

Física Teórica
Landau \ Lifshitz

FÍSICA ESTADÍSTICA

Volumen 9
Parte 2

EDITORIAL REVERTÉ

Física Teórica
Landau \ Lifshitz

FÍSICA
ESTADÍSTICA

Volumen 9

Parte 2



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:

**СТАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА. Часть 2
Теория конденсированного состояния**

Edición original en lengua rusa publicada por
МЕЖДУНАРОДНАЯ КНИГА, Moscú

Copyright © **МЕЖДУНАРОДНАЯ КНИГА**

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 1986

ISBN 978-84-291-4078-1

ISBN 978-84-291-4080-4 Obra completa

Edición e-book (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 2021

ISBN 978-84-291-9050-2

Versión española por

Prof. Dr. José Aguilar Peris

Catedrático de Termología

Facultad de Física de la Universidad Complutense de Madrid

y

Prof. Dr. J. de la Rubia Pacheco

Catedrático de Mecánica Estadística

Facultad de Física de la Universidad de Valencia

Propiedad de

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

e-mail: reverté@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, queda rigurosamente prohibida, salvo excepción prevista en la ley. Asimismo queda prohibida la distribución de ejemplares mediante alquiler o préstamo públicos, la comunicación pública y la transformación de cualquier parte de esta publicación (incluido el diseño de la cubierta) sin la previa autorización de los titulares de la propiedad intelectual y de la Editorial. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal). El Centro Español de Derechos Reprográficos (CEDRO) vela por el respeto a los citados derechos.

PREFACIO

Resumiendo las características de su contenido podemos decir que este noveno volumen del Curso de Física Teórica trata de la teoría cuántica del estado condensado de la materia. Se inicia con una exposición detallada de la teoría de los líquidos cuánticos de Bose y Fermi. Esta teoría, establecida por L. D. Landau a partir de los descubrimientos experimentales de P. L. Kapitza, constituye ahora una rama independiente de la física teórica. Su importancia reside no sólo en los notables fenómenos que se presentan en los isótopos líquidos del helio, sino en el hecho de que los conceptos de un líquido cuántico y su espectro son esencialmente el fundamento de la descripción cuántica de los cuerpos macroscópicos.

Por ejemplo, un entendimiento completo de las propiedades de los metales implica el tratamiento de los electrones como un líquido de Fermi. Sin embargo, las propiedades del líquido electrónico son complicadas por la presencia de la red cristalina y para el desarrollo de la teoría es necesario como etapa preliminar el estudio del caso más simple de un líquido homogéneo isotrópico. De igual modo, la superconductividad de los metales, que puede considerarse como la superfluidez del líquido electrónico, es difícil de entender claramente sin un conocimiento previo de la teoría más simple de la superfluidez en un líquido de Bose.

El enfoque mediante la función de Green es una parte indispensable del formalismo matemático de la física estadística moderna. No sólo por la conveniencia del cálculo de las funciones de Green por la técnica de diagramas, sino especialmente por el hecho de que las funciones de Green determinan directamente el espectro de las excitaciones elementales del cuerpo y por tanto, constituyen el lenguaje que ofrece la descripción más natural de las propiedades de estas excitaciones. Por ello, en este volumen se ha dedicado una atención considerable a los problemas metodológicos en la teoría de las funciones de Green de los cuerpos macroscópicos. Aunque las ideas básicas del método son las mismas para todos los sistemas, la forma específica de la técnica diagramática es diferente en cada caso. Es, en consecuencia, natural el desarrollo de estos métodos para los líquidos cuánticos isotrópicos, en donde la esencia del procedimiento se ve en su forma más pura, sin las complicaciones que surgen de la inhomogeneidad espacial, la presencia de más de un tipo de partículas, etc.

Por razones semejantes, la teoría macroscópica de la superconductividad viene descrita por el modelo simple de un gas isotrópico de Fermi con interacción débil, prescindiendo de las complicaciones debidas a la presencia de la red cristalina y a la interacción de Coulomb.

En cuanto a los capítulos que tratan de los electrones en la red cristalina y de la teoría del magnetismo, debemos insistir en que este libro es parte de un curso de física

teórica y de ningún modo intenta ser un texto de teoría del estado sólido. En consecuencia, sólo se discuten aquí los tópicos más generales y no se hace ninguna referencia a los problemas que llevan consigo el uso de resultados experimentales específicos ni a los métodos de cálculo que no tienen una evidente base teórica. Además este volumen no incluye las propiedades de transporte de los sólidos, de las cuales trataremos en el siguiente y último volumen del Curso.

Finalmente este libro discute también la teoría de las fluctuaciones electromagnéticas en medios materiales y la teoría de las fluctuaciones hidrodinámicas. La primera se incluyó previamente en el volumen 8, Electrodinámica de los medios continuos. Su transferencia al presente volumen es una consecuencia de la necesidad del uso de las funciones de Green con lo cual la teoría completa puede simplificarse y hacerse más conveniente en sus aplicaciones. También es más razonable tratar en el mismo volumen las fluctuaciones electromagnéticas e hidrodinámicas

Éste es el volumen 9 del Curso de Física Teórica (la parte 1 de la Física estadística es el volumen 5). La lógica de la distribución es que los tópicos tratados aquí están íntimamente relacionados con los de la mecánica de fluidos (volumen 6) y la electrodinámica macroscópica (volumen 8).

L. D. Landau no se encuentra entre los que han escrito realmente este libro. Pero el lector observará fácilmente la frecuencia con que aparece su nombre en el mismo: una parte considerable de los resultados dados aquí son debidos a él, solo o con sus alumnos y colegas. Nuestra asociación con Landau durante muchos años nos permite pensar que hemos reflejado exactamente sus puntos de vista en estos temas, aunque naturalmente se han tenido en cuenta los desarrollos habidos en los 15 años transcurridos desde que su trabajo concluyó trágicamente.

Deseamos expresar aquí nuestro agradecimiento a A. F. Andreev, I. E. Dzyaloshinskiĭ e I. M. Lifshitz por muchas de las discusiones sobre temas de este libro. Una gran ayuda ha sido el libro bien conocido Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics (Pergamon, Oxford 1965) de A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov e I. E. Dzyaloshinskiĭ, uno de los primeros textos en la bibliografía de física relacionados con los nuevos métodos de física estadística. Por último, agradecemos a L. P. Gor'kov y Yu. L. Klimontovich por la lectura del libro en su etapa de manuscrito y sus numerosos comentarios.

E. M. LIFSHITZ
L. P. PITAEVSKIĪ

NOTACIÓN

Los subíndices que se asignan a los vectores utilizan letras latinas i, k, \dots . Los subíndices del spin se designan con las letras griegas α, β, \dots . La operación de sumar aparece implicada en todos los subíndices que aparezcan repetidos.

Los «4-vectores» [ver la nota a pie de página correspondiente a la ecuación (13.8)] se designarán con letras mayúsculas X, P, \dots .

Elemento de volumen dV o d^3x .

Límite al tender a cero desde arriba o desde abajo $+0$ o -0 .

Los operadores se designan mediante un acento circunflejo.

Hamiltoniano $\hat{H}, \hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$.

Operador perturbación \hat{V} .

Operadores ψ en la representación de Schrödinger $\hat{\psi}, \hat{\psi}^+$; en la representación de Heisenberg $\hat{\Psi}, \hat{\Psi}^+$; en la representación de Matsubara $\hat{\Psi}_M, \hat{\Psi}_M^+$.

Funciones de Green G, D .

Las magnitudes termodinámicas se designan del mismo modo que en la Parte 1, por ejemplo, T temperatura, V volumen, P presión, μ potencial químico.

Campo magnético \mathbf{H} ; inducción magnética \mathbf{B} ; campo magnético externo \mathfrak{H} .

Referencias a otros volúmenes anteriores del curso de Física Teórica:

Mecánica = Vol. 1 (*Mecánica*).

Campos = Vol. 2 (*Teoría clásica de campos*).

MC = Vol. 3 (*Mecánica Cuántica*).

TCR = Vol. 4 (*Teoría Cuántica Relativista*).

Parte 1 = Vol. 5 (*Física Estadística, Parte 1*).

MF = Vol. 6 (*Mecánica de Fluidos*).

EMC = Vol. 8 (*Electrodinámica de Medios Continuos*).

Todos están publicados por la Editorial Reverté.

ÍNDICE ANALÍTICO

	Prefacio	V
	Notación	VII
I. Líquido normal de Fermi		
§ 1	Excitaciones elementales en un líquido cuántico de Fermi	1
§ 2	Interacción de cuasipartículas	9
§ 3	Susceptibilidad magnética de un líquido de Fermi	13
§ 4	Sonido cero	15
§ 5	Ondas de spin en un líquido de Fermi	22
§ 6	Gas de Fermi casi ideal degenerado con repulsión entre las partículas	24
II. Funciones de Green en un sistema de Fermi a $T = 0$		
§ 7	Funciones de Green en un sistema macroscópico	33
§ 8	Determinación del espectro de energía a partir de la función de Green	39
§ 9	Función de Green en un gas de Fermi ideal	45
§ 10	Distribución de los impulsos de las partículas en un líquido de Fermi	47
§ 11	Cálculo de magnitudes termodinámicas a partir de la función de Green	49
§ 12	Operadores Ψ en la representación de la interacción	50
§ 13	La técnica de los diagramas para los sistemas de Fermi	54
§ 14	Función de autoenergía	63
§ 15	Función de Green de dos partículas	66
§ 16	Relación existente entre la función vértice y la amplitud de dispersión o scattering de las cuasipartículas	71
§ 17	Función vértice para pequeñas transferencias de impulso	73
§ 18	Relación entre la función vértice y la función de interacción de las cuasipartículas	80
§ 19	Identidades para las derivadas de la función de Green	83

§ 20	Deducción de la relación existente entre el impulso límite y la densidad	88
§ 21	Función de Green de un gas de Fermi casi ideal	91

III. Superfluidez

§ 22	Excitaciones elementales en un líquido de Bose cuántico	99
§ 23	Superfluidez	103
§ 24	Fonones en un líquido	109
§ 25	Gas de Bose casi ideal degenerado	114
§ 26	Función de onda del condensado	119
§ 27	Relación entre la densidad del condensado y la temperatura	124
§ 28	Comportamiento de la densidad superfluida cerca del punto λ	127
§ 29	Filamentos de vórtices cuantizados	129
§ 30	Un filamento de vórtices en un gas de Bose casi ideal	136
§ 31	Funciones de Green en un líquido de Bose	138
§ 32	Técnica diagramática para un líquido de Bose	145
§ 33	Funciones de autoenergía	147
§ 34	Desintegración de las cuasipartículas	152
§ 35	Propiedades del espectro cerca de su punto final	157

IV. Funciones de Green a temperaturas no nulas

§ 36	Funciones de Green a temperaturas distintas de cero	165
§ 37	Funciones de Green de la temperatura	170
§ 38	Técnica diagramática para las funciones de Green de la temperatura	174

V. Superconductividad

§ 39	Gas de Fermi superfluido. El espectro de energía	179
§ 40	Gas de Fermi. Propiedades termodinámicas	186
§ 41	Funciones de Green en un gas superfluido	191
§ 42	Funciones de Green de temperatura en un gas de Fermi superfluido	198
§ 43	Superconductividad en metales	201
§ 44	Corriente en el caso de superconductividad	202
§ 45	Ecuaciones de Ginzburg-Landau	208
§ 46	Tensión superficial en la frontera entre las fases superconductoras y normal	215
§ 47	Los dos tipos de superconductor	221
§ 48	Estructura del estado mezcla	225
§ 49	Susceptibilidad diamagnética por encima del punto de transición ...	234
§ 50	Efecto Josephson	238
§ 51	Relación entre la corriente el campo magnético en un superconductor	242
§ 52	Profundidad de penetración de un campo magnético dentro de un superconductor	250
§ 53	Aleaciones superconductoras	252

§ 54	Efecto Cooper en el caso de momentos angulares orbitales no nulos del par	255
------	---	-----

VI. Electrones en la red cristalina

§ 55	Un electrón en un campo periódico	261
§ 56	Efecto de un campo externo sobre el movimiento de los electrones en una red	271
§ 57	Trayectorias cuasiclásicas	276
§ 58	Niveles de energía cuasiclásicos	281
§ 59	Tensor de masa efectiva del electrón en la red	284
§ 60	Simetría de los estados del electrón en una red dentro de un campo magnético	289
§ 61	Espectros electrónicos de los metales normales	293
§ 62	Función de Green de los electrones en un metal	299
§ 63	Efecto de Haas-van Alphen	303
§ 64	Interacción electrón-fonón	311
§ 65	Influencia de la interacción electrón-fonón sobre el espectro de los electrones en un metal	315
§ 66	Espectro electrónico de los aislantes sólidos	320
§ 67	Electrones y huecos en semiconductores	323
§ 68	Espectro electrónico cerca del punto de degeneración	326

VII. Magnetismo

§ 69	Ecuación del movimiento de un momento magnético en un ferromán (ferromagneto)	333
§ 70	Magnones en un ferromagneto. El espectro	339
§ 71	Magnones en un ferromagneto. Magnitudes termodinámicas ...	345
§ 72	El hamiltoniano del spin	351
§ 73	Interacciones de los magnones	358
§ 74	Magnones en un antiferromagneto	363

VIII. Fluctuaciones electromagnéticas

§ 75	Función de Green de un fotón en un medio material	369
§ 76	Fluctuaciones del campo electromagnético	375
§ 77	Fluctuaciones electromagnéticas en un medio infinito	377
§ 78	Fluctuaciones de corriente en circuitos lineales	383
§ 79	Función de Green de la temperatura de un fotón en un medio	384
§ 80	Tensor de tensiones de van der Waals	389
§ 81	Fuerzas de la interacción molecular entre cuerpos sólidos. Fórmula general	397
§ 82	Fuerzas de integración molecular entre cuerpos sólidos. Casos límites	402
§ 83	Comportamiento asintótico de la función de correlación en un líquido	407

§ 84	Expresión del operador para la permitividad	412
§ 85	Un plasma degenerado	414

IX. Fluctuaciones hidrodinámicas

§ 86	Factor de forma dinámico de un líquido	423
§ 87	Reglas de la suma para los factores de forma	428
§ 88	Fluctuaciones hidrodinámicas	434
§ 89	Fluctuaciones hidrodinámicas en un medio infinito	438
§ 90	Expresiones de los operadores para los coeficientes de transporte	444
§ 91	Factor de forma dinámica de un líquido de Fermi	447
	Índice alfabético	451

CAPÍTULO I

LÍQUIDO NORMAL DE FERMI

§ 1. Excitaciones elementales en un líquido cuántico de Fermi

A temperaturas tan bajas que la longitud de onda de Broglie correspondiente al movimiento térmico de los átomos en un líquido resulte comparable con las distancias existentes entre los átomos, las propiedades macroscópicas del líquido están determinadas por los efectos cuánticos. La teoría de dichos líquidos cuánticos es de un interés fundamental considerable, aunque en la naturaleza sólo existan dos de ellos que sean realmente líquidos; son los líquidos correspondientes a los isótopos He^3 y He^4 del helio a temperaturas $\sim 1 - 2$ K. Todas las demás sustancias solidifican mucho antes de que empiecen a resultar importantes en ellos los efectos cuánticos. En conexión con este punto puede recordarse que de acuerdo con la mecánica clásica, todos los cuerpos deberían ser sólidos en el cero absoluto (ver Parte 1, § 64). Sin embargo, el helio debido a la interacción peculiarmente débil que existe entre sus átomos, permanece líquido hasta temperaturas suficientemente bajas para que se hagan notar los efectos cuánticos, de tal modo que no es necesario que llegue a solidificar.

El cálculo de las magnitudes termodinámicas para un cuerpo macroscópico exige el conocimiento de su espectro de niveles de energía. En un sistema de partículas fuertemente interactivas tal como un líquido cuántico, podemos referirnos, como es natural, sólo a aquellos niveles que corresponden a estados estacionarios del líquido total, y no a estados de los átomos individuales. Al calcular la función de partición a temperaturas suficientemente bajas, hemos de tener en cuenta únicamente los niveles de energía débilmente excitados del líquido, los cuales están bastante próximos al estado fundamental.

El extremo siguiente tiene una importancia fundamental en toda la teoría. En mecánica cuántica, cualquier estado débilmente excitado de un cuerpo macroscópico puede considerarse como un conjunto de *excitaciones elementales* separadas. Éstas se comportan como *cuasipartículas* que se mueven dentro del volumen ocupado por el cuerpo y que poseen energías ε e impulsos \mathbf{p} definidos. Una característica importante del espectro energético del cuerpo es la forma de la función $\varepsilon(\mathbf{p})$, o *relación de dispersión* para las excitaciones elementales. Debe resaltarse de nuevo

que el concepto de excitaciones elementales surge como un procedimiento de descripción mecánica-cuántica del movimiento colectivo de los átomos de un cuerpo y que no pueden identificarse las cuasipartículas con los átomos o moléculas individuales.

En los líquidos cuánticos pueden en principio existir diversos tipos de espectros de energía. Existirán también propiedades macroscópicas completamente diferentes que dependerán de la clase del espectro. Empezaremos considerando un líquido con un espectro que muy bien podría denominarse de tipo *Fermi*. La teoría de dicho líquido de Fermi se debe a L. D. Landau (1956-58), quien dedujo los resultados que se van a resumir en §§ 1-4.†

El espectro de energía de un líquido cuántico de Fermi tiene una estructura que en cierta medida es semejante a la de un gas de Fermi ideal (de partículas con spin $\frac{1}{2}$). El estado fundamental de este último corresponde a la ocupación por las partículas de todos los estados contenidos dentro de la *esfera de Fermi*, que es una esfera en el espacio de los impulsos cuyo radio p_F está relacionado con la densidad del gas N/V (número de partículas por unidad de volumen) por la expresión

$$\begin{aligned} N/V &= 2 \cdot 4\pi p_F^3 / 3(2\pi\hbar)^3 \\ &= p_F^3 / 3\pi^2 \hbar^3; \end{aligned} \quad (1.1)$$

ver Parte 1, § 57. Los estados excitados del gas aparecen cuando las partículas pasan desde estados del interior de la esfera ocupada a algún otro estado con $p > p_F$.

Como es natural, en un líquido no existen estados cuánticos para las partículas individuales, de modo que para construir el espectro de un líquido de Fermi debemos partir de la hipótesis de que la clasificación de los niveles de energía permanece invariable cuando se «conectan» gradualmente las interacciones entre los átomos, es decir cuando pasamos del gas al líquido. En esta clasificación, el papel de partículas de gas lo juegan las excitaciones elementales (cuasipartículas), cuyo número es igual al número de átomos y que obedecen a la estadística de Fermi.

Es evidente que dicho espectro sólo puede aparecer en un líquido de partículas con spin semientero: el estado de un sistema de bosones (partículas con spin entero) no puede describirse en función de cuasipartículas que obedecen la estadística de Fermi. Al mismo tiempo debe resaltarse que un espectro de esta clase no puede ser una propiedad universal de todos los líquidos de esta clase. El tipo de espectro depende también de la naturaleza específica de la interacción entre los átomos. Esto resulta evidente a partir de la consideración siguiente: si la interacción es tal que tienda a asociar los átomos en parejas, entonces en el límite obtenemos un líquido molecular compuesto de partículas (moléculas) con spin entero para el cual es ciertamente imposible la existencia del espectro que estamos considerando.

† Para anticiparnos a cualquier dificultad, podemos mencionar aquí que para evitar malas interpretaciones nos estamos refiriendo a un líquido de Fermi no superfluido (*normal*), como es el caso del isótopo líquido He^3 , con la reserva hecha en la tercera nota a pie de página a § 54.

Cada una de las cuasipartículas tiene un impulso definido \mathbf{p} (volveremos más adelante a considerar la validez de esta afirmación). Sea $n(\mathbf{p})$ la función de distribución de los impulsos de las cuasipartículas, normalizada mediante la condición

$$\int n \, d\tau = N/V, \quad d\tau = d^3p/(2\pi\hbar)^3;$$

esta condición se hará más precisa en su momento. El principio de clasificación mencionado anteriormente consiste en suponer que, si se especifica esta función, la energía E del líquido queda unívocamente determinada y que el estado fundamental corresponde a una función de distribución en la que todos los estados están ocupados dentro de la esfera de Fermi, cuyo radio p_F está relacionado con la densidad del líquido mediante la misma fórmula (1.1) que es válida para un gas ideal.

Es importante subrayar que la energía total E del líquido no es simplemente la suma de las energías ε de las cuasipartículas. En otras palabras, E es una magnitud funcional de la función de distribución que no se reduce a la integral $\int n\varepsilon \, d\tau$ (como ocurre en el caso de un gas ideal, en donde las partículas coinciden con las partículas reales y no interactúan entre sí). Puesto que el concepto primario es E , se plantea la cuestión de cómo hay que definir la energía de las cuasipartículas, para tener en cuenta su interacción.

Con este objetivo, consideremos la variación que experimenta E debida a un cambio infinitesimal de la función de distribución. Está claro que puede definirse como la integral de una expresión lineal respecto a la variación δn , es decir, tiene la forma

$$\delta E/V = \int \varepsilon(p)\delta n \, d\tau.$$

La magnitud ε es la derivada funcional de la energía E respecto a la función de distribución. Corresponde a la variación de la energía del sistema cuando se adiciona una sola cuasipartícula con impulso \mathbf{p} . Esta magnitud juega el papel de la función de Hamilton de una cuasipartícula en el campo de las demás cuasipartículas. Es también una funcional de la función de distribución, es decir, la forma de la función $\varepsilon(\mathbf{p})$ depende de la distribución de todas las partículas en el líquido.

En conexión con esto debe señalarse que una excitación elemental en el tipo de espectro considerado puede considerarse en cierto sentido como un átomo situado en el campo autoconsistente de los demás átomos. Esta autoconsistencia no ha de entenderse, como es natural, en el sentido usual de la mecánica cuántica. Aquí su naturaleza es más profunda; el hamiltoniano del átomo se ve modificado no sólo lo previsto para tener en cuenta el efecto de las partículas que la rodean sobre la energía potencial, sino también la dependencia del operador de energía cinética sobre el operador del impulso.

Hasta ahora hemos ignorado el posible spin de las cuasipartículas. Puesto que el spin es una magnitud cuántica, no puede tratarse clásicamente y, por consiguiente,

debemos considerar la función de distribución como una matriz estadística respecto al spin. La energía ε de una excitación elemental no es en general sólo una función del impulso sino que es también un operador respecto a las variables de spin, que puede expresarse en función del operador del spin de la cuasipartícula $\hat{\mathbf{s}}$. En un líquido homogéneo isótropo (no en el interior de un campo magnético ni ferromagnético) el operador $\hat{\mathbf{s}}$ sólo puede aparecer en la función escalar ε en la forma de los escalares $\hat{\mathbf{s}}^2$ y $(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p})^2$; es inadmisibles la primera potencia del producto $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p}$ puesto que el vector spin es un vector axial y, por tanto, este producto es un pseudoescalar. El cuadrado $\hat{\mathbf{s}}^2 = s(s + 1)$ y en el caso del spin $s = \frac{1}{2}$ el escalar $(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p})^2 = p^2/4$ se reduce también a una constante independiente de $\hat{\mathbf{s}}$. Así pues, en este caso la energía de una cuasipartícula es independiente del operador de spin y todos los niveles energéticos de las cuasipartículas tienen una degeneración doble.

La afirmación de que una cuasipartícula posee spin expresa esencialmente el hecho de que existe esta degeneración. En este sentido podemos decir que el spin de las cuasipartículas en un espectro del tipo considerado es siempre $\frac{1}{2}$, cualquiera que sea el spin de las partículas reales del líquido. En efecto, en el caso de cualquier otro spin diferente de $\frac{1}{2}$ los términos de la forma $(\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p})^2$ originarían una descomposición de los niveles con degeneración $(2s + 1)$ en $\frac{1}{2}(2s + 1)$ niveles doblemente degenerados. En otras palabras, aparecerían $\frac{1}{2}(2s + 1)$ ramas diferentes de la función $\varepsilon(\mathbf{p})$, correspondiendo cada una de ellas a «cuasipartículas con spin $\frac{1}{2}$ ».

Como ya se ha mencionado, cuando se tiene en cuenta el spin de las cuasipartículas, la función de distribución se transforma en una matriz o un operador $\hat{n}(\mathbf{p})$ respecto a las variables de spin. Este operador puede escribirse explícitamente como una matriz estadística hermitica $n_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$, en donde α y β son índices de la matriz de spin que toman los valores $\pm \frac{1}{2}$. Los elementos diagonales de la matriz determinan el número de cuasipartículas que pertenecen a estados de spin particulares. La condición de normalización para la función de distribución de las cuasipartículas debe escribirse ahora, por consiguiente, en la forma

$$\text{tr} \int \hat{n} d\tau \equiv \int n_{\alpha\alpha} d\tau = N/V, \quad d\tau = d^3p/(2\pi\hbar)^3, \quad (1.2)$$

en donde tr designa la traza de la matriz respecto a los índices de spin.†

La energía $\hat{\varepsilon}$ de la cuasipartícula es en general también un operador (una matriz respecto a las variables de spin). Debe definirse mediante

$$\delta E/V = \text{tr} \int \hat{\varepsilon} \delta \hat{n} d\tau \equiv \int \varepsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} d\tau. \quad (1.3)$$

Si no existe ninguna dependencia o relación entre la función de distribución y la energía con el spin, de modo que $n_{\alpha\beta}$ y $\varepsilon_{\alpha\beta}$ se reducen a matrices unidad:

$$n_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}, \quad (1.4)$$

† En esta expresión y en todas las siguientes, la repetición de índices implica la suma, como es usual.

entonces la operación de obtener la traza en (1.2) y en (1.3) equivale a multiplicar simplemente por 2:

$$2 \int n \, d\tau = N/V, \quad \delta E/V = 2 \int \varepsilon \, \delta n \, d\tau. \quad (1.5)$$

Es fácil ver que en el equilibrio estadístico la función de distribución de las cuasipartículas es una distribución de Fermi ordinaria, en la cual la energía está representada por la magnitud $\hat{\varepsilon}$ definida en (1.3). En efecto, como los niveles de energía del gas de Fermi ideal y del líquido se clasifican del mismo modo, la entropía S del líquido se determina mediante una expresión estadística semejante

$$S/V = -\text{tr} \int \{ \hat{n} \log \hat{n} - (1 - \hat{n}) \log (1 - \hat{n}) \} \, d\tau \quad (1.6)$$

a la correspondiente a un gas (Parte 1, § 55). Variando esta expresión con las condiciones adicionales de número de partículas total constante y energía total constante,

$$\delta N/V = \text{tr} \int \delta \hat{n} \, d\tau = 0, \quad \delta E/V = \text{tr} \int \hat{\varepsilon} \, \delta \hat{n} \, d\tau = 0,$$

obtenemos la distribución buscada:

$$\hat{n} = [e^{\hat{\varepsilon} - \mu}/T + 1]^{-1}, \quad (1.7)$$

siendo μ el potencial químico del líquido.

Cuando la energía de la cuasipartícula es independiente del spin, la fórmula (1.7) equivale a una relación análoga entre n y ε :

$$n = [e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1]^{-1}. \quad (1.8)$$

A $T = 0$, el potencial químico es igual a la energía límite que corresponde a la superficie de la esfera de Fermi:

$$[\mu]_{T=0} = \varepsilon_F \equiv \varepsilon(p_F). \quad (1.9)$$

Debe resaltarse que, a pesar de la analogía formal entre la expresión (1.8) y la distribución de Fermi ordinaria, no es idéntica a la última: puesto que la propia ε es una funcional de n , la fórmula (1.8) es hablando estrictamente una expresión implícita complicada de n .

Volvamos ahora a la hipótesis de que puede asignarse a cada cuasipartícula un impulso definido. La condición precisa para que sea válida esta hipótesis es que la incertidumbre del impulso (debido al recorrido libre medio finito de la cuasipartícula) sea pequeña no sólo en comparación con el propio impulso, sino también en relación con la anchura Δp de la «zona de transición» de la distribución, en la que difiere apreciablemente de una función escalón:†

$$\theta(\mathbf{p}) \equiv \theta(p) = \begin{cases} 1 & \text{para } p < p_F, \\ 0 & \text{para } p > p_F. \end{cases} \quad (1.10)$$

Es fácil ver que se satisface esta condición si la distribución $n(\mathbf{p})$ difiere de (1.10) sólo en una pequeña región cerca de la superficie de la esfera de Fermi. Está claro, por el principio de Pauli, que únicamente las cuasipartículas que se encuentran en la zona de transición de la distribución pueden sufrir el scattering o dispersión mutua, como resultado del cual deben aparecer estados libres en dicha zona. De aquí que la probabilidad de la colisión sea proporcional al cuadrado de la anchura de la zona. De acuerdo con ello, la incertidumbre en la energía y , por consiguiente, en el impulso de la cuasipartícula son ambas proporcionales a $(\Delta p)^2$. Por consiguiente resulta claro que, cuando Δp es suficientemente pequeña, la incertidumbre en el impulso será pequeña no sólo en comparación con p_F , sino también con Δp .

Así pues, el método descrito es válido solamente para los estados excitados del líquido que resultan descritos mediante una función de distribución de cuasipartículas, la cual difiere de una función escalón justo en una estrecha región próxima a la superficie de Fermi. En particular, y en el caso de funciones de distribución de equilibrio sólo son permisibles temperaturas suficientemente bajas. La anchura (en energía) de la zona de transición de la distribución de equilibrio es del orden de T . La incertidumbre cuántica en la energía de una cuasipartícula, debida a las colisiones, es del orden de \hbar/τ , siendo τ el tiempo correspondiente al recorrido libre medio de la cuasipartícula. Por tanto, la condición para que sea aplicable la teoría es

$$\hbar/\tau \ll T. \quad (1.11)$$

De acuerdo con el análisis precedente, el tiempo τ es inversamente proporcional al cuadrado de la anchura de la zona de transición:

$$\tau \propto T^{-2}.$$

de modo que (1.11) se satisface ciertamente cuando $T \rightarrow 0$. En el caso de un líquido en el que no sea débil la interacción entre partículas, todos los parámetros de la

† Para futuras referencias, puede señalarse que la derivada $\theta'(p) = -\delta(p - p_F)$, puesto que ambos miembros dan la unidad al integrar sobre un intervalo cualquiera de valores de p que incluya el punto $p = p_F$.

energía son del mismo orden que la energía límite ε_F ; en este sentido la condición (1.11) es equivalente a $T \ll |\varepsilon_F|$.†

En el caso de distribuciones que sean casi una función escalón (es decir, todas aquellas que son aproximadamente iguales a la distribución para $T = 0$), se puede sustituir en primera aproximación la función ε por su valor calculado con $n(\mathbf{p}) = \theta(\mathbf{p})$. Entonces ε resulta una función definida del módulo del impulso y (1.7) se convierte en la distribución de Fermi ordinaria.

Cerca de la superficie de la esfera de Fermi, en donde únicamente la función $\varepsilon(\mathbf{p})$ tiene un significado físico directo, puede ésta desarrollarse entonces en potencias de la diferencia $p - p_F$. Tenemos

$$\varepsilon - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F), \quad (1.12)$$

en donde

$$v_F = [\partial\varepsilon/\partial p]_{p=p_F} \quad (1.13)$$

es la «velocidad» de las cuasipartículas en la superficie de Fermi. En un gas de Fermi ideal, en donde las cuasipartículas son idénticas a las partículas reales, tenemos $\varepsilon = p^2/2m$ y, por tanto, $v_F = p_F/m$. Por analogía, podemos definir para un líquido de Fermi la magnitud

$$m^* = p_F/v_F, \quad (1.14)$$

denominada *masa efectiva* de la cuasipartícula y resulta ser positiva (ver el final de § 2).

En función de las magnitudes así definidas, la condición para que pueda ser aplicable la teoría puede escribirse como $T \ll v_F p_F$, y sólo aquellas cuasipartículas con impulsos p tales que $|p - p_F| \ll p_F$ tienen un significado real. En particular este hecho importante hace que deje de ser trivial la relación (1.1) existente entre p_F y la densidad del líquido, puesto que su deducción intuitiva (en el caso de un gas de Fermi) se basa en el concepto de partículas en estados que ocupan la totalidad de la esfera de Fermi y no sólo en la proximidad de su superficie.‡

La masa efectiva determina, en particular, la entropía S y el calor específico C del líquido a temperaturas bajas. Estas magnitudes vienen dadas por las mismas fórmulas que en el caso de un gas ideal (Parte 1, § 58), bastando sustituir en ellas la masa de la partícula m por la masa efectiva m^* :

$$S = C = V\gamma T, \quad \gamma = m^* p_F / 3\hbar^3 = (\frac{1}{3}\pi)^{2/3} (m^*/\hbar^2) (N/V)^{1/3}; \quad (1.15)$$

† Sin embargo, en el caso del He³ líquido, se demuestra experimentalmente que el margen de aplicabilidad cuantitativa de la teoría está de hecho limitada a $T \lesssim 0,1$ °K (mientras que $|\varepsilon_F| \approx 2,5$ °K).

‡ La demostración de (1.1) exige el empleo de métodos matemáticos más complicados y se dará en § 20.

debido a que la dependencia lineal entre T , S y C es la misma. Esto es consecuencia de que la expresión (1.6) que nos da la entropía en función de la función de distribución es la misma, tanto para un líquido como para un gas y en el cálculo de esta integral sólo tiene importancia el intervalo de valores de los impulsos cercanos a p_F , en donde la función de distribución de cuasipartículas en el líquido y la función de distribución de partículas en el gas vienen dadas por la misma expresión (1.8). †

Antes de desarrollar más a fondo estas teorías, debe señalarse el punto siguiente. Aunque este método de definir las cuasipartículas en un líquido de Fermi por una analogía exacta con las partículas de un gas es el más conveniente a la hora de deducir sistemáticamente la teoría, la descripción física correspondiente tiene el inconveniente de hacer intervenir la inobservable esfera de Fermi llena de cuasipartículas. Esta dificultad podría eliminarse mediante una formulación en la que sólo apareciesen las excitaciones elementales cuando $T \neq 0$. En dicha descripción, las excitaciones elementales están representadas mediante cuasipartículas fuera de la esfera de Fermi y por «huecos» dentro de ella; a los primeros hay que asignarles, en la aproximación correspondiente a (1.12), la energía $\varepsilon = v_F(p - p_F)$ y a los últimos la energía $\varepsilon = -v_F(p_F - p)$. La distribución estadística de cada una de ellas viene dada por la fórmula de la distribución de Fermi con potencial de Fermi nulo (de acuerdo con el hecho de que ahora no es constante el número de excitaciones elementales, sino que está determinado por la temperatura)‡

$$n = [e^{\varepsilon/T} + 1]^{-1}. \quad (1.16)$$

En esta descripción las excitaciones elementales aparecen o desaparecen sólo en parejas y, por tanto, los número totales de excitaciones con $p > p_F$ y $p < p_F$ son siempre iguales.

Con esta definición de las excitaciones elementales, su energía es ciertamente positiva y corresponde al exceso de energía del nivel excitado sobre la que posee el nivel fundamental del sistema. La energía de las cuasipartículas definidas mediante (1.3) puede ser o positiva o negativa.

Además, en el caso de un líquido a temperatura cero y presión cero, la magnitud $\varepsilon_F = \mu$ es ciertamente negativa y los valores de ε próximos a ε_F son, por consiguiente, también negativos. Esto es evidente puesto que, cuando $T = 0$ y $P = 0$, $-\mu$ es una magnitud positiva, que corresponde al valor límite del calor de vaporización del líquido por partícula.

† En el caso del He³ líquido a presión cero, $p_F/\hbar = 0,8 \times 10^8$ cm⁻¹; $m^* = 3,1 m$ (He³); p_F se halla a partir de la densidad del líquido y m^* a partir de su calor específico.

‡ Deberá recordarse (cf. Parte 1, § 63) que bajo estas condiciones el número de cuasipartículas N_{qp} está determinado por la condición correspondiente al equilibrio termodinámico: la energía libre F en función de N_{qp} es un mínimo para un volumen y temperatura dados: $(\partial F / \partial N_{qp})_{T,V} = 0$. Sin embargo, esta derivada es precisamente el «potencial químico de las cuasipartículas»; no deberá confundirse con el potencial μ del líquido, que está determinado por la derivada de F respecto al número de partículas reales N .

§ 2. Interacción de cuasipartículas

La energía de las cuasipartículas, al ser una funcional de su función de distribución, varía con dicha función. La variación de la energía en el caso de una pequeña desviación δn de la función de distribución respecto a la función escalón (1.10) debe ser

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \int f_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\delta\gamma}(\mathbf{p}') d\tau' \quad (2.1)$$

o, en forma más simbólica,

$$\delta \hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \text{tr}' \int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta \hat{n}(\mathbf{p}') d\tau',$$

en donde tr' designa la traza respecto al par de índices de spin que corresponden al impulso \mathbf{p}' . La función f puede denominarse *función de interacción* de las cuasipartículas; en un gas de Fermi, $f \equiv 0$. Por definición representa la segunda derivada variacional de la energía total E del líquido y, por tanto, es simétrica en las variables \mathbf{p} , \mathbf{p}' y los pares de índices correspondientes:

$$f_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f_{\gamma\alpha, \delta\beta}(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \quad (2.2)$$

Con la variación (2.1), la energía de las cuasipartículas cerca de la superficie de la esfera de Fermi viene dada por la suma

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) - \varepsilon_F = v_F(p - p_F) + \text{tr}' \int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta \hat{n}(\mathbf{p}') d\tau'. \quad (2.3)$$

En particular, en el caso de distribución de equilibrio termodinámico, el segundo término en (2.3) da la dependencia con la temperatura de la energía de la cuasipartícula. La desviación $\delta \hat{n}'$ es apreciablemente diferente de cero sólo en una banda estrecha de valores de \mathbf{p}' cerca de la superficie de la esfera de Fermi y en ella se contienen los impulsos \mathbf{p} de las cuasipartículas reales. La función $\hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ en (2.1) y (2.3) puede, por consiguiente, sustituirse en la práctica por su valor en esta superficie, haciendo $p = p' = p_F$, de modo que \hat{f} dependerá solamente de las direcciones de los vectores \mathbf{p} y \mathbf{p}' .

La dependencia con el spin de la función \hat{f} se debe tanto a los efectos relativistas (interacciones spin-spin y spin-órbita) como a la interacción de canje o intercambio. Esta última es la más importante. Cuando se tiene en cuenta, la función de interacción de las cuasipartículas tiene la forma (en la superficie de Fermi)

$$(p_F m^* / \pi^2 \hbar^3) \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = F(\vartheta) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}' G(\vartheta), \quad (2.4)$$

en donde $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}'$ son las matrices de Pauli que actúan sobre los índices de spin correspondientes (es decir, que corresponden a las variables \mathbf{p} y \mathbf{p}') mientras que F y G

son dos funciones del ángulo θ formado entre \mathbf{p} y \mathbf{p}' †. La forma de esta expresión se debe a la propiedad característica de la interacción de intercambio, que es independiente de la orientación espacial del momento angular total del sistema, de modo que en ella sólo pueden aparecer los dos operadores de spin como un producto escalar. Las funciones F y G , según están definidas en (2.4), son adimensionales. El factor separado con este objeto a la izquierda de (2.4) en su primer miembro es el número de estados de cuasipartículas sobre la superficie de Fermi por unidad de intervalo de energía:

$$v(\varepsilon_F) = [2d\tau/d\varepsilon]_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \frac{2 \cdot 4\pi p_F^2}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{dp}{d\varepsilon} \right)_{p_F}$$

o sea,

$$v_F = p_F^2/\pi^2\hbar^3 v_F = p_F m^*/\pi^2\hbar^3. \quad (2.5)$$

Como la traza de una matriz de Pauli es nula, se hace cero el segundo miembro de (2.4) cuando se toma la traza tr' y $\text{tr}' f$ es también independiente de σ . De hecho, esto ocurre también cuando se tienen en cuenta las interacciones spin-órbita y spin-spin. La razón es que la función escalar $\text{tr}' f$ sólo podría contener el operador de spin en forma de producto $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{p}'$ de los dos vectores axiales $\hat{\mathbf{s}}$ y $\mathbf{p} \times \mathbf{p}'$; no es necesario considerar expresiones cuadráticas de las componentes de $\hat{\mathbf{s}}$ puesto que en el caso de spin $\frac{1}{2}$ todas ellas se reducen a términos lineales en $\hat{\mathbf{s}}$ o independientes de $\hat{\mathbf{s}}$. Pero este producto no es invariante bajo la inversión del tiempo y, por consiguiente, no puede aparecer en la magnitud invariante $\text{tr}' f$.

Resultará conveniente la siguiente notación:

$$f_{\alpha\gamma, \beta\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \delta_{\alpha\beta} f(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad f = \frac{1}{2} \text{tr} \text{tr}' f. \quad (2.6)$$

A partir de la expresión (2.4) tenemos

$$(p_F m^*/\pi^2\hbar^3) f(\vartheta) = 2F(\vartheta). \quad (2.7)$$

La función de interacción de las cuasipartículas satisface una cierta relación integral que se deduce del principio de relatividad de Galileo. Una consecuencia directa de este principio es que el impulso del líquido por unidad de volumen es igual a su densidad de flujo másico. La velocidad de una cuasipartícula es $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, de modo que el flujo de cuasipartículas es

$$\text{tr} \int \hat{n}(\partial\hat{\varepsilon}/\partial\mathbf{p}) d\tau.$$

† En forma matricial explícita.

$$(p_F m^*/\pi^2\hbar^3) f_{\alpha\gamma, \beta\delta} = F\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + G\sigma_{\alpha\beta} \cdot \sigma_{\gamma\delta}. \quad (2.4a)$$

Como el número de cuasipartículas en el líquido es el mismo que el de partículas reales, es evidente que la transferencia de masa total mediante cuasipartículas se encuentra multiplicando su flujo numérico por la masa de la partícula real m . Así obtenemos la ecuación

$$\text{tr} \int \mathbf{p} \hat{n} \, d\tau = \text{tr} \int m(\partial \hat{\varepsilon} / \partial \mathbf{p}) \hat{n} \, d\tau. \quad (2.8)$$

Haciendo $n_{\alpha\beta} = n\delta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}$, podemos obtener la variación de ambos miembros de (2.8) para lo cual utilizaremos (2.1) y tomaremos f de (2.6):

$$\begin{aligned} \int \mathbf{p} \, \delta n \, d\tau &= m \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \, \delta n \, d\tau + m \int \frac{\partial f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')}{\partial \mathbf{p}} n \, \delta n' \, d\tau \, d\tau', \\ &= m \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \, \delta n \, d\tau - m \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial n'}{\partial \mathbf{p}'} \, \delta n \, d\tau \, d\tau', \end{aligned}$$

en donde $n' \equiv n(\mathbf{p}')$; en la segunda integral hemos vuelto a denominar a las variables e integrado por partes. Como δn es arbitrario, esto nos da la relación buscada:

$$\mathbf{p}/m = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p} - \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [\partial n(\mathbf{p}') / \partial \mathbf{p}'] \, d\tau'. \quad (2.9)$$

En el caso de una función escalón $n(\mathbf{p}') = \theta(\mathbf{p}')$, la derivada $\partial n' / \partial \mathbf{p}'$ se reduce a la función delta

$$\partial \theta(p) / \partial \mathbf{p} = -(p/p) \delta(p - p_F). \quad (2.10)$$

Sustituyendo en (2.9) la función $\varepsilon(\mathbf{p})$ tomada de (1.12) y sustituyendo luego el impulso $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$ en todas partes por el valor $\mathbf{p}_F = p_F\mathbf{n}$ sobre la superficie de Fermi y multiplicando ambos miembros de la ecuación por \mathbf{p}_F , se consigue la relación siguiente entre la masa m de las partículas reales y la masa efectiva de las cuasipartículas:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_F}{(2\pi\hbar)^3} \int f(\vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta, \quad (2.11)$$

en donde $d\vartheta'$ es el elemento de ángulo sólido en la dirección de \mathbf{p}' . Si sustituimos aquí la expresión (2.7) para $f(\theta)$, esta ecuación se reduce a

$$m^*/m = 1 + \overline{F(\vartheta) \cos \vartheta}, \quad (2.12)$$

en donde la barra designa el proceso de promediar respecto a las direcciones, es decir, la integración respecto a $d\vartheta'/4\pi = \frac{1}{2} \sin \vartheta \, d\theta$.

Calculemos también la compresibilidad de un líquido de Fermi en el cero absoluto, es decir la cantidad $u^2 = \partial P / \partial \rho$.† La densidad del líquido es $\rho = mN/V$, de modo que

$$u^2 = -(V^2/mN) \partial P / \partial V.$$

Para calcular esta derivada es conveniente expresarla en función de la derivada del potencial químico. Como este último depende de N y V a través solamente del cociente N/V y puesto que para $T = \text{constante} = 0$ se tiene $d\mu = VdP/N$, resultando

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = -\frac{V}{N} \frac{\partial \mu}{\partial V} = -\frac{V^2}{N^2} \frac{\partial P}{\partial V},$$

y, por tanto,

$$u^2 = \frac{N}{m} \frac{\partial \mu}{\partial N}. \quad (2.13)$$

Como $\mu = \varepsilon_F$ para $T = 0$, la variación $\delta\mu$ que se obtiene cuando el número de partículas varía en δN es

$$\delta\mu = \int f(\mathbf{p}_F, \mathbf{p}') \delta n' d\tau' + (\partial \varepsilon_F / \partial p_F) \delta p_F. \quad (2.14)$$

El primer término de esta expresión nos da la variación de $\varepsilon(p_F)$ debida a la variación de la función de distribución. El segundo término aparece porque una variación en el número total de partículas influye también sobre el valor del impulso límite a partir de (1.1), tenemos que $\delta N = V p_F^2 \delta p_F / \pi^2 \hbar^3$. Como $\delta n'$ es apreciablemente diferente de cero sólo cuando $p' \approx p_F$, podemos escribir, si sustituimos f en la integral por su valor en la superficie de Fermi,

$$\int f \delta n' d\tau' \approx \frac{1}{2} \int f d\omega' \int \delta n' \frac{2 d\tau'}{4\pi} = \frac{1}{2} 4\pi \bar{f} \frac{\delta N}{4\pi V}.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.14) y haciendo $\partial \varepsilon_F / \partial p_F = p_F m^*$, se obtiene

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{\bar{f}}{2V} + \frac{\pi^2 \hbar^3}{p_F m^* V}. \quad (2.15)$$

† Cuando $T = 0$ también $S = 0$ y entonces no es necesario distinguir entre compresibilidad isoterma y adiabática. Se define la magnitud u mediante la expresión usual para la velocidad del sonido en el líquido. Sin embargo, debe recordarse que a $T = 0$ el sonido ordinario no puede realmente propagarse en un líquido de Fermi; ver al principio de § 4.

Finalmente, sustituyendo $1/m^*$ de (2.11) y utilizando una vez más (1.1), resulta

$$u^2 = \frac{p_F^2}{3m^2} + \frac{1}{3m} \left(\frac{p_F}{2\pi\hbar} \right)^3 \int f(\vartheta) (1 - \cos \vartheta) d\vartheta'. \quad (2.16)$$

Con $f(\vartheta)$ tomada de (2.7) y utilizando (2.12) podemos poner esta expresión en la forma

$$u^2 = \frac{p_F^2}{3mm^*} [1 + \overline{F(\vartheta)}]. \quad (2.17)$$

La función f debe satisfacer ciertas condiciones que son el resultado del requisito de estabilidad del estado fundamental del líquido. Este estado corresponde a la ocupación de todos los estados de cuasipartículas que hay dentro de la esfera de Fermi y su energía debe ser un mínimo respecto a cualquier pequeña deformación de la esfera. No daremos todos los cálculos detalladamente, sino únicamente los resultados finales,† que pueden expresarse de modo conveniente mediante el desarrollo de las funciones $F(\theta)$ y $G(\theta)$ definidas en (2.4) en serie de polinomios de Legendre:

$$F(\vartheta) = \sum_l (2l+1) F_l P_l(\cos \vartheta), \quad G(\vartheta) = \sum_l (2l+1) G_l P_l(\cos \vartheta); \quad (2.18)$$

con esta definición, los coeficientes F_1 y G_1 son los valores medios de los productos FP_1 y GP_1 . Entonces las condiciones de estabilidad son las desigualdades

$$F_l + 1 > 0, \quad (2.19)$$

$$G_l + 1 > 0. \quad (2.20)$$

Una comparación de (2.19) para $l = 1$ con la expresión (2.12) de la masa efectiva muestra que esta última es positiva. La condición (2.19) para $l = 0$ asegura que (2.17) es positiva.‡

§ 3. Susceptibilidad magnética de un líquido de Fermi

Una cuasipartícula con spin no nulo tiene en general también un momento magnético. En el caso de spin $\frac{1}{2}$, el operador de este momento es $\beta\sigma$ (la componente z del momento magnético es $\pm\beta$). La constante $2\beta/\hbar$ que da el cociente entre el momento magnético de la cuasipartícula y su momento angular $\frac{1}{2}\hbar$ es igual a la cons-

† Ver I. Ya. Pomeranchuk, *Soviet Physics JETP*, **8**, 361, 1959.

‡ En el caso $l = 1$, tenemos también la desigualdad $F_1 > G_1$ como ha demostrado A. J. Leggett, *Annals of Physics* **46**, 76, 1968.

tante correspondiente para las partículas reales; evidentemente el valor de este cociente resulta invariable cualquiera que sea el modo de adicionar spines de partícula al spin de la cuasipartícula.

La existencia del momento magnético de la cuasipartícula conduce a su vez al paramagnetismo del líquido. La susceptibilidad magnética correspondiente puede calcularse del modo siguiente.

En el caso de una cuasipartícula «libre», el operador de su energía adicional cuando está en el interior del campo magnético \mathbf{H} será $-\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}$. Sin embargo, en un líquido de Fermi, debemos tener en cuenta que la interacción entre las cuasipartículas hace que varíe la energía de cada una de ellas, puesto que la función de distribución resulta alterada en presencia del campo magnético. Por consiguiente, al calcular la susceptibilidad magnética debemos escribir el operador de variación de la energía de la cuasipartícula como

$$\delta\hat{\varepsilon} = -\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H} + \text{tr}' \int f' \delta\hat{n}' d\tau'. \quad (3.1)$$

La variación de la función de distribución viene dada en función de $\delta\hat{\varepsilon}$ por $\delta\hat{n} = (\delta n/\delta\varepsilon)\delta\varepsilon$;† así pues, tenemos

$$\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) = -\beta\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H} + \text{tr}' \int f'(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (dn'/d\varepsilon') \delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}') d\tau'. \quad (3.2)$$

Sólo necesitamos la solución de esta ecuación en la superficie de la esfera de Fermi y la buscaremos en la forma

$$\delta\hat{\varepsilon} = -\frac{1}{2}\beta g\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{H}, \quad (3.3)$$

siendo g una constante. En el caso de una función escalón $n(\mathbf{p}') = \theta(p')$, tenemos

$$dn'/d\varepsilon' = -\delta(\varepsilon' - \varepsilon_F),$$

de modo que la integración sobre $d\mathbf{p}' = d\varepsilon'/v_F$ se reduce a tomar el valor del integrando en la superficie de Fermi. Sustituyendo f a partir de (2.4) y observando que las matrices de Pauli satisfacen

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \text{tr}'(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\sigma}') \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} \text{tr}' \boldsymbol{\sigma}'\cdot\boldsymbol{\sigma}' = 2\boldsymbol{\sigma},$$

se tiene

$$g = 2 - \overline{gG(\theta)},$$

† Al calcular el incremento dependiente del tiempo δn , podemos despreciar la variación del potencial químico. La variación de la magnitud macroscópica μ en un líquido isótropo sólo puede ser cuadrática con el campo \mathbf{H} (que se supone que es pequeño al calcular la susceptibilidad) mientras que $\delta\hat{\varepsilon}$ es del primer orden en el campo. Como la susceptibilidad magnética del líquido es pequeña, no necesitamos distinguir entre el campo y la inducción en él.

o bien

$$g = 2/[1 + \overline{G(\beta)}], \quad (3.4)$$

en donde de nuevo designamos con la barra un promedio respecto a las direcciones como en (2.12).

La susceptibilidad χ se determina a partir de la expresión que nos da el momento magnético por unidad de volumen del líquido:

$$\chi \mathbf{H} = \beta \operatorname{tr} \int \boldsymbol{\sigma} \delta \hat{n} \, d\tau = \beta \operatorname{tr} \int \boldsymbol{\sigma} \delta \hat{\varepsilon} (\partial n / \partial \varepsilon) \, d\tau$$

o, después de integrar con la función escalón $n(\mathbf{p})$,

$$\chi \mathbf{H} = -\beta \frac{p_F m^*}{2\pi^2 \hbar^3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \delta \hat{\varepsilon} (p_F).$$

Finalmente sustituyendo (3.3) y (3.4) y observando que $\operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}) \boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{H}$, se encuentra

$$\chi = \frac{\beta^2 p_F m^*}{\pi^2 \hbar^3 (1 + \overline{G})} = \frac{3\gamma \beta^2}{\pi^2 (1 + \overline{G})}, \quad (3.5)$$

en donde γ es el coeficiente de la ley lineal del calor específico (1.15). La expresión $\chi = 3\gamma \beta^2 / \pi^2$ nos da la susceptibilidad de un gas de Fermi degenerado de partículas con momento magnético β ; ver Parte 1, (59.5). El factor $1/(1 + \overline{G})$ representa la diferencia entre un líquido de Fermi y un gas de Fermi.†

La condición de estabilidad (2.20) con $l = 0$ es la misma que la condición $\chi > 0$.

§ 4. Sonido cero

Los estados de no equilibrio de un líquido de Fermi se describen mediante funciones de distribución de cuasipartículas que dependen no sólo de los momentos, sino también de las coordenadas y del tiempo. Estas funciones $\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ satisfacen una ecuación de transporte

$$d\hat{n}/dt = I(\hat{n}), \quad (4.1)$$

en donde $I(\hat{n})$ es la *integral de colisión* que da la variación del número de cuasipartículas en un elemento dado del volumen de fases debida a las colisiones entre ellas.‡

† En el caso del He³, $\overline{G} \approx -2/3$.

‡ Esta sección presupone que el lector está familiarizado con la ecuación de transporte y en este aspecto se sale del objetivo del libro. Sin embargo, la teoría de los líquidos de Fermi resultaría incompletamente formulada sin la ecuación de transporte (y su aplicación en §§ 4 y 5). Sólo necesitaremos la ecuación sin la integral de colisión; los problemas en que interviene la forma específica de esta integral se estudiarán en otro volumen que trata de cinética física.

La derivada total respecto al tiempo en (4.1) incluye tanto la dependencia explícita de \hat{n} con t como la dependencia implícita debida a la variación de las coordenadas, impulso y variables de spin de las cuasipartículas de acuerdo con sus ecuaciones del movimiento. La característica distintiva del líquido de Fermi puesto que la energía de la cuasipartícula es una funcional de la función de distribución, en un líquido inhomogéneo, es que tanto ε como \hat{n} dependen de las coordenadas.

En el caso de distribuciones n que difieren sólo ligeramente de la distribución de equilibrio n_0 , escribiremos

$$\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{p}) + \delta\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \quad (4.2)$$

La energía de la cuasipartícula es entonces $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \delta\hat{\varepsilon}$, siendo ε_0 la energía correspondiente a la distribución de equilibrio mientras que $\delta\hat{\varepsilon}$ viene dada por (2.1), de modo que

$$\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\delta\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = \text{tr}' \int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial\delta\hat{n}(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{r}} d\tau'. \quad (4.3)$$

Si no existe ningún campo magnético externo, ε_0 y n_0 son independientes del spin.

La dependencia temporal explícita de \hat{n} da un término en $d\hat{n}/dt$

$$\partial\hat{n}/\partial t = \partial\delta\hat{n}/\partial t.$$

La dependencia de las coordenadas y el impulso da los términos

$$\frac{\partial n}{\partial\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \frac{\partial n}{\partial\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

La energía $\hat{\varepsilon}$ de la cuasipartícula juega el papel del hamiltoniano. A partir de las ecuaciones de Hamilton,

$$\hat{\mathbf{r}} = \partial\hat{\varepsilon}/\partial\mathbf{p}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -\partial\hat{\varepsilon}/\partial\mathbf{r}.$$

Así tenemos, hasta los términos de primer orden en $\delta\hat{n}$,

$$\frac{\partial\delta\hat{n}}{\partial\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial\delta\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}}.$$

Finalmente, la variación respecto al tiempo de la función \hat{n} considerada como un operador respecto a las variables de spin viene dada, de acuerdo con las reglas generales de la mecánica cuántica, por el conmutador

$$(i/\hbar) [\hat{\varepsilon}, \hat{n}]. \quad (4.4)$$

Sin embargo, cuando n_0 y ε_0 son independientes del spin, no existen en este conmutador términos de primer orden en $\delta\hat{n}$.

Reuniendo los diversos términos, obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial\delta\hat{n}}{\partial t} + \frac{\partial\varepsilon_0}{\partial\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial\delta\hat{n}}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\delta\varepsilon}{\partial\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial n_0}{\partial\mathbf{p}} = I(\hat{n}). \quad (4.5)$$

Antes de pasar a aplicar la ecuación de transporte, estudiemos las condiciones para que resulte válida. Al utilizar las ecuaciones clásicas respecto a las coordenadas y el impulso, hemos admitido que el movimiento de las cuasipartículas es cuasiclásico; la misma hipótesis subyace ya de modo esencial en la descripción del líquido mediante una función de distribución que depende a la vez de las coordenadas y de los impulsos de las cuasipartículas. La condición para que se tenga el movimiento cuasiclásico es que la longitud de onda de Broglie \hbar/p_F de la cuasipartícula sea pequeña en comparación con la longitud característica L sobre la cual varía n de modo considerable. Si se utiliza en lugar de L el «número de ondas» de la inhomogeneidad, $k \sim 1/L$, podemos escribir esta condición como†

$$\hbar k \ll p_F. \quad (4.6)$$

La frecuencia ω de la variación de la función de distribución que se establece para un k dado es del orden de $v_F k$ y automáticamente satisface la condición

$$\hbar\omega \ll \varepsilon_F. \quad (4.7)$$

Puede existir cualquier relación entre $\hbar\omega$ y la temperatura T . Si $\hbar\omega \gg T$, la anchura de la zona de transición de la función de distribución es $\hbar\omega$; entonces (4.7) es la condición necesaria para que sea válida toda la teoría, asegurando que la incertidumbre cuántica de la energía de la cuasipartícula (debida a sus colisiones) es pequeña en comparación con $\hbar\omega$.

Apliquemos ahora la ecuación de transporte para estudiar el movimiento de vibración en un líquido de Fermi.

A temperaturas bajas (pero no cero), se producen colisiones entre las cuasipartículas de un líquido de Fermi y el tiempo libre medio es $\tau \propto T^{-2}$. La naturaleza de las ondas que se propagan en el líquido depende esencialmente del valor de $\omega\tau$.

Cuando $\omega\tau \ll 1$ (que es efectivamente la condición para que el recorrido libre medio de las cuasipartículas l sea pequeño en comparación con la longitud de onda λ), las colisiones son capaces de llevar al equilibrio termodinámico en cada elemento de volumen del líquido (pequeño en comparación con λ). Esto significa que tenemos ondas sonoras hidrodinámicas ordinarias propagándose con velocidad $u = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$.

† De acuerdo con la definición (1.1), \hbar/p_F es del orden de las distancias interatómicas, de modo que la condición (4.6) es muy débil.

La absorción de las ondas sonoras es pequeña cuando $\omega\tau \ll 1$, pero aumenta con $\omega\tau$, y para $\omega\tau \sim 1$ resulta muy intensa, de modo que se hace imposible su propagación.†

Cuando $\omega\tau$ aumenta aún más, hasta ser $\omega\tau \gg 1$, resulta de nuevo posible la propagación de las ondas sonoras en el líquido de Fermi, pero ahora las ondas tienen un carácter físico diferente. En estas vibraciones, carecen de importancia las colisiones de las cuasipartículas y no se establece el equilibrio termodinámico en cada elemento de volumen. Puede considerarse que el proceso ocurre como si se produjese en el cero absoluto de temperatura. Estas ondas se denominan *sonido cero*.

De acuerdo con el análisis anterior, puede omitirse la integral de colisión en la ecuación de transporte cuando $\omega\tau \gg 1$; entonces

$$\frac{\partial \delta \hat{n}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \delta \hat{n}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial \delta \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (4.8)$$

en donde $\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ es la velocidad de la cuasipartícula calculada a partir de la energía sin perturbar ε ($\mathbf{v} = v_F \mathbf{n}$, en donde \mathbf{n} es un vector unitario en la dirección de \mathbf{p}); en esta ecuación y en lo sucesivo se omite el subíndice 0.

Cuando $T = 0$, la función de distribución de equilibrio n_0 es una función escalón $\theta(p)$ que corta en el impulso límite $p = p_F$. Su derivada es

$$\partial n_0 / \partial \mathbf{p} = -\mathbf{n} \delta(p - p_F) = -\mathbf{v} \delta(\varepsilon - \varepsilon_F).$$

Suponiendo que la dependencia con el tiempo y las coordenadas de δn en la onda viene dada por el factor $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$, buscaremos una solución de la ecuación de transporte en la forma

$$\delta \hat{n} = \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \hat{\nu}(\mathbf{n}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (4.9)$$

Entonces (4.8) con $\partial \delta \hat{\varepsilon} / \partial \mathbf{r}$ dada en (4.3), se transforma en

$$(\omega - v_F \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) \hat{\nu}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \frac{p_F^2}{(2\pi\hbar)^3} \text{tr}' \int \hat{f}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') \hat{\nu}(\mathbf{n}') d\omega, \quad (4.10)$$

en donde \mathbf{n} y \mathbf{n}' son vectores unitarios en las direcciones \mathbf{p} y \mathbf{p}' y la integración se realiza sobre las direcciones de \mathbf{n}' .

Consideremos vibraciones (sonido cero) que no afecten a las propiedades de spin del líquido. Esto significa que tanto la distribución de equilibrio como su «per-

† Cuando $\omega\tau \ll 1$, el coeficiente de absorción del sonido $\gamma \sim \omega^2 \eta / \rho u^3$ siendo η la viscosidad del líquido. En órdenes de magnitud, $u \sim v_F$, $\eta / \rho \sim v_F / l \sim v_F^2 \tau$, siendo v_F la velocidad de la cuasipartícula (independiente de la temperatura), de modo que $\eta \propto T^{-2}$ (I. Ya. Pomeranchuk 1950). Entonces $\gamma u / \omega \sim \omega\tau \propto \omega T^2$.