección es, como sabemos, la derivada en dicha dirección. De aquí que la proyección de $\mathbf{grad}\,w$ sea $\partial w/\partial l$. El vector $\mathbf{v}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$, y su proyección en la dirección de $\mathbf{l}$, por tanto, es cero.

Así pues, obtenemos a partir de la ecuación (5.1)

$$\frac{\partial}{\partial l}(\tfrac{1}{2}v^2 + w) = 0.$$

Se deduce a partir de esta expresión que $\frac{1}{2}v^2 + w$ es constante a lo largo de una línea de corriente:

$$\tfrac{1}{2}v^2 + w = \text{constante}. \tag{5.3}$$

En general, la constante toma valores diferentes para las distintas líneas de corriente. La ecuación (5.3) se denomina *ecuación de Bernoulli.*

Si el flujo tiene lugar en un campo gravitatorio, la aceleración **g** debida a la gravedad debe sumarse al segundo miembro de la ecuación (5.1). Consideremos que la dirección de la gravedad es el eje z, creciendo z en el sentido hacia arriba. Entonces, el coseno del ángulo formado por las direcciones de **g** y **l** es igual a la derivada $-\mathrm{d}z/\mathrm{d}l$, de modo que la proyección de **g** sobre **l** es

$$-g\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}l.$$

De acuerdo con esto, tenemos ahora

$$\frac{\partial}{\partial l}(\tfrac{1}{2}v^2+w+gz) = 0.$$

Así pues, la ecuación de Bernoulli tiene la siguiente expresión a lo largo de una línea de corriente

$$\tfrac{1}{2}v^2+w+gz = \text{constante.} \tag{5.4}$$

§ 6. Flujo de energía

Escojamos un elemento de volumen cualquiera fijo en el espacio y veamos cómo varía con el tiempo la energía del fluido contenido dentro de este elemento de volumen. La energía de la unidad de volumen de fluido es

$$\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon,$$

en donde el primer término es la energía cinética y el segundo la energía interna, siendo ϵ la energía interna por unidad de masa. La variación de esta energía viene dada por la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2+\rho\epsilon).$$

Para calcular esta magnitud escribamos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = \tfrac{1}{2}v^2\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t},$$

o bien, utilizando la ecuación de continuidad (1.2) y la ecuación del movimiento (2.3),

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = -\tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p-\rho\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}.$$

En el último término sustituiremos $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}$ por $\tfrac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,v^2$ y $\mathbf{grad}\,p$ por $\rho\,\mathbf{grad}\,w - \rho T\,\mathbf{grad}\,s$ [utilizando la relación termodinámica $\mathrm{d}w = T\mathrm{d}s + (1/\rho)\mathrm{d}p$], con lo que se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2) = -\tfrac{1}{2}v^2\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v})-\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,(\tfrac{1}{2}v^2+w)+\rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s.$$

Con objeto de transformar la derivada $\partial(\rho\epsilon)/\partial t$, utilizaremos la relación termodinámica

$$d\epsilon = Tds - pdV = Tds + (p/\rho^2)d\rho.$$

Puesto que $\epsilon + p/\rho = \epsilon + pV$ es simplemente la función entalpía w por unidad de masa, encontramos que

$$d(\rho\epsilon) = \epsilon d\rho + \rho d\epsilon = wd\rho + \rho Tds,$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t} = w\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho T\frac{\partial s}{\partial t} = -w\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) - \rho T\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,s.$$

También hemos utilizado aquí la ecuación adiabática general (2.6).

Combinando los resultados anteriores, encontramos que la variación de energía es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -(\tfrac{1}{2}v^2 + w)\,\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) - \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}(\tfrac{1}{2}v^2 + w),$$

o sea, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) = -\mathrm{div}\,[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w)]. \tag{6.1}$$

Con objeto de ver el significado de esta ecuación, integrémosla respecto a un determinado volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon)\,dV = -\int \mathrm{div}\,[\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w)]\,dV,$$

o bien, convirtiendo la integral de volumen en el segundo miembro en una integral de superficie,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon)\,dV = -\oint \rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w)\cdot d\mathbf{f}. \tag{6.2}$$

El primer miembro es la variación por unidad de tiempo de la energía del fluido en un volumen determinado. El segundo miembro es, por consiguiente, la cantidad de energía que fluye hacia el exterior de este volumen en la unidad de tiempo. De aquí que la expresión

$$\rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2 + w) \tag{6.3}$$

pueda denominarse vector *densidad de flujo de energía*. Su módulo es la cantidad de energía que pasa en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular a la dirección de la velocidad.

La expresión (6.3) muestra que cualquier masa unitaria de fluido lleva consigo durante su movimiento una cantidad de energía $w + \frac{1}{2}v^2$. El hecho de que la entalpía w aparezca aquí en lugar de la energía ϵ, tiene un significado físico sencillo. Haciendo $w = \epsilon + p/\rho$, podemos escribir el flujo de energía a través de una superficie cerrada en la forma

$$-\oint \rho\mathbf{v}(\tfrac{1}{2}v^2+\epsilon)\cdot d\mathbf{f} - \oint p\mathbf{v}\cdot d\mathbf{f}.$$

El primer término es la energía (cinética más interna) transportada por la masa de fluido a través de la superficie en la unidad de tiempo. El segundo término es el trabajo realizado por la fuerza de presión sobre el fluido dentro de la superficie.

§ 7. Flujo del impulso

Consideremos ahora una serie semejante de razonamientos para el impulso o cantidad de movimiento del fluido. El impulso por unidad de volumen es $\rho\mathbf{v}$. Determinemos su variación respecto al tiempo, $\partial(\rho\mathbf{v})/\partial t$. Para ello utilizaremos la notación tensorial.† Tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t}v_i.$$

Utilizando la ecuación de continuidad (1.2) [con div $(\rho\mathbf{v})$ escrita en la forma $\partial(\rho v_k)/\partial x_k$]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k},$$

y la ecuación de Euler (2.3) en la forma

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i},$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k).$$

† Los sufijos latinos i, k, ..., toman los valores 1, 2, 3, correspondientes a los componentes de los vectores y tensores a lo largo de los ejes x, y, z, respectivamente. Escribiremos las sumas del tipo $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = \Sigma A_iB_i$ en la forma A_iB_i simplemente, omitiendo el signo de la suma. Utilizaremos un procedimiento semejante en todos los productos en los que intervengan vectores o tensores: se debe sobreentender siempre la suma respecto a los valores 1, 2, 3, cuando aparezca duplicado un sufijo latino en un término cualquiera. Dichos sufijos, a veces, se denominan *mudos*. Al trabajar con sufijos mudos debe recordarse que puede sustituirse cualquier par de dichos sufijos por otro par de letras semejantes, ya que la notación utilizada en el caso de sufijos que pueden tomar todos sus valores posibles no influye evidentemente sobre el valor de la suma.

Escribiremos el primer término del segundo miembro en la forma†

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k},$$

y se obtiene, finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \tag{7.1}$$

viniendo definido el tensor Π_{ik} como

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \tag{7.2}$$

Este tensor es claramente simétrico.

Para ver el significado del tensor Π_{ik}, integremos la ecuación (7.1) respecto a un volumen determinado:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, \mathrm{d}V = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}V.$$

La integral del segundo miembro se transforma en una integral de superficie mediante la fórmula de Green: ‡

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i \, \mathrm{d}V = -\oint \Pi_{ik} \, \mathrm{d}f_k. \tag{7.3}$$

El primer miembro es la variación respecto al tiempo de la componente i del impulso contenido en el volumen considerado. La integral de superficie del segundo miembro es, por consiguiente, la cantidad de impulso que fluye hacia fuera a través de la superficie límite en la unidad de tiempo. En consecuencia, $\Pi_{ik}\mathrm{d}f_k$ es la componente i del impulso que fluye a través del elemento superficial $\mathrm{d}f$. Si escribimos $\mathrm{d}f_k$ en la forma $n_k \, \mathrm{d}f$, siendo $\mathrm{d}f$ el área del elemento superficial y $\mathbf{n}$ un vector unidad a lo largo de la normal y dirigido hacia fuera, veremos que $\Pi_{ik}n_k$ es el flujo de la componente i del impulso a través del área superficial unidad. Podemos observar, además, que, de acuerdo con (7.2), $\Pi_{ik}n_k = pn_i + \rho v_i v_k n_k$. Esta expresión puede escribirse en forma vectorial

$$p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}). \tag{7.4}$$

Así pues, Π_{ik} es la componente i de la cantidad de impulso que fluye en la unidad de tiempo a través del área unidad perpendicular al eje x_k. El

† δ_{ik} designa el tensor unidad, es decir, el tensor con componentes que son la unidad para $i = k$ y cero para $i \neq k$. Es evidente que $\delta_{ik}A_k = A_i$, siendo A_i un vector cualquiera. Análogamente, si A_{kl} es un tensor de rango dos, tenemos las relaciones $\delta_{ik}A_{kl} = A_{il}$, $\delta_{ik}A_{ik} = A_{ii}$, y así sucesivamente.

‡ La regla para transformar una integral extendida a una superficie cerrada en otra aplicada al volumen limitado por dicha superficie puede formularse así: debe sustituirse el elemento de superficie df_i por el operador $\mathrm{d}V \cdot \partial/\partial x_i$, que ha de aplicarse a la totalidad del integrando.

tensor Π_{ik} se denomina *tensor de densidad de flujo de impulso*. El flujo de energía queda determinado por un vector, siendo la energía un escalar; sin embargo, el flujo de impulso viene determinado por un tensor de orden dos, puesto que el propio impulso es un vector.

El vector (7.4) da el flujo de impulso en la dirección de **n**, es decir, a través de una superficie perpendicular a **n**. En particular, tomando el vector unidad **n** dirigido paralelamente a la velocidad del fluido, veremos que sólo la componente longitudinal del impulso se ve transportada en dicha dirección y su densidad de flujo es $p + \rho v^2$. En una dirección perpendicular a la velocidad, sólo se transporta la componente transversal (relativa a **v**) del impulso, siendo su densidad de flujo exactamente p.

§ 8. Conservación de la circulación

La integral

$$\Gamma = \oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l},$$

extendida a lo largo de cierto contorno cerrado se denomina *circulación de la velocidad* alrededor de dicho contorno.

Consideremos un contorno cerrado dibujado en el fluido en un instante determinado. Supongamos que sea un «contorno fluido», es decir, compuesto por partículas fluidas que están sobre él mismo. En el curso del tiempo estas partículas se mueven y el contorno se mueve con ellas. Investiguemos lo que le ocurre a la circulación de la velocidad. En otras palabras, calculemos la derivada respecto al tiempo

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l}.$$

Hemos escrito aquí la derivada total respecto del tiempo, puesto que estamos buscando la variación de la circulación a lo largo de un «contorno fluido» cuando éste se mueve y no a lo largo de un contorno fijo en el espacio.

Para evitar confusiones, designaremos temporalmente la derivación respecto a las coordenadas mediante el símbolo δ, manteniendo el símbolo d para la derivación respecto al tiempo. A continuación, observemos que un elemento $d\mathbf{l}$ de la longitud del contorno puede escribirse como la diferencia $\delta\mathbf{r}$ entre los radios vectores **r** de los puntos situados en los extremos del elemento. Así pues, escribamos la circulación de la velocidad como $\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r}$. Al derivar esta integral respecto al tiempo, debe tenerse en cuenta que varía no sólo la velocidad, sino también el propio contorno (es decir, su forma).

De aquí que al tomar la derivada temporal bajo el signo integral debemos derivar no solamente **v**, sino también $\delta\mathbf{r}$:

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} + \oint \mathbf{v}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}.$$

Como la velocidad **v** es precisamente la derivada respecto al tiempo del radio vector **r**, tenemos

$$\mathbf{v}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\cdot\delta\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v} = \delta(\tfrac{1}{2}v^2).$$

La integral de una diferencia total a lo largo de un contorno cerrado es, sin embargo, cero. Por consiguiente, la segunda integral se anula dejando

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r}.$$

Ahora queda sólo sustituir la aceleración $d\mathbf{v}/dt$ por su expresión obtenida en (2.9):

$$d\mathbf{v}/dt = -\mathbf{grad}\, w.$$

Utilizando la fórmula de Stokes, tenemos entonces

$$\oint \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} = \oint \mathbf{rot}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\cdot\delta\mathbf{f} = 0,$$

puesto que $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\, w \equiv 0$. Así pues, volviendo a nuestra notación previa, encontramos†

$$\frac{d}{dt}\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = 0,$$

o bien

$$\oint \mathbf{v}\cdot d\mathbf{l} = \text{constante}. \tag{8.1}$$

Por consiguiente, hemos llegado a la conclusión de que en un fluido ideal, la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno «fluido» cerrado es constante en el tiempo (*teorema de Kelvin* o *ley de conservación de la circulación*).

Debe resaltarse que se ha obtenido este resultado mediante el empleo de la ecuación de Euler en la forma (2.9) y, por consiguiente, en ella interviene la hipótesis de que el flujo es isoentrópico. El teorema no es válido para flujos que no sean isoentrópicos.‡

† Este resultado sigue siendo válido en un campo gravitatorio uniforme, ya que en este caso $\mathbf{rot}\,\mathbf{g} \equiv 0$.

‡ Matemáticamente resulta necesaria una relación biunívoca entre p y ρ [que en el caso de un flujo isoentrópico es $s(p, \rho)$ = constante]; entonces, puede escribirse $-(1/\rho)\,\mathbf{grad}\,p$ como el gradiente de una función determinada, resultado imprescindible para deducir el teorema de Kelvin.

§ 9. Flujo potencial

A partir de la ley de conservación de circulación podemos obtener un resultado importante. Supongamos primero que el flujo es estacionario y consideremos una línea de corriente de la cual sabemos que $\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{rot\,v}$ (la *vorticidad*) es cero en un punto determinado. Dibujemos un contorno cerrado arbitrario infinitamente pequeño que rodee la línea de corriente en dicho punto. Según el teorema de Stokes, la circulación de la velocidad a lo largo de cualquier contorno infinitesimalmente pequeño es igual a $\mathbf{rot\,v} \cdot d\mathbf{f}$, siendo $d\mathbf{f}$ el elemento de área encerrado por el contorno. Puesto que el contorno que estamos considerando en este momento está situado en un punto en el cual $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$, la circulación de la velocidad a lo largo del mismo es cero. En el transcurso del tiempo, este contorno se mueve con el fluido, pero siempre permanece infinitamente pequeño y siempre rodea a la misma línea de corriente. Puesto que la circulación de la velocidad debe permanecer constante, es decir, cero, se deduce que $\boldsymbol{\omega}$ debe ser cero en todos los puntos de la línea de corriente.

Así llegamos a la conclusión de que si en un punto cualquiera de la línea de corriente $\boldsymbol{\omega} = 0$, esto es cierto también en los demás puntos de dicha línea de corriente. Si el flujo no es estacionario, el mismo resultado es válido excepto que en lugar de una línea de corriente podemos considerar la trayectoria que describe en el curso del tiempo una partícula de fluido particular; ‡ recordemos que en flujos no estacionarios estas trayectorias no coinciden, en general, con las líneas de corriente.

A primera vista parece posible basar sobre este resultado el siguiente argumento. Consideremos que el flujo estacionario está pasando alrededor de un cuerpo determinado. Y que el flujo incidente es uniforme en el infinito; su velocidad $\mathbf{v}$ es una constante, de modo que $\boldsymbol{\omega} \equiv 0$ en todas las líneas de corriente. De aquí que concluyamos que $\boldsymbol{\omega}$ es cero a lo largo de la totalidad de cada línea de corriente, es decir, en todo el espacio.

Un flujo en el cual $\boldsymbol{\omega} = 0$ en todo el espacio se denomina *flujo potencial* o *flujo irrotacional*, en oposición al *flujo rotacional*, en el cual la vorticidad no es nula en todos los puntos. Así pues, llegamos a la conclusión de que si junto a un cuerpo cualquiera pasa un flujo estacionario y uniforme, en el infinito debe ser un flujo potencial.

Análogamente, podemos razonar del modo siguiente, mediante la ley de conservación de la circulación. Supongamos que en un instante determinado tenemos un flujo potencial en todo el volumen del fluido. Entonces, la circulación de la velocidad alrededor de un contorno cerrado cualquiera del

‡ Para evitar malas interpretaciones, debemos señalar que este resultado carece de significado en el flujo turbulento (ver capítulo III). Podemos también indicar que puede producirse una vorticidad no nula en una línea de corriente después del paso de una onda de choque. Veremos que esto se debe a que el flujo ya no es isoentrópico y no puede entonces deducirse la ley de conservación de la circulación (§ 106).