

Introducción a la Mecánica Cuántica

D. T. Gillespie



EDITORIAL REVERTÉ

Introducción a la Mecánica Cuántica

Introducción a la Mecánica Cuántica

D. T. Gillespie



**EDITORIAL
REVERTÉ**

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:

A Quantum Mechanics Primer

Edición original en lengua inglesa publicada por:

Intertext Books

Copyright © by International Textbook Company Limited

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 1976

ISBN 978-84-291-4039-2

Edición e-book (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 2021

ISBN 978-84-291-9044-1

Versión española por el:

Dr. Julián Fernández Ferrer

Catedrático de Física de la Universidad

Politécnica de Barcelona

Fellow of the Institute of Mathematics

and its Applications

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

A mi esposa

Louise

Prólogo

En este libro he intentado presentar una exposición algo simplificada pero esencialmente «honesta» y que no requiera conocimientos previos, de la teoría formal de la Mecánica Cuántica, dirigida a estudiantes del primer ciclo de Ciencias o Ingeniería. No he intentado tratar ninguna de las aplicaciones tradicionales de la Mecánica Cuántica; en vez de ello he pretendido solamente presentar un desarrollo axiomático conciso de la teoría, con una visión que ponga de manifiesto de la manera más clara posible las principales características de su estructura matemática y conceptual.

El libro ha salido de una serie de conferencias que di a un curso intermedio de la Johns Hopkins University en la primavera de 1967. Ese experimento consistente en introducir la Mecánica Cuántica antes de lo que es usual me convenció de que, si se es suficientemente selectivo y minucioso, se puede dar a los alumnos del nivel ensayado un conocimiento sorprendentemente bueno de la estructura formal de la Mecánica Cuántica. Este libro representa una ampliación y reajuste de aquellas conferencias, si bien el método y la meta han quedado esencialmente invariados.

Hay que hacer resaltar que este libro no puede ni pretende «suplantar» a ninguno de los textos existentes que tratan la Mecánica Cuántica elemental. Su fin es, más bien, complementar dichos textos proporcionando al estudiante una perspectiva simplificada pero significativa de la teoría. Para lograr dicha perspectiva, hay que dar prioridad a la concisión y a la claridad; en consecuencia, he intentado evitar en este libro la busca de resultados que no sean absolutamente necesarios para el desarrollo de los principales aspectos de la teoría, aun cuando dichos resultados sea adecuado buscarlos como materia del curso en los tratamientos pausados y más extensos que se encuentran en los textos normales. Al mismo tiempo, el tratamiento restringido que se da en este libro contribuirá, en virtud de su concisión, a la comprensión por parte del estudiante y a la apreciación de los desarrollos más elaborados de los textos normales. Teniendo esto presente, creo que este libro puede ser apropiado para cualquiera de los siguientes fines:

(i) Como texto para un curso de medio semestre en el que se introduzca la Mecánica Cuántica a los alumnos que hayan superado el primer curso de Ciencias o Ingeniería.

(ii) Como texto de «calentamiento» o «auxiliar» para un curso normal de introducción a la Mecánica Cuántica para ciclos superiores al primero.

(iii) Como texto de lectura complementaria para alumnos aún no graduados.

(iv) Como libro de estudio autónomo para estudiantes que sigan, o hayan seguido recientemente, un primer curso normal de Mecánica Cuántica.

El libro no requiere conocimientos previos de la materia, si bien se suponen los siguientes requisitos previos: buena base de Física General (concretamente, conocimiento de la Mecánica clásica elemental, más una noción de cuándo no es adecuada la teoría clásica, tomando como ejemplos la radiación del cuerpo negro, el átomo de Bohr y el experimento de Davisson y Germer); buen conocimiento del Cálculo elemental en el que haya estudiado la integral impropia y la integración por partes; cierto dominio del Álgebra vectorial en tres dimensiones, que incluya al producto escalar; y por último, la noción de número complejo.

Como la meta y el método de este libro son totalmente diferentes de los de los textos normales de Mecánica Cuántica elemental, a estas notas sigue un «Prólogo para el profesor». En él he intentado explicar muy brevemente el plan y organización del libro para provecho de los que ya tengan cierto conocimiento del tema.

Me place agradecer la ayuda de muchas personas que han contribuido, de muy diversas maneras, a la confección de este libro. Primeramente, tengo una deuda de gratitud con el Profesor F. Mandl autor del extraordinario libro *Quantum Mechanics* (Butterworths Publications, Ltd., London) en el cual aprendí gran parte de lo que sé acerca de este tema. El método general de mi libro sigue, en muchos aspectos, el del libro de Mandl y si mi libro pudiera lograr en su nivel algo de lo que ha logrado Mandl en un nivel superior, me sentiría muy satisfecho. Quiero agradecer a mi curso 1966-67 de Física General en la Johns Hopkins University por haberse prestado de tan buena gana al experimento; sin su verdadero interés en mis conferencias originales y su reacción ante ellas, no se habría podido escribir este libro. En particular, me place agradecer a la Profesora Brian R. Judd de la Johns Hopkins University, no sólo el haber tenido la amabilidad de leer dos borradores del manuscrito, sino también sus observaciones y el ánimo que me dio. Estoy muy agradecido a mis buenos amigos el Profesor Joseph D. Sneed de la Stanford University, el Dr. Gary A. Prinz de NRL, el Profesor James S. Marsh de la University of West Florida, el Dr. Edward J. Moses de la Vanderbilt University y el Profesor Ed S. Dorman de la Western Kentucky University, por haberme comunicado sus concienzudas opiniones acerca de diversas partes del libro. Al dar las gracias a todos los antes mencionados, no quiero dar la impresión de que mi libro refleje necesariamente en cada detalle sus propios puntos de vista acerca de la Mecánica Cuántica; en realidad, el hecho de que este tema signifique a menudo cosas tan diferentes a personas diferentes es para mí uno de sus más fascinantes y deleitables atributos.

DANIEL T. GILLESPIE

College Park, Maryland

Prólogo para el profesor

El plan general del libro nos lo marca el índice: El capítulo 1 orienta al estudiante; el capítulo 2 desarrolla la matemática necesaria; el capítulo 3 repasa brevemente las características sobresalientes de la Mecánica clásica elemental (y en el proceso da un estudio y una deducción simplificada de las ecuaciones de Hamilton); y las tres cuartas partes restantes del libro están contenidas en el capítulo 4 en el que se desarrolla la Mecánica Cuántica.

La teoría se desarrolla para un sistema no relativista de un solo grado de libertad mediante la representación posicional de la imagen de Schrödinger —es decir, Mecánica ondulatoria unidimensional. No obstante, siempre se intenta hacer esto bajo capa de la teoría general de Dirac; concretamente, aun cuando no se utiliza la notación «bra-ket» de Dirac, el tema central del desarrollo es que la Mecánica Cuántica trata, desde el punto de vista matemático, con vectores y operadores en un espacio de Hilbert. En consecuencia, se considera siempre a $\Psi_t(x)$ como vector de estado del sistema, que puede «desarrollarse como combinación lineal de los vectores propios $\{\alpha_n(x)\}$ del operador observable $\hat{A}$, $\Psi_t(x) = \sum_n (\alpha_n, \Psi_t) \alpha_n(x)$, en cuanto que estos vectores propios formen una base ortonormal en el espacio de Hilbert de infinitas dimensiones». Este método debe llevar al estudiante a una comprensión más profunda de la teoría que la que se conseguiría mediante el método inmediato de la «función de onda», si bien requiere una exposición simplificada, aunque indicando el significado, de la matemática del espacio de Hilbert. Esto lo tenemos en §§ 2-2, 2-3 y 2-4. La clave para esta exposición se encuentra en § 2-3, donde se desarrolla el concepto de espacio vectorial de Hilbert en estrecha analogía con la conocida noción de vector en tres dimensiones. El sentido de este apartado se resume en la tabla de la página 23 y da pie a ulteriores comentarios.

La principal analogía vectorial se obtiene en realidad entre un segmento orientado $\mathbf{v}$ y una función compleja ψ de una variable real x ; pero, al menos inicialmente, no se obtiene entre la n -pla de componentes $\{v_i\}$ y $\{\psi(x)\}$. Dicho de otro modo, en § 2-3 no consideramos la x de $\psi(x)$ como un índice de componente continuo, sino más bien como la variable de la función ψ , que es el vector abstracto en el espacio de Hilbert. Se hace esto para poner de relieve el hecho importante de que un vector en el espacio de Hilbert existe independientemente de cualquier base particular de representación, al igual que sucede con un vector en un espacio de tres dimensiones. Exponiendo la

analogía entre las definiciones de producto escalar $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \equiv v_1 v_2 \cos \theta_{12}$ y $(\psi_1, \psi_2) \equiv \int \psi_1^*(x) \psi_2(x) dx$, que sólo se consideran como maneras de obtener un escalar de dos vectores de tal forma que se cumplan ciertas reglas, se puede entonces pasar a cualquier representación particular por n -pla de los vectores $\mathbf{v}$ y $\psi(x)$ mediante los conjuntos de productos escalares $\{\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{v}\}$ y $\{(\mathbf{e}_n, \psi)\}$. Después de estudiar la función delta de Dirac en § 4-6b, se demuestra que un vector en el espacio de Hilbert «se representa a sí mismo» respecto a los vectores propios de base del operador posición—es decir, que $\{(\delta_v, \psi)\} = \{\psi(v)\}$. Pero este hecho sólo se considera como «resultado interesante» y no como característica clave del concepto de espacio de Hilbert. Este punto de vista no sólo es coherente, sino que tiene la importante ventaja pedagógica de suprimir la estrechez conceptual de trabajar en la representación posicional, llevando con ello al estudiante mucho más cerca del espíritu real del método de Dirac exento de coordenadas.

Para mantener el desarrollo de la teoría cuántica lo menos complicado posible, se imponen tres restricciones simplificadoras: (i) el sistema tiene un solo grado de libertad, (ii) los valores propios del operador se distribuyen de manera totalmente discreta, y (iii) los valores propios del operador no son degenerados. No obstante, en los apartados finales del libro (§§ 4-6a, 4-6b y 4-6c) se presentan discusiones breves que muestran cómo se modifica la teoría al suprimir cada una de dichas restricciones. La función delta de Dirac en particular, sube muy deprisa hasta § 4-6b e incluso aquí sólo se estudia brevemente.

El método de presentación del capítulo 4 es postulativo-deductivo: el juego consiste en deducir, desarrollar y sintetizar las implicaciones de seis postulados fundamentales dando una imagen coherente de la Mecánica Cuántica. Dichos postulados se encuentran en las páginas siguientes:

Postulado 1 (el vector de estado)	p. 40
Postulado 2 (operadores observables)	p. 42
Postulado 3 (predicciones de medida)	p. 48
Postulado 4 (efectos de la medida)	p. 56
Postulado 5 (evolución en el tiempo)	p. 68
Postulado 6 (posición y cantidad de movimiento)	p. 82

A lo largo de todo el desarrollo se hace resaltar que la principal diferencia entre las Mecánicas clásica y cuántica no reside en sus respectivos esquemas de la evolución temporal de un sistema, sino más bien en sus respectivos conceptos de «estado», «observables» y «medida». Los tres primeros apartados del capítulo 4, que abarcan los postulados 1 a 4, se dedican a dilucidar cuidadosamente tales conceptos. El tratamiento de dichos temas sigue la interpretación ortodoxa «de Copenhague» de la Mecánica Cuántica, por cuanto parece haber ganado la aceptación de la mayoría de físicos actuales. La tesis esencial de la interpretación de Copenhague es que la Mecánica Cuántica proporciona una descripción completa y objetiva de la Dinámica de un sistema que no es solamente una descripción de nuestro estado de conocimiento de dicha Dinámica, ni es simplemente una descripción de la Dinámica media de un

conjunto estadístico de sistemas. La interpretación de Copenhague implica conclusiones un tanto radicales relativas a los conceptos de «estado», «observables» y «medida», conclusiones muy desarrolladas y consideradas en serio (como, por ejemplo, en el estudio de § 4-3b del «valor de un observable» y en el de § 4-5b de la «dualidad onda-partícula»). Al seguir la interpretación de Copenhague no se pretende que sea necesariamente mejor o más correcta que cualquier otra; pero el hecho es que si se pretende una comprensión completa de la Mecánica Cuántica, no es posible evitar el adoptar, aun cuando sea a título de ensayo, un cierto punto de vista y parece razonable, a estas alturas, adoptar el más comúnmente aceptado.

El estudio de la teoría de la medida de § 4-3 se basa en una definición un tanto idealista o simplista de la medida —que es una operación física bien definida en principio, la cual al efectuarla sobre un sistema, da un número real único carente de error. Se desarrollan con especial cuidado los conceptos de valor de la esperanza y de incertidumbre, habiéndose fundamentado ya este tratamiento en § 2-1 estudiando un experimento sencillo de «sorteo aleatorio». Se da un estudio cuidadoso del problema de compatibilidad que culmina enunciando y demostrando el Teorema de la Compatibilidad y el Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

En § 4-4 se aborda el problema general de la evolución temporal del estado cuántico (Postulado 5). Se hace hincapié en las semejanzas existentes entre las evoluciones temporales de los estados cuántico y clásico. También se insiste en la íntima conexión existente entre la energía de un sistema y su desarrollo temporal, según se pone de manifiesto en: el operador evolución en el tiempo, el principio de incertidumbre tiempo-energía, el requisito de que un observable sea una constante del movimiento y el papel importante que desempeñan los estados estacionarios. Este libro no aborda el estudio, como hacen otros, de la identificación del operador energía con el operador $i\hbar\partial/\partial t$; creemos que ello no corresponde a una teoría no relativista en la que los vectores en el espacio de Hilbert no son función del tiempo.

Los operadores observables específicos $\hat{X} = x$ y $\hat{P} = -i\hbar\partial/\partial x$ se introducen, finalmente, en § 4-5 (Postulado 6). Entonces, las dos ecuaciones de Schrödinger, la de probabilidad de posición y corriente de probabilidad de posición y las ecuaciones de Ehrenfest se deducen todas de la formulación más general de los cuatro apartados anteriores. En este apartado destaca de manera prominente un estudio de la dualidad corpúsculo-onda, otro acerca del límite clásico de la Mecánica Cuántica y otro del pozo cuadrado infinito (único «problema real» considerado en todo el libro).

El libro concluye con § 4-6, en donde se intenta dar al estudiante una idea aproximada de lo que sucede cuando se suprimen las restricciones simplificadoras antes mencionadas. Este apartado pretende sobre todo alisar el camino que lleva a un estudio más detallado y amplio de los textos normales.

En el texto se han intercalado 73 ejercicios, la mayoría de los cuales son cortos y fáciles. Con ellos se pretende dar al estudiante un mayor sentido de participación activa en el desarrollo de la teoría.

La formulación concisa del teorema de compatibilidad se ha tomado de la obra de F. Mandl,[†] la cual también ha inspirado la analogía entre $\mathcal{E}_3$ y $\mathcal{H}$, así como el

método global de los postulados fundamentales. El desarrollo de la relación de incertidumbre tiempo-energía y el estudio de la interpretación clásica de las ecuaciones de Ehrenfest siguen el tratamiento que se da en el texto de A. Messiah.[‡] El autor reconoce agradecido la ayuda particular que ha recibido de estos dos textos «clásicos» y los recomienda al lector interesado en proseguir el estudio de la Mecánica Cuántica más allá de los confines de este libro.

† F. Mandl, *Quantum Mechanics*, Butterworths Publications, Ltd., London, 1957.

‡ Albert Messiah, *Quantum Mechanics* (2 tomos), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1962.