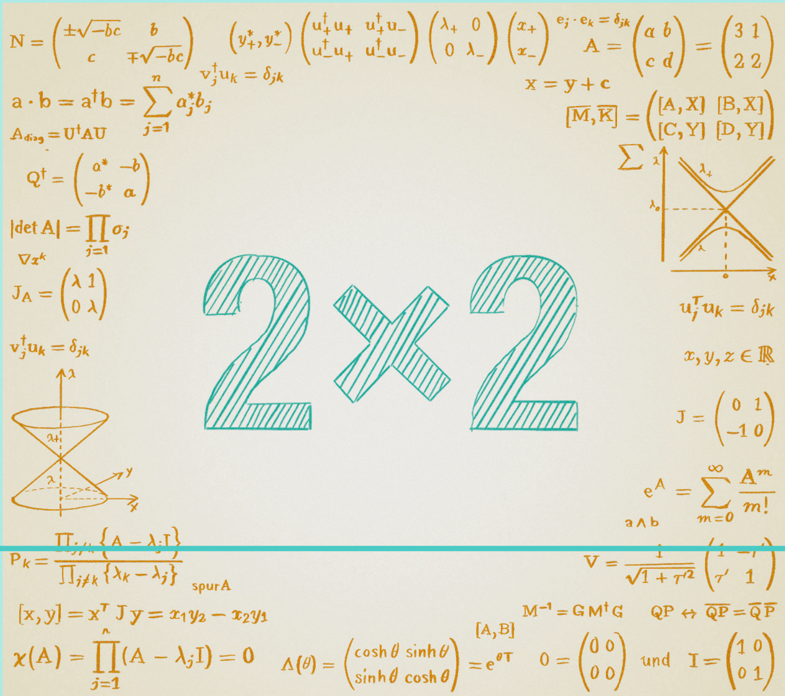
Hans Jürgen Korsch

Mathematik mit 2×2-Matrizen

Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben



HANSER

Korsch

Mathematik mit 2 x 2 Matrizen

Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Hans Jürgen Korsch

Mathematik mit 2 x 2 Matrizen

Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben

HANSER

Autor:

Prof. Dr. Hans Jürgen Korsch
Technische Universität Kaiserslautern
Fachbereich Physik

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.
Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München
Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Titelbild:
Satz: Hans Jürgen Korsch
Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46693-7
E-Book-ISBN 978-3-446-46805-4

Vorwort

Matrizen sind ein Schlüsselkonzept der linearen Algebra. Sie ermöglichen eine einfache und übersichtliche Beschreibung komplexer mathematischer Zusammenhänge. Daher werden sie in Wirtschaft, Technik und Wissenschaft in vielfältiger Weise eingesetzt, um mathematische Operationen zu erleichtern. Zudem helfen Matrix-Methoden bei der numerischen Lösung von Problemen. Dieses Lehrbuch vermittelt die notwendigen mathematischen Grundlagen, um Rechenoperationen mit einfachen sowie speziellen Matrizentypen durchzuführen. Es wendet sich in erster Linie an Studierende der Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, zum Selbststudium oder als Begleitmaterial zu Vorlesungen, kann aber allen an den Methoden und Anwendungen der Matrizenrechung Interessierten gute Dienste leisten.

Zum Aufbau des Buches: In den ersten Kapiteln werden die wichtigsten Grundlagen der Matrix-Algebra dargestellt, also das Rechnen mit Matrizen, die Rolle der Eigenwerte und Eigenvektoren und die wichtigsten Matrixtransformationen, Produktzerlegungen und Matrixfunktionen. Anschließend wird genauer auf spezielle Matrizentypen und Matrixgruppen sowie lineare Abbildungen eingegangen. Kapitel zu komplexen Zahlen, Quaterionen, Matrix-Gruppen und Lie-Algebren runden das Lehrbuch ab.

Das Schwergewicht der Darstellung liegt auf einer sorgfältigen Behandlung für die überschaubaren 2×2-Matrizen. Hier sind mathematische Beweise explizit ausgeführt, während auf höherdimensionale Verallgemeinerungen oft nur hingewiesen wird.

In jedem Kapitel werden die mathematischen Theoreme und Methoden durch Beispiele, Anwendungen und viele Übungsaufgaben (mit Lösungen) illustriert. Wesentlich mehr Anwendungsbeispiele der Matrizen, hauptsächlich aus den verschiedensten Gebieten der Physik, findet man in dem parallel erschienenen Lehrbuch:

Korsch, Hans Jürgen: *Physik mit* 2×2 *Matrizen. Ein Lehrbuch mit Beispielen und Übungsaufgaben*, Carl Hanser Verlag 2021, Print-ISBN 978-3-446-46694-4, E-Book-ISBN 978-3-446-46806-1 .

Verweise auf diesen Text werden im vorliegenden Buch durch „P2“ angegeben, also beispielsweise als „Mehr dazu findet man in P2, Abschnitt 2.4.“

Viele der Anwendungsbeispiele für einen Einsatz von Matrix-Methoden stammen aus dem Gebiet der Quantenmechanik. Im Rahmen des vorliegenden Buches können die dazu notwendigen mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik nur sehr knapp dargestellt werden. Mehr dazu findet man in dem Lehrbuch:

Korsch, Hans Jürgen: *Mathematik der Quantenmechanik*, Carl Hanser Verlag 2019, Print-ISBN 978-3-446-46226-7, E-Book-ISBN 978-3-446-46255-7 .

Denjenigen, die noch tiefer in die Matrizentheorie einsteigen möchten, seien die folgenden Lehrbücher empfohlen:

Gantmacher, Felix R.: *Matrizentheorie*, Springer Verlag 1986

Kühnel, Wolfgang: *Matrizen und Lie-Gruppen - Eine geometrische Einführung*, Vieweg + Teubner Verlag 2011

Im vorliegenden Buch wurde auf die oft üblichen detaillierten Literaturangaben der Quellen oder der weiterführenden Arbeiten weitgehend verzichtet, da es nach Ansicht des Autors zunehmend einfacher ist, weitere Informationen zu interessanten Themen im Internet zu „ergoogeln", beispielsweise über die immer besser werdenden Einträge bei Wikipedia. Voraussetzung dafür sind natürlich Grundkenntnisse der Thematik und der relevanten Schlagwörter. Quellenangaben gibt es jedoch dort, wo dies unverzichtbar erschien, beispielsweise weil der vorliegende Text sich stark an dieser Literatur orientiert oder weil die betreffenden Arbeiten schwer auffindbar sind.

Ein paar Worte zur Rolle der vielen Aufgaben im Text. Sie sind bewusst einfach gehalten und lassen sich in der Regel in wenigen Denk- und Rechenschritten lösen. Sie haben einerseits das Ziel, dazu anzuregen, aktiv an der Entwicklung eines Themas mitzuarbeiten, um ein besseres Verständnis zu erreichen. Andererseits sollen auf diese Weise Nebenrechnungen, die den Textfluss stören könnten, ausgelagert werden. In allen Fällen findet man ausführliche Lösungen am Ende jedes Kapitels.

Der vorliegende Text beruht auf den Vorlesungen des Autors zu den mathematischen Grundlagen der Physik an der TU Kaiserslautern. Der Autor dankt den ehemaligen Mitgliedern seiner Arbeitsgruppe für viele Anregungen und Kommentare.

Weitere Hinweise und Vorschläge bitte an

`h.j.korsch@gmail.com`.

Eine aktuelle Korrekturliste und weitere Informationen findet man unter

https://www.hanser-fachbuch.de .

Mein Dank gilt auch dem Hanser Verlag für die freundliche Aufnahme des Buches und die hilfreiche Unterstützung durch sein Lektorat.

Kaiserslautern, Oktober 2020 Hans Jürgen Korsch

Inhalt

1 Matrizen: Grundlagen

„Mathematicians basically know everything there is to know about matrices.
It's one of the few subjects of math that's thoroughly well understood.“
— J. Weinstein, Boston University.

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Kenntnisse für das Arbeiten mit Matrizen bereitgestellt. Wir behandeln dabei in den meisten Fällen quadratische $n \times n$-Matrizen mit $n = 2, 3, \ldots$, deren Elemente in der Regel komplexe oder reelle Zahlen sind. Wir bezeichnen die Menge dieser Matrizen als $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Meist beschränken wir uns sogar auf 2×2-Matrizen, wobei allerdings Vorsicht geboten ist, denn nicht alle ihre Eigenschaften lassen sich auf höhere Matrixdimensionen übertragen. Mit diesen quadratischen Matrizen kann man unterschiedliche Rechenoperationen durchführen. Man kann sie addieren, sie mit Zahlen multiplizieren und sie auch miteinander multiplizieren, sie bilden eine Algebra. Mehr über die mathematischen Strukturen von Zahlen und Algebren wird in den Kapiteln 5 und 6 dargestellt. Spezielle Typen von Matrizen sind von besonderer Bedeutung, wie beispielsweise hermitesche, symplektische, orthogonale oder unitäre Matrizen. Einige dieser spezielle Matrizentypen bilden eine Gruppe, dazu mehr in Kapitel 3.

1.1 Lineare Räume

Matrizen lassen sich auffassen als lineare Abbildungen eines Vektorraumes auf einen zweiten (mehr dazu in Kapitel 4). Es sei kurz an die Definition eines Vektorraumes erinnert: Ein **Vektorraum** oder auch **linearer Raum** über den reellen oder komplexen Zahlen ist eine Menge von Elementen, wir nennen sie auch **Vektoren** und bezeichnen sie mit kleinen fetten römischen Buchstaben wie $\mathbf{a}$ oder $\mathbf{b}$, in der zwei Operationen definiert sind, eine Addition der Vektoren, geschrieben als $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, und eine Multiplikation mit Zahlen α, geschrieben als $\alpha\mathbf{a}$, wobei wir hier entweder griechische oder nicht-fette römische Buchstaben für die Zahlen verwenden. Damit man sinnvoll rechnen kann, müssen einige wenige Eigenschaften erfüllt sein:

- Die Addition muss assoziativ und kommutativ sein. Es muss also für alle Vektoren gelten $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ und $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$.
- Es muss ein **neutrales Element** der Addition existieren, der **Nullvektor** $\mathbf{0}$, mit $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{a}$.
- Es muss zu jedem Vektor $\mathbf{a}$ ein inverser Vektor $\mathbf{b}$ existieren mit $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Wir schreiben den inversen Vektor auch als $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$.
- Die Addition von Vektoren und die Multiplikation mit Zahlen müssen harmonieren, das heißt es muss gelten $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ und $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$ sowie $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ und $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Die kleinste Anzahl n von Vektoren $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,...,$\mathbf{x}_n$, durch die man jeden Vektor $\mathbf{a}$ als eine **Linearkombination**

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n \tag{1.1}$$

mit Koeffizienten α_j darstellen kann, heißt **Dimension** n des Vektorraumes und die $\mathbf{x}_j$ nennt man eine **Basis**.

Ein Beispiel eines Vektorraums ist der bekannte dreidimensionale euklidische Raum $\mathbb{R}^3$ mit den kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ oder, noch einfacher, der zweidimensionale euklidische Raum, die Ebene mit den kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$. Jeder Vektor aus diesem Raum lässt sich darstellen durch die Linearkombination $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ mit reellen Koeffizienten a_1 und a_2, was man auch kurz als $\mathbf{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$ schreiben kann, ein sogenannter Spaltenvektor. Der transponierte Vektor $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2)$ ist dann ein Zeilenvektor und den Spaltenvektor schreibt man auch als $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$. Wir sollten uns noch einmal vergewissern, dass diese Spaltenvektoren (oder auch die Zeilenvektoren) mit komponentenweiser Addition zweier Vektoren und mit komponentenweiser Multiplikation mit einer Zahl wirklich einen Vektorraum bilden!

Wenn wir komplexwertige Koeffizienten[1] zulassen, ist es zweckmäßig, neben dem transponierten Vektor einen hermitesch konjugierten Vektor $\mathbf{a}^\dagger = (a_1^*, a_2^*)$ zu definieren, also einen transponierten Vektor mit komplex konjugierten Koeffizienten. In einem Vektorraum über den reellen Zahlen ist also die hermitesche Konjugation gleich der Transposition.

Wir definieren jetzt ein weiteres Produkt als Summe der Produkte der Komponenten von $\mathbf{a}^\dagger$ und $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j^* b_j . \tag{1.2}$$

Dieses Produkt liefert nicht nur als Ergebnis eine komplexe Zahl, einen Skalar, sondern besitzt alle Eigenschaften eines komplexen oder reellen **Skalarproduktes**:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \qquad \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad (= 0 \text{ nur für } \mathbf{a} = \mathbf{0}) . \tag{1.4}$$

Mehr dazu in Abschnitt 2.3. Wir können dann von dem Betrag, oder der **Norm**[2], $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \geq 0$ eines Vektors sprechen. Normierte Vektoren haben den Betrag eins. Vektoren, deren Skalarprodukt gleich null ist, nennt man **orthogonal**. Es gelten die Ungleichungen

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad \text{und} \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| , \tag{1.5}$$

die **Dreiecksungleichung** und die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**.

Manchmal werden auch andere Schreibweisen für Vektoren benutzt, in der Physik beispielsweise eine Kennzeichnung durch einen Pfeil wie $\vec{a}$. In der Quantenphysik findet man oft die Dirac-Schreibweise eines Vektors als $|a\rangle$; der hermitesch konjugierte Vektor ist dann $\langle a|$ und das Skalarprodukt wird zu $\langle a|b\rangle$.

Die oben erwähnte kartesische Basis ist **orthonormiert**,

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases} \tag{1.6}$$

[1] Ein kurze Einführung in die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ findet man in Abschnitt 5.1.

[2] Da es andere Vektornormen gibt, nennt man diese Norm auch **euklidische Norm** und bezeichnet sie dann auch als $\|\mathbf{a}\|_2$.

mit dem Kronecker-Delta δ_{jk}. Wenn wir einen Vektor **a** in dieser orthonormierten Basis ausdrücken,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{e}_j, \tag{1.7}$$

dann können wir die Koeffizienten a_j ermitteln, indem wir das Skalarprodukt des Vektors **a** mit den Basisvektoren bilden:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^{n} a_j \underbrace{\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k}_{=\delta_{jk}} = a_k. \tag{1.8}$$

Unter einer **Matrix** versteht man ein rechteckiges Tableau von Elementen, von denen wir hier fast immer annehmen, dass es sich um reelle oder komplexe Zahlen handelt.[3] Man bezeichnet die horizontalen Anordnungen als **Zeilen**, die vertikalen als **Spalten** der Matrix. Das Matrixelement A_{jk} steht dabei in der j-ten Zeile und der k-ten Spalte der Matrix.[4] Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten bezeichnet man als eine $m\times n$-Matrix und schreibt $\mathbf{A} = (A_{jk})$, $j = 1,\ldots,m$, $k = 1,\ldots,n$. Man kann also einen Zeilenvektor wie $(1,2)$ als Matrix mit nur einer Zeile und zwei Spalten auffassen und entsprechend einen Spaltenvektor als eine einspaltige Matrix. Matrizen mit gleichem m und gleichen n nennt man gleichartig.

1.2 Quadratische Matrizen

Hier interessieren wir uns vor allem für Matrizen mit der gleichen Anzahl von Zeilen und Spalten, also für **quadratische** Matrizen, insbesondere für 2×2-Matrizen wie beispielsweise

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

eine Matrix mit zwei Zeilen und zwei Spalten.

Die Addition zweier gleichartiger Matrizen erfolgt elementweise, und bei der Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl wird jedes Element der Matrix mit dieser Zahl multipliziert:

$$\mathbf{A_1} + \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix}\quad,\quad \alpha\mathbf{A} = \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Mit diesen beiden Operationen wird die Menge gleichartiger Matrizen zu einem Vektorraum.

Darüber hinaus lassen sich Matrizen auch miteinander multiplizieren. Das Matrixelement der Produktmatrix mit den Indizes j,k ist das elementweise Produkt der j-ten Zeile der ersten Matrix mit der k-ten Spalte der zweiten, für 2×2-Matrizen also gleich

$$\mathbf{A_1}\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2+b_1c_2 & a_1b_2+b_1d_2 \\ c_1a_2+d_1c_2 & c_1b_2+d_1d_2 \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

3 Ausnahmen mit pseudokomplexen und quaternionischen Elementen findet man in Abschnitt 5.4.

4 Als Merksatz für die Reihenfolge der Indizes dient: „Zeilen zuerst, Spalten später."

Wenn man es mit kleinen Matrizen zu tun hat, insbesondere mit 2×2-Matrizen, dann ist man versucht, die Gleichungen wie oben voll auszuschreiben und alle Rechnungen explizit durchzuführen. Manchmal ist das sinnvoll, aber oft führt es zu einem großem Rechenaufwand. Dazu als Warnung ein Beispiel in der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 1.1 (Lös. Seite 30) : Die Matrixmultiplikation ist assoziativ und distributiv, aber im Allgemeinen nicht kommutativ. Es gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}\,, \quad \mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}\,, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

und im Allgemeinen $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Beweisen Sie dies für 2×2-Matrizen. .

In der angegebenen Lösung wird, wie oben erwähnt, für 2×2-Matrizen explizit gerechnet, allerdings mit einem unverhältnismäßigen Rechen- und Schreibaufwand. Das lässt sich vermeiden, wenn man anders vorgeht. Mit der Matrixschreibweise $\mathbf{A} = \big(A_{jk}\big)$, $\mathbf{B} = \big(B_{jk}\big)$, usw. sind die Matrixelemente der Summenmatrix $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ und der Produktmatrix $\mathbf{AB}$ durch

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ik} = A_{ik} + B_{ik}\,, \qquad (\mathbf{AB})_{ik} = \sum_j A_{ij}B_{jk} \tag{1.12}$$

gegeben. Hier unterstellen wir, dass alle vorkommenden Matrizen quadratische $n\times n$-Matrizen sind und vereinbaren, dass die Summen über die Indizes von 1 bis n laufen. Damit beweisen wir die Assoziativität des Matrixproduktes in einer einzigen Zeile:

$$\big(\mathbf{A}(\mathbf{BC})\big)_{ik} = \sum_j A_{ij}(\mathbf{BC})_{jk} = \sum_{j\ell} A_{ij}B_{j\ell}C_{\ell k} = \sum_\ell (\mathbf{AB})_{i\ell}C_{\ell k} = \big((\mathbf{AB})\mathbf{C}\big)_{ik}\,. \tag{1.13}$$

Das lässt sich aber noch kürzer formulieren mithilfe einer **Summenkonvention**: Über doppelt vorkommende Indizes in einem Produkt wird summiert. Damit entfallen die Summationszeichen und die Gleichung oben verkürzt sich zu

$$\big(\mathbf{A}(\mathbf{BC})\big)_{ik} = A_{ij}(\mathbf{BC})_{jk} = A_{ij}B_{j\ell}C_{\ell k} = (\mathbf{AB})_{i\ell}C_{\ell k} = \big((\mathbf{AB})\mathbf{C}\big)_{ik}\,. \tag{1.14}$$

Es erfordert allerdings etwas Übung, solche Ausdrücke zu lesen. Als weiteres Beispiel verwenden wir diese Konvention in dem Beweis des Distributivgesetzes aus der Aufgabe. Es gilt für die Matrixelemente von $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})\big)_{ik} &= A_{ij}(\mathbf{B}+\mathbf{C})_{jk} = A_{ij}(B_{jk}+C_{jk}) = A_{ij}B_{jk} + A_{ij}C_{jk}\\ &= (\mathbf{AB})_{ik} + (\mathbf{AC})_{ik} = \big(\mathbf{AB}+\mathbf{AC}\big)_{ik}\,.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Eine derartige Summenkonvention ist (fast) unerlässlich in der Relativitätstheorie, wo sie als einsteinsche Summenkonvention bezeichnet wird, oder ganz allgemein in der Rechnung mit **Tensoren**.

Die **Nullmatrix 0** ist das neutrale Element der Matrixaddition, also $\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$ für alle Matrizen $\mathbf{A}$, und die **Einheitsmatrix I** ist das neutrale Element der Matrixmultiplikation mit $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ für alle Matrizen $\mathbf{A}$. Für den 2×2-Fall haben die beiden Matrizen die Form

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

Wie wir gesehen haben, kann man mit den quadratischen Matrizen also rechnen, ähnlich wie mit den reellen oder komplexen Zahlen. Sie bilden eine sogenannte **Algebra**. Mehr über Algebren finden wir in Abschnitt 6.1.

Wie schon in Aufgabe 1.1 erwähnt, ist das Matrixprodukt im Allgemeinen nicht kommutativ. Ein wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung dieser Nicht-Kommutativität ist der sogenannte

Kommutator

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}. \tag{1.17}$$

Das Klammerpaar [,] bezeichnet man als **Kommutatorklammer**, die eine Matrix-Algebra zu einer sogenannten **Lie-Algebra** macht (mehr darüber in Kapitel 6). An dieser Stelle soll dazu nur eine wichtige Eigenschaften der Kommutatorklammer gezeigt werden, die **Leibniz-Regel**

$$[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C}, \tag{1.18}$$

die für viele Rechnungen nützlich ist. Sie folgt direkt durch Ausschreiben der Klammern, wobei man auf die Reihenfolge der Faktoren achten muss,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{BC}] &= \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} = \mathbf{ABC} - \mathbf{BCA} + \mathbf{BAC} - \mathbf{BAC} \\
&= \mathbf{BAC} - \mathbf{BCA} + \mathbf{ABC} - \mathbf{BAC} \\
&= \mathbf{B}(\mathbf{AC} - \mathbf{CA}) + (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}[\mathbf{A}, \mathbf{C}] + [\mathbf{A}, \mathbf{B}]\mathbf{C}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Das Matrizenprodukt, das wir hier kennengelernt haben, ist aber nicht das einzige Produkt, das man für Matrizen sinnvoll definieren kann. Es existiert außerdem das sogenannte **Kronecker-Produkt** (vgl. Anhang A.2), das allerdings eine höherdimensionale Matrix erzeugt. Aus einer Matrix $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ bildet man die **transponierte Matrix** $\mathbf{A}^T$ durch eine Spiegelung an der Hauptdiagonale, die **komplex konjugierte Matrix** $\mathbf{A}^*$ und die **hermitesch konjugierte Matrix** als die Transponierte der hermitesch Konjugierten:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^*)^T = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Spezielle Matrizen sind von besonderer Bedeutung:

- Matrizen mit $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ nennt man **hermitesch**,
- Matrizen mit $\mathbf{AA}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A} = \mathbf{I}$ nennt man **unitär**,
- Matrizen mit $\mathbf{AA}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger\mathbf{A}$ nennt man **normal**.

Klarerweise ist jede hermitesche und jede unitäre Matrix auch normal.

1.2.1 Determinante, Spur und Inverse

Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ zu $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, oder kurz die **Inverse**, ist definitiongemäß die Matrix mit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Das wird erfüllt durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

mit der **Determinante**

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1.22}$$

was man durch Nachrechnen in der folgenden Aufgabe 1.2 bestätigt. Die Inverse existiert genau dann, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$. Für die Determinante der Transponierten, der komplex konjugierten und der hermitesch Konjugierten gilt

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \det \mathbf{A}^\dagger = \det \mathbf{A}^* = (\det \mathbf{A})^*, \tag{1.23}$$

was man sofort einsieht. Einige weitere Eigenschaften überlassen wir einer Aufgabe:

Aufgabe 1.2 (Lös. Seite 30): (a) Beweisen Sie für 2×2-Matrizen die folgenden Rechenregeln:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{B}\,, \quad \det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \left(\det\mathbf{A}\right)^{-1}.$$

(b) Beweisen Sie die Formel (1.21) für die inverse Matrix.

(c) Beweisen Sie die folgenden Formeln für die hermitesch Konjugierte, die Transponierte und die Inverse eines Produktes:

$$(\mathbf{AB})^{\dagger} = \mathbf{B}^{\dagger}\mathbf{A}^{\dagger}\,, \quad (\mathbf{AB})^{T} = \mathbf{B}^{T}\mathbf{A}^{T}\,, \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\,.$$

Alle in dieser Aufgabe bewiesenen Aussagen sind allgemein für $n \times n$-Matrizen gültig.

Unter der **Spur** einer Matrix versteht man die Summe der Diagonalelemente,

$$\operatorname{spur}\mathbf{A} = \sum_j A_{jj}\,, \tag{1.24}$$

für unsere 2×2-Matrizen $\mathbf{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gilt also $\operatorname{spur}\mathbf{A} = a + d$. Aus der Definition der Spur ergibt sich direkt die Rechenregel

$$\operatorname{spur}(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) = \alpha\operatorname{spur}\mathbf{A} + \beta\operatorname{spur}\mathbf{B}\,, \tag{1.25}$$

für die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl. Für die Matrix-Multiplikation gilt

$$\operatorname{spur}(\mathbf{AB}) = \sum_{jk} A_{jk}B_{kj} = \sum_{jk} B_{kj}A_{jk} = \operatorname{spur}(\mathbf{BA})\,. \tag{1.26}$$

Daraus folgt sofort, dass ein Kommutator **spurfrei** ist, $\operatorname{spur}\left[\mathbf{A},\mathbf{B}\right] = 0$, und dass man unter der Spur die Matrizen zyklisch vertauschen darf:

$$\operatorname{spur}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{spur}(\mathbf{BCA}) = \operatorname{spur}(\mathbf{CAB}). \tag{1.27}$$

Gleichartige Matrizen bilden einen Vektorraum und man kann sich durch eine kurze Rechnung davon überzeugen, dass durch

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \operatorname{spur}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{B} = \sum_{jk} A^{*}_{jk}B_{kj} \tag{1.28}$$

auf diesem Vektorraum ein Matrix-Skalarprodukt der Matrizen $\mathbf{A} = (A_{jk})$ und $\mathbf{B} = (B_{jk})$ definiert wird, das sogenannte **Frobenius-Skalarprodukt** (nach dem deutschen Mathematiker Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)). Entsprechend nennt man $\|\mathbf{A}\|$ mit

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \operatorname{spur}\mathbf{A}^{\dagger}\mathbf{A} = \sum_{jk} |A_{jk}|^2 \tag{1.29}$$

die **Frobenius-Norm** der Matrix $\mathbf{A}$ (auch als **Hilbert-Schmidt-Norm** bezeichnet nach den deutschen Mathematikern David Hilbert (1882-1943) und Erhard Schmidt (1876-1959)) mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} &\|\alpha\mathbf{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{A}\| \quad \text{für} \quad \alpha \in \mathbb{C}\,, \\ &\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \text{und} \quad \|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Die Frobenius-Norm erfüllt also die **Dreiecksungleichung** wie die Vektornorm (1.5) und sie ist **submultiplikativ**.

Es sei darauf hingewiesen, dass andere Matrixnormen existieren. Insbesondere ist hier die euklidische Matrixnorm

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \tag{1.31}$$

zu erwähnen, als ein Beispiel einer sogenannten **Operatornorm**. Diese Norm ist ebenfalls submultiplikativ und hängt mit der Frobenius-Norm durch $\|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|$ zusammen. Mehr dazu in Abschnitt 2.3.1.

1.2.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Wir wollen hier kurz zu nicht-quadratischen $m \times n$-Matrizen zurückkehren. Gleichartige Matrizen, also solche mit gleicher Anzahl von m Zeilen und n Spalten, lassen sich gliedweise addieren, auch die Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl lässt sich problemlos durchführen, aber bei der Matrixmultiplikation muss man beachten, dass man nur „passende" Matrizen multiplizieren kann, nämlich eine $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ mit einer $n \times r$-Matrix $\mathbf{B}$. Das liefert eine $m \times r$-Produktmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ mit den Matrixelementen

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \,. \tag{1.32}$$

Das lässt sich interpretieren als das Skalarprodukt der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ mit der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$. Es sei dem Leser empfohlen, sich davon zu vergewissern, dass dieses Produkt distributiv und assoziativ ist (vgl. dazu auch die Lösung von Aufgabe 1.1)..

Wendet man eine solche $m \times n$-Matrix $\mathbf{A} = (A_{jk})$ auf einen n-dimensionalen Vektor $\mathbf{x}$ an, so ergibt sich ein m-dimensionaler Vektor

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1.33}$$

Wenn wir in beiden Räumen orthonormierte Basen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ bzw. $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_m$ wählen (vgl. Gleichung (1.6)) und die Vektoren als $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k$ bzw. $\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^{m} x'_j \mathbf{e}'_j$ darstellen, dann gilt für die Komponenten von $\mathbf{x}'$ die Gleichung

$$x'_j = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_k x_k = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k \tag{1.34}$$

mit den Matrixelementen

$$A_{jk} = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}'^{\dagger}_j \mathbf{A}\mathbf{e}_k \,. \tag{1.35}$$

Die Matrix lässt sich also auffassen als Abbildung eines n-dimensionalen Vektorraums auf einen m-dimensionalen. Dabei werden die kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, usw. auf die Spaltenvektoren der Matrix abgebildet. Diese Spaltenvektoren spannen einen linearen Raum auf; die Dimension dieses **Bildraumes** heißt Spaltenrang. Entsprechend ist der Zeilenrang die Dimension des von den Zeilenvektoren aufgespannten Raumes. Man kann zeigen, dass beide Dimensionen gleich sind, und bezeichnet sie als **Rang** der Matrix. Der Rang ist also gleich der Dimension des Bildraumes.

Für quadratische $n \times n$-Matrizen ist ihr Rang genau dann maximal, also gleich n, wenn sie invertierbar sind. Das ist genau dann der Fall, wenn ihre Determinante ungleich null ist. Also gilt

$$\operatorname{rang} \mathbf{A} = n \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} \text{ invertierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \det \mathbf{A} \neq 0. \tag{1.36}$$

Man nennt eine **invertierbare Matrix** auch **regulär** oder **nicht-singulär**.

Die Menge aller Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden, heißt **Kern** der Abbildung. Man sollte sich davon überzeugen, dass auch der Kern ein linearer Raum ist. Mehr über die Eigenschaften linearer Matrix-Abbildungen erfahren wir in Kapitel 4.

Oft ist es von Interesse zu wissen, in welcher Beziehung der Bildvektor $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ zum ursprünglichen Vektor $\mathbf{x}$ steht. Darüber gibt ihr Skalarprodukt $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x}$ Auskunft. Man nennt eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ **positiv definit**, wenn für alle Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gilt $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} > 0$, oder **positiv semidefinit** für $\mathbf{x}^\dagger \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$. Beispiele für positiv definite Matrizen sind die Identität oder, etwas allgemeiner, Diagonalmatrizen mit positiven Diagonalelementen, wovon man sich leicht überzeugen kann, sowie die Matrizen vom Typ $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ nach der folgenden Aufgabe:

Aufgabe 1.3 (Lös. Seite 31): Zeigen Sie: Die Matrix $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ ist positiv semidefinit. Sie ist positiv definit, falls $\mathbf{A}$ maximalen Rang besitzt.

Die positiv definiten Matrizen solle man aber nicht mit den **positiven** oder den **total positiven** verwechseln. Matrizen mit diesen Eigenschaften werden in Abschnitt 3.7 beschrieben.

1.2.3 Blockmatrizen

Aus vier 2×2-Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ lässt sich durch

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \tag{1.37}$$

eine 2×2-Matrix erzeugen, deren „Matrixelemente“ wieder 2×2-Matrizen sind. Wir wollen eine solche Matrix als **Blockmatrix** bezeichnen und durch einen Querstrich kennzeichnen. Voll ausgeschrieben in den Matrixelementen der $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ ist eine solche Matrix natürlich eine 4×4-Matrix und $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ sind Untermatrizen. Solche Blockmatrizen treten an verschiedenen Stellen in Anwendungen auf, in der Physik zum Beispiel bei den Dirac-Matrizen (siehe P2, Kapitel 9.5), und es lohnt sich, einige ihrer Eigenschaften zu kennen.

Die Matrixaddition und die Matrixmultiplikation übertragen sich auf die Blockmatrizen und es gilt für die Summe klarerweise

$$\overline{\mathbf{M}}_1 + \overline{\mathbf{M}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} . \tag{1.38}$$

Für die Multiplikation gilt sogar

$$\overline{\mathbf{M}}_1 \overline{\mathbf{M}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{D}_2 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1\mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 \end{pmatrix} , \tag{1.39}$$

das heißt, das Produkt ergibt sich einfach durch Ersetzen der Zahlen in der Vorschrift (1.11) für die Matrix-Multiplikation durch 2×2-Matrizen, wovon wir uns in einer Aufgabe überzeugen:

Aufgabe 1.4 (Lös. Seite 31): Beweisen Sie die Produktformel (1.39) der Blockmatrizen, und zwar auch für solche, die aus vier $n \times n$-Matrizen aufgebaut sind.

Besonders einfach wird die Multiplikation von Blockmatrizen, wenn eine der beiden Matrizen die Blockdiagonalform $\overline{\mathbf{K}} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{smallmatrix}\right)$ hat. Dann gilt

$$\overline{\mathbf{K}}\,\overline{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{XA} & \mathbf{XB} \\ \mathbf{YC} & \mathbf{YD} \end{pmatrix} , \quad \overline{\mathbf{M}}\,\overline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AX} & \mathbf{BX} \\ \mathbf{CY} & \mathbf{DY} \end{pmatrix}$$

und für den Kommutator erhält man dann

$$[\overline{\mathbf{M}}, \overline{\mathbf{K}}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{A},\mathbf{X}] & [\mathbf{B},\mathbf{X}] \\ [\mathbf{C},\mathbf{Y}] & [\mathbf{D},\mathbf{Y}] \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Diese Multiplikationsformeln der Blockmatrizen sollen aber nicht dazu verleiten anzunehmen, dass auch andere Operationen ähnlich einfach sind. Das gilt zwar für die Spur, nicht aber für die Determinante, wie die folgende Aufgabe zeigt:

Aufgabe 1.5 (Lös. Seite 32) : Zeigen Sie für $n \times n$-Matrizen: (a) Für die Spur einer Blockmatrix gilt

$$\mathrm{spur}\,\overline{\mathbf{M}} \;=\; \mathrm{spur}\,\mathbf{A} + \mathrm{spur}\,\mathbf{D}\,.$$

(b) Entgegen einer vorschnellen Vermutung gilt für die Determinante einer Blockmatrix im Allgemeinen $\det\overline{\mathbf{M}} \neq \det\mathbf{A}\det\mathbf{D} - \det\mathbf{B}\det\mathbf{C}$. (c) Für den Spezialfall, dass eine der Untermatrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ in (1.37) eine Nullmatrix $\mathbf{0}$ ist, gilt für $\mathbf{BC} = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{AD} = \mathbf{0}$

$$\det\overline{\mathbf{M}} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{D} \quad \text{bzw.} \quad \det\overline{\mathbf{M}} = \det\mathbf{B}\det\mathbf{C}\,.$$

Die Lösung dieser Aufgabe für Blockmatrizen, die aus 2×2-Matrizen aufgebaut sind, stellt nur eine Rechenübung dar und liefert keinen Anhaltspunkt für eine eventuelle Verallgemeinerung des Teils (c) auf $n \times n$-Matrizen. Deshalb schlagen wir hier einen anderen Weg ein. Zunächst beweisen wir $\det\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{smallmatrix}\right) = \det\mathbf{D}$ durch sukzessives Entwickeln nach der ersten Zeile. Genauso gilt $\det\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{smallmatrix}\right) = \det\mathbf{A}$. Dann erhalten wir unser gesuchtes Resultat für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ unter Verwendung der Determinatenformel für das Produkt:

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{D}\,. \tag{1.41}$$

Einige spezielle Typen von Blockmatrizen treten häufiger in In Anwendungen auf, und wir wollen dafür einiger Formeln bereitstellen:

Blockmatrizen vom Typ

$$\overline{\mathbf{M}}_{\pm} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{I} & \mathbf{B}_{\pm} \\ \mathbf{B}_{\pm}^{\dagger} & \gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_{\pm} = \begin{pmatrix} a & b \\ \mp b^{*} & \pm a^{*} \end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

findet man beispielsweise in der relativistischen Quantenmechanik in P2, Abschnitt 9.5 oder in der Statistik von Zufallsspektren in P2, Abschnitt 10.2. Die Berechnung der Determinante überlassen wir einer Aufgabe:

Aufgabe 1.6 (Lös. Seite 32) : Zeigen Sie: Für die Blockmatrix aus Gleichung (1.42) gilt

$$\det\overline{\mathbf{M}}_{\pm} = (\lambda\gamma \mp \det\mathbf{B}_{\pm})^{2}\,.$$

Für den speziellen Fall reeller a und b ergibt das Resultat der Aufgabe

$$\det\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a & b \\ 0 & \lambda & -b & a \\ a & -b & \gamma & 0 \\ b & a & 0 & \gamma \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \lambda & 0 & a & b \\ 0 & \lambda & b & -a \\ a & b & \gamma & 0 \\ b & -a & 0 & \gamma \end{vmatrix} = (\lambda\gamma - a^{2} - b^{2})^{2} \tag{1.43}$$