INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

1.ª Edición Digital

2020

J. ARMANDO VENERO B.

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS (U.N.I.)

EDICIONES GEMAR

LIMA PERÚ

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

Autor: JESÚS ARMANDO VENERO BALDEÓN
Estudios de Magíster en **MATEMÁTICAS (P.U.C.P.)**

Dpto. de tipeo, diagramación y diseño
Ana María Vargas Loayza de Venero,
Lic. en Educación (U.N.M.S.M.)

1.ª Edición digital, SETIEMBRE 2020

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº 202005369

ISBN IMPRESA: 978-612-45216-4-5

ISBN DIGITAL : 978-612-45216-7-6 **PDF** 978-612-48340-2-8 **EPUB**

Editado por:

Calle Río Vilcanota 168. COO 27 de abril, Ate – Lima.
Teléfono: 446-6176
rep_gemar09@hotmail.com
https://www.facebook.com/veneromath/

PRÓLOGO

Este libro está dirigido a la formación del razonamiento matemático de los alumnos del primer año de las carreras de Ciencias e Ingeniería, y consta de dos partes:

1. Los fundamentos del Análisis Matemático: Lógica, Conjuntos, el Sistema de los Números Reales, Valor Absoluto, Máximo Entero, Conjuntos Acotados, Inducción Matemática y Sumatorias.

2. La GEOMETRÍA ANALÍTICA VECTORIAL en el Plano y en el Espacio.

En la presentación del texto se ha puesto un interés muy particular en el enfoque intuitivo y geométrico, sin dejar de lado el suficiente rigor que se requiere a este nivel del aprendizaje de las Matemáticas Superiores. Se ha complementado la parte teórica y práctica del texto con series de problemas, los cuales tienen su clave de respuestas inmediatamente al final de cada serie.

Los capítulos 1 y 2 que tratan de las PROPOSICIONES LÓGICAS y la TEORÍA DE CONJUNTOS respectivamente, siendo sencillos, son imprescindibles en cualquier estudio organizado de las Ciencias o las Humanidades. Ambos temas están relacionados de tal forma que se puede considerar a cualquiera de ellos como reflejo del otro, y son expuestos como complemento a lo que ya se conoce desde los estudios secundarios.

El capítulo 3, titulado LOS NÚMEROS REALES, estudia el Sistema de los Números denominados REALES en lo que se refiere a sus axiomas y propiedades; requiere un conocimiento básico del álgebra elemental, y está orientado a presentar las técnicas para resolver ECUACIONES e INECUACIONES, las que también incluyen RADICALES. En este capítulo, se incluye el estudio del VALOR ABSOLUTO y del MÁXIMO ENTERO complementada con una regular cantidad de ejercicios resueltos.

A partir del capítulo 4 que estudia los VECTORES, y hasta el capítulo 8, se trata el tema de la GEOMETRÍA ANALÍTICA MODERNA en el plano desde un enfoque VECTORIAL; esto permite estudiar las RECTAS, CIRCUN-FERENCIAS Y CÓNICAS en una forma elegante y sencilla.

En el capítulo 5 , EL PLANO EUCLIDIANO, he aumentado una nueva sección 12 , PENDIENTE Y ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA, preparada de una manera especial como resultado de mi experiencia docente en una universidad particular, y dedicada a resaltar la importancia que tiene el concepto y el cálculo de la PENDIENTE de una recta. Y en base a este concepto muestro la importancia que tiene obtener la muy especial y elegante forma de la ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA en el plano coordenado XY.

Aquí muestro a mis amables jóvenes lectores la potencia que tiene esta mágica ECUACIÓN GENERAL DE UNA RECTA, presentada en la forma en que se adapta perfectamente a las calculadoras que actualmente utilizan, CASIO $fx-991ES\ PLUS$ o CASIO $fx-570ES\ PLUS$ desde los primeros ciclos.

Y muestro cómo es que permite resolver en menos tiempo analítico y operativo problemas relacionados con rectas en el plano:

Opción: MODE $\rightarrow$ [5] $\rightarrow$ [1] $\rightarrow$ $\boxed{\mathrm{a} \quad \mathrm{b} \quad \mathrm{c}}$

Ingresas en ese orden los coeficientes de las ecuaciones generales de dos rectas $\boxed{\mathrm{a_i}x + \mathrm{b_i}y = \mathrm{c_i}}$, $\mathrm{i} = 1, 2$, con sus signos correspondientes, para hallar las coordenadas (x, y) de su punto de intersección, representado por este sistema de ecuaciones lineales.

En el capítulo 9 se extiende los conceptos anteriores en el plano a la GEOMETRÍA ANALÍTICA VECTORIAL EN EL ESPACIO.

El libro termina con un capítulo dedicado a la técnica de la INDUCCIÓN MATEMÁTICA y a las SUMATORIAS.

Siendo el objetivo inmediato de este texto el de conseguir una sólida formación lógico matemática, desarrollando al mismo tiempo el aspecto intuitivo en esta área, con el material aquí tratado el alumno estará preparado para acceder al ANÁLISIS MATEMÁTICO en lo que al CÁLCULO DIFERENCIAL se refiere.

Como una mención muy especial expreso mi más grande agradecimiento a la Sra. Lic. Ana María Vargas Loayza de Venero por el cuidadoso esmero con el que realizó el tipeo, los gráficos, la diagramación y la revisión de toda esta entrañable obra.

Y es precisamente con este mismo cariño y dedicación que estamos preparando nuestra próxima obra literaria del SOLUCIONARIO DE INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO.

Convencido de que tendrás el valor de enterarte de algunas formas no comunes con que yo veo estas matemáticas te invito a leer las páginas que gustes de esta humilde obra.

JESÚS ARMANDO VENERO BALDEÓN.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. LÓGICA

CAPÍTULO 2. CONJUNTOS

CAPÍTULO 3. NÚMEROS REALES

CAPÍTULO 4 . VECTORES EN EL PLANO

CAPÍTULO 5. EL PLANO EUCLIDIANO

CAPÍTULO 6. GRÁFICAS DE ECUACIONES

CAPÍTULO 7. TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

CAPÍTULO 8. LAS SECCIONES CÓNICAS

CAPÍTULO 9. GEOMETRÍA ANALÍTICA EN $\mathbb{R}^3$

CAPÍTULO 10. INDUCCIÓN MATEMÁTICA Y SUMATORIAS

"Sonríe, a veces una persona en un día lluvioso sólo espera alguien que le muestre el arco iris en una sonrisa."

Carpe Diem.

1

LÓGICA

1. PROPOSICIÓN LÓGICA

Se llama así a toda expresión que puede calificarse bien como verdadera (V) bien como falsa (F) y sin ambigüedad.
En general, las proposiciones lógicas serán denotadas con letras minúsculas

$p, \quad q, \quad r, \quad \ldots$

EJEMPLOS DE PROPOSICIONES LÓGICAS:

p : $4 + 3 = 6$ ... (F)
q : La ciudad de Trujillo es la capital de la Libertad ... (V)

EJEMPLOS DE EXPRESIONES QUE NO SON PROPOSICIONES LÓGICAS:

a) ¡Buenos días! b) $a + z = x$ c) ¿Cómo estás?

Respecto a estas expresiones vemos que no es posible indicar si les corresponde un valor de verdadero de falso.

2. CONECTIVOS LÓGICOS

a) LA DISYUNCIÓN "$p \vee q$" [se lee "p *o* q"] .- Es una proposición formada por las proposiciones p y q, relacionadas por la palabra " " (en el sentido inclusivo: y/) , definida por la condición:
"$p \vee q$" *es* FALSA *únicamente en el caso en que ambas* p y q *son* FALSAS ; *en cualquier otro caso* es Verdadera. Su tabla de verdad es :

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EJEMPLO:

p : 8 es menor que 7 ... (F)
q : 6 es mayor que 2 ... (V)
$p \vee q$: 8 es menor que 7 ó 6 es mayor que 2 ... (V)

b) CONJUNCIÓN "$p \wedge q$" (Se lee "p y q").

Es una proposición que se define de manera que resulta *verdadera* (V) en el único caso en que p y q son *ambas verdaderas* (V) ; y en todos los demás casos es *Falsa* (F).

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO

p : 1512 es múltiplo de 3 ... (V)

q : $5 + 2 = 10$ ... (F)

$p \wedge q$: 1512 es múltiplo de 3 y $5 + 2 = 10$ ... (F)

c) NEGACIÓN "$\sim p$".- Es una proposición que cambia el valor de la proposición p, y cuya tabla de verdad es

p	$\sim p$
V	F
F	V

Se lee: " Es falso que p "
" No es cierto que p ".
" No p "

d) LA CONDICIONAL "$p \to q$" (Se lee "Si p entonces q").-

Es aquella proposición que es FALSA únicamente cuando la proposición p (llamada ANTECEDENTE) es **Verdadera** (V) y la proposición q (llamada CONSECUENTE) es **Falsa** (F). Su tabla de verdad es

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

También se lee:

p implica q
p solamente si q
p es una condición suficiente para q
q es una condición necesaria para p
q a menos que $\sim p$
Es suficiente que p para que q
Es necesario que q para que p.

OBSERVACIONES:

1) Según las dos últimas filas de la tabla de verdad, basta que el antecedente p sea falso (F) para que la condicional sea verdadera (V), independientemente del valor de la proposición q.

2) Según las filas 1ra. y 3ra. basta que el consecuente q sea verdadero (V) para que la condicional resulte verdadera (V).

3) Según la última fila, si tanto p como q son falsas, la condicional resultará *verdadera*.

EJEMPLO.- Explique por qué las condicionales siguientes tienen los valores veritativos indicados:

a) $2 + 3 = 6 \;\rightarrow\; 5 < 6$ ... (V)

b) $3 - 1 = 4 \;\rightarrow\; 2^7 < 2^6$ ... (V)

c) 5 es un número primo, entonces 51 es un número par ... (F)

PROBLEMA.- Utilice las palabras " *Si ... entonces ...* ", para expresar de otra manera equivalente la siguiente proposición:

" *Yo no me presento al examen de Matemáticas a menos que lo posterguen una semana* " .

SOLUCIÓN . Sean p : Yo no me presento al examen de Matemáticas
q : Postergarán el examen de Matemáticas una semana.

La proposición dada en el enunciado corresponde por lo tanto a:
" p *a menos que* q ", que se simboliza precisamente como: $(\sim q) \rightarrow p$,
y se lee:

" Si *no postergan el examen de Matemáticas una semana* entonces *yo no me presento a dicho examen* ".

e) BICONDICIONAL "$p \leftrightarrow q$" [Se lee "p *si y sólo si* q "]

Es aquella proposición que es *verdadera* en el caso en que ambas p y q tengan valores veritativos iguales (*ambas verdaderas ambas falsas*); y es **Falsa** en los casos en que p y q tengan valores veritativos ***opuestos***. Su tabla de verdad es como sigue:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

También se lee:

“ p *si y solamente si* q ”

“ p *es una condición necesaria y suficiente para que* q ”.

PROPOSICIONES COMPUESTAS

Usando los conectivos lógicos se puede combinar cualquier número finito de proposiciones para obtener otras cuyos valores de verdad puedan ser conocidos construyendo sus tablas de verdad, en las que se deben indicar los valores resultantes para todas las combinaciones posibles de valores de las proposiciones componentes.

Por ejemplo, la tabla de verdad de la proposición $[(\sim p) \vee q] \rightarrow (r \wedge p)$ es :

p	q	r	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$	$r \wedge p$	$[(\sim p) \vee q] \to (r \wedge p)$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

EJERCICIO.- Sean p : 8 es un número par; q : 8 es el producto de dos números enteros. Traduzca en símbolos cada una de las siguientes proposiciones:

a) 8 es un número par es un producto de dos enteros.
b) 8 es impar y es un producto de dos enteros.
c) 8 es un número par y un producto de dos enteros es un número impar y no un producto de dos números enteros.

SOLUCIÓN.- a) $p \vee q$, b) $(\sim p) \wedge q$, c) $(p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge \sim q]$.

PROBLEMA.- Sean p , q y r proposiciones tales que p es verdadera, q es falsa y r es falsa . ¿Cuáles de las siguientes son verdaderas? :

a) $(p \vee q) \vee r$

b) $[(p \wedge q) \vee ((\sim p) \wedge \sim q)] \wedge [((\sim p) \wedge q) \vee ((\sim q) \wedge p)]$

c) $(\sim p) \vee (q \wedge r)$, d) $[(\sim p) \vee \sim q] \wedge (p \vee \sim r) \wedge (q \vee r)$

SOLUCIÓN.-

a) Verdadera, pues

$$\begin{array}{ccccc} (p & \vee & q) & \vee & r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (V & \vee & F) & \vee & F \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ & V & & \vee & F \\ & & & \downarrow & \\ & & & V & \end{array}$$

, verdadera

b) Como esta proposición está constituida por dos corchetes unidos por una $\wedge$, y como el primero de ellos (a la izquierda) es falso (F) entonces toda la proposición será **Falsa**, independientemente del valor de la proposición que queda a la derecha.

c) Esta proposición es FALSA, pues $(\sim p) \vee (q \wedge r) \equiv F \vee F \equiv F$
d) Es Falsa, análogo a (b) , pues $(q \vee r)$ resulta falsa.

PROBLEMA.- Simplifique la siguiente proposición:

$$(\sqrt[4]{4} > \sqrt{2} \wedge 1 > 0) \rightarrow [\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4} \vee (1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2} \leftrightarrow -1 < 0)]$$

SOLUCIÓN.- Analizando el valor de $\sqrt[4]{4} > \sqrt{2}$, vemos que $\sqrt[4]{4} = 2^{2/4} = 2^{1/2}$ $= \sqrt{2}$, y por lo tanto $\sqrt[4]{4} > \sqrt{2}$ es FALSA, así como también tenemos que $1/\sqrt[4]{4} < 1/\sqrt{2}$ es FALSA, sin embargo $\sqrt{2} \geq \sqrt[4]{4}$ es VERDADERA pues $\geq$ significa : $>$ $=$. Así, equivalentemente se tiene que

$$\begin{array}{l} (F \wedge V) \rightarrow [V \vee (F \leftrightarrow V)] \\ \quad\downarrow \\ \quad F \quad\;\; \rightarrow [V \vee (F \leftrightarrow V)] \end{array}$$

y según una observación respecto a las CONDICIONALES, basta que el antecedente sea FALSO como en este caso, para que toda la condicional sea VERDADERA; lo cual se puede verificar completando lo demás si se desea.

JERARQUÍA DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Cuando en una proposición compuesta se tiene varios conectivos lógicos, las operaciones se realizan luego de colocar los paréntesis adecuadamente.

PROBLEMA.- Sean p, q, r, s, n proposiciones lógicas. Si el valor de verdad de cada una de las proposiciones siguientes (a) y (b) es FALSA:

(a) $[\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (s \wedge r)$, (b) $(\sim p) \vee q$,

¿Cuál es el valor de verdad de las proposiciones (c) y (d) ? :

c) $[(n \rightarrow p) \wedge \sim r] \rightarrow p$, d) $s \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

SOLUCIÓN.- Analizando por partes: que la condicional (a) sea FALSA quiere decir que

$$\begin{cases} \sim(p \rightarrow q) \rightarrow r & \text{es } V \quad (*) \quad , \quad \text{y} \\ s \wedge r & \text{es } F \quad (**) \end{cases}$$

Como $(\sim p) \vee q$ es F por (b) entonces p es V y q es F, así $p \rightarrow q$ es F. Entonces, de $(*)$: $\sim(p \rightarrow q)$ es V , y por lo tanto r es V . Luego, de $(**)$: s resulta ser F , ya que $\sim r$ es F. Asimismo, la condicional (d) resulta también ser VERDADERA, pues su antecedente s es FALSO.

Note que aquí no fue necesario conocer el valor veritativo de n .

3. TAUTOLOGÍA Y CONTRADICCIÓN

A toda proposición simple compuesta cuyo valor es siempre **VERDADERA** para cualquier combinación de valores de verdad de sus componentes se le llama **TAUTOLOGÍA** y se le denota por una $\mathbf{V}$.

A toda proposición que toma el valor de **FALSA** para todas las combinaciones, se le llama **CONTRADICCIÓN** y se le denota por $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 1 .- La proposición: $[((\sim p) \vee q) \vee \sim q] \rightarrow \sim p$, es una **TAUTOLOGÍA:**

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee q$	$[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q]$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	F	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V

EJEMPLO 2 .- La proposición: $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$, es una **CONTRADICCIÓN** (F)

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$	$[(p \wedge q) \vee q]$	$\wedge$	$\sim q$
V	V	F	V	V		F	
V	F	V	F	F		F	
F	V	F	F	V		F	
F	F	V	F	F		F	

4. IMPLICACIÓN LÓGICA Y EQUIVALENCIA LÓGICA

Se llama **IMPLICACIÓN LÓGICA** (simplemente **IMPLICACIÓN**) a toda condicional $p \rightarrow q$ que sea una ***TAUTOLOGÍA*** ; en tal caso, a la condicional se le denota $p \Rightarrow q$. Por ejemplo, tenemos la **IMPLICACIÓN** :

$[((\sim p) \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$, cuya tabla de verdad está mostrada.

Se llama **EQUIVALENCIA LÓGICA** (simplemente **EQUIVALENCIA**) a toda bicondicional $p \leftrightarrow q$ que sea una ***TAUTOLOGÍA*** , denotándose en tal caso $p \Leftrightarrow q$. Un ejemplo de Equivalencia Lógica es la proposición:

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q)$	$\leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	F	F	V	F

5. PROPOSICIONES LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

Dos proposiciones p y q se llaman **EQUIVALENTES** (**Lógicamente Equivalentes**) si sus tablas de verdad son idénticas. En tal caso se simboliza

$$p \equiv q$$

EJEMPLO 1.- Las proposiciones $(p \rightarrow q)$ y $[(\sim q) \rightarrow \sim p]$ son **EQUIVALENTES** pues sus tablas de verdad resultantes son idénticas :

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\rightarrow$	$\sim p$
V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Idénticas

Por lo tanto,

$$\boxed{(p \rightarrow q) \equiv [(\sim q) \rightarrow (\sim p)]}$$

✍ **NOTA.-** Esta equivalencia es muy importante en lo que respecta a demostraciones de teoremas resultados, pues en el fundamento del llamado MÉTODO DE DEMOSTRACIÓN POR **REDUCCIÓN AL ABSURDO** MÉTODO POR CONTRADICCIÓN, que es una forma indirecta de demostración, y que ilustraremos más adelante.

6. LEYES DEL ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Son ciertas Equivalencias Lógicas que las presentaremos a continuación y cuya demostración es fácil de realizar construyendo sus tablas

1a. $p \vee p \equiv p$

2a. $p \vee q \equiv q \vee p$

3a. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

4a. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5a. $p \vee F \equiv p$

6a. $p \vee V \equiv V$

7a. $p \vee (\sim p) \equiv V$

8a. $\sim(\sim p) \equiv p$

1b. $p \wedge p \equiv p$
2b. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3b. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
4b. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5b. $p \wedge F \equiv F$
6b. $p \wedge V \equiv p$
7b. $p \wedge (\sim p) \equiv F$
8b. $\sim V \equiv F$; $\sim F \equiv V$
9a. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$
9b. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$

Leyes de DE MORGAN

Como es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado, estas leyes son muy útiles para simplificación.

Con este fin presentamos a continuación una LISTA ADICIONAL DE EQUIVALENCIAS LÓGICAS muy útil.

LISTA ADICIONAL DE PROPOSICIONES EQUIVALENTES

1A. $p \to q \equiv (\sim p) \vee q$
2A. $p \to q \equiv (\sim q) \to (\sim p)$
3A. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
4A. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
5A. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
6A. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee [(\sim p) \wedge (\sim q)]$

PROBLEMA 1.- Simplifique las siguientes proposiciones utilizando las Leyes del Álgebra Proposicional la Lista Adicional:

a) $\sim[\sim(p \wedge q) \to \sim q] \vee q$
b) $[((\sim p) \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

SOLUCIÓN.-

a) $\sim[\sim(p \wedge q) \to \sim q] \vee q$

$\equiv \sim[\sim(\sim(p \wedge q)) \vee \sim q] \vee q$ 1A.
$\equiv \sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee q$ 8a.
$\equiv [\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim q)] \vee q$ 9a.
$\equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \vee q$ 9b.
$\equiv q \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$ 2a , 2b.
$\equiv q$ 4A.

b) $[((\sim p) \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim r)] \wedge \sim q \quad \equiv$

$\equiv [((\sim p) \wedge q) \rightarrow F] \wedge \sim q$	7b.
$\equiv [(\sim((\sim p) \wedge q)) \vee F] \wedge \sim q$	1A.
$\equiv [(p \vee \sim q) \vee F] \wedge \sim q$	9b.
$\equiv [(p \vee \sim q)] \wedge \sim q$	5a.
$\equiv \sim q$	2b , 3a.

PROBLEMA 2 .- Demuestre que la siguiente proposición es una Tautología, utilizando las Leyes Lista Adicional:

$$[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$$

SOLUCIÓN.-

$\equiv \sim[(p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$	1A.
$\equiv [\sim(p \vee \sim q)] \vee p \vee (\sim q)$	9b , 2a.
$\equiv ((\sim p) \wedge q) \vee p \vee (\sim q)$	9a.
$\equiv (\sim p \wedge q) \vee [\sim(\sim p \wedge q)]$	9b.
$\equiv$ V Tautología	7a.

✍ **NOTA .-** En muchos casos este método es más práctico que el de las tablas de verdad.

PROBLEMA 3 .- Determine si es que las proposiciones (a) y (b) son equivalentes:

a) $p \rightarrow (r \vee \sim q)$ b) $(q \rightarrow \sim p) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$

SOLUCIÓN

MÉTODO 1.- Debemos verificar que las tablas de verdad de (a) y (b) son idénticas:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim r$	$p \rightarrow (r \vee \sim q)$		$(q \rightarrow \sim p) \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$		
V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V

idénticas

MÉTODO 2.- Simplificando:

a) $p \to (r \vee \sim q) \quad \equiv \quad (\sim p) \vee (r \vee \sim q) \qquad \ldots (1)$

b) $(q \to \sim p) \vee (\sim r \to \sim p)$

$$\begin{aligned}
&\equiv [\sim q \vee \sim p] \vee [(\sim\sim r) \vee \sim p] \\
&\equiv \sim q \vee \sim p \vee (r \vee \sim p) \\
&\equiv \sim q \vee (\sim p \vee \sim p) \vee r \\
&\equiv (\sim q) \vee (\sim p) \vee r \\
&\equiv (\sim p) \vee (r \vee \sim q) \qquad \ldots (2)
\end{aligned}$$

Siendo (1) y (2) iguales, entonces $a \equiv b$.

PROBLEMA 4 .- Halle el valor veritativo de la proposición:

$$[(p \to q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \qquad \ldots (\alpha)$$

sabiendo que $[(p \to q) \to r] \leftrightarrow [p \to (q \to r)]$ es FALSO .

SOLUCIÓN.- Del dato se tiene que sólo puede ocurrir (a) (b) :

a) $(p \to q) \to r : V$ y $p \to (q \to r) : F$

b) $(p \to q) \to r : F$ y $p \to (q \to r) : V$

De (a): $p \to (q \to r) : F$ entonces $(\sim p) \vee (\sim q) \vee r : F$, de lo cual: $\sim p , \sim q , r : F$, y por lo tanto, $p , q : V$ y $r : F$ $(*)$ pero $(p \to q) \to r : V$ *es absurdo*, pues por $(*)$: $(p \to q) \to r : F$.

Luego, (a) no se cumple, de modo que solamente se cumple (b), del cual:

$p \to q : V$ y $r : F$, de donde puede ocurrir que.

b1) $p , q : V , r : F$ entonces $p \to (q \to r) : F$ (*absurdo*)

b2) $p , q : F , r : F$ entonces $p \to (q \to r) : V$

b3) $p : F , q : V , r : F$ entonces $p \to (q \to r) : V$

Así vemos que para b2 y b3 la proposición (α) resulta VERDADERA.

✍ **NOTA**.- Más aún, se puede comprobar que (α) es una ***TAUTOLOGÍA***, mediante la tabla de verdad.

SERIE DE EJERCICIOS

1. Demuestre las Leyes del Álgebra de Proposiciones.
2. Demuestre las Equivalencias de la Lista Adicional.
3. Demuestre que las Condicionales siguientes son **IMPLICACIONES LÓGICAS**:
   a) $p \Rightarrow p$
   b) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$: LEY TRANSITIVA

c) $(\sim p) \Rightarrow (p \to q)$

d) $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$;

e) $p \Rightarrow (p \vee q)$

f) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

g) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

h) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$

f) $(p \leftrightarrow q) \Rightarrow (p \to q)$

4. Demuestre que las bicondicionales siguientes son **EQUIVALENCIAS LÓGICAS**:
   a) $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
   b) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$
   c) $(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p$
   d) $(p \vee q) \wedge p \Leftrightarrow p$
   e) $\sim(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

5. Demuestre que
   a) $\sim(p \to q) \equiv p \wedge (\sim q)$
   b) $(F \to p) \equiv V$; $(p \to F) \equiv \sim p$; $(p \to V) \equiv V$
   c) $(p \to q) \equiv [(p \vee q) \leftrightarrow q]$
   d) $(p \to q) \equiv [(p \wedge q) \leftrightarrow p]$

6. Dadas las proposiciones:
   I) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   II) $\sim(p \to q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   III) $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

   indique cuál (cuáles) es una contradicción (F).

7. La proposición $\sim(p \to q) \wedge (q \to \sim r)$, ¿a cuál (cuáles) de las siguientes proposiciones es equivalente?
   a) $p \wedge (p \vee \sim r) \wedge (\sim q)$,
   b) $p \wedge (\sim q) \wedge [\sim(q \wedge r)]$
   c) $(p \wedge \sim q) \vee [(p \wedge \sim r) \wedge \sim q]$

8. ¿Alguna de las siguientes proposiciones es una Tautología?:
   a) $\sim[(\sim(p \vee q)) \to \sim q] \leftrightarrow (p \to q)$
   b) $\sim[(\sim p) \leftrightarrow q] \leftrightarrow (p \to q)$
   c) $\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \leftrightarrow (p \to \sim q)$

9. Simplifique: $[((\sim p) \wedge q) \to (r \wedge \sim r)] \wedge (\sim q$

10. Simplifique: $[(\sim q \to \sim p) \to (\sim p \to \sim q)] \wedge \sim(p \wedge q)$

11. De las siguientes proposiciones, ¿Cuáles son Equivalentes entre sí? :
    a) Es necesario que Juan no estudie en la UNI para que Luís viva en el Rímac.
    b) No es cierto que Luís viva en el Rímac y que Juan estudie en la UNI.
    c) Luís no vive en el Rímac y Juan no estudia en la UNI.

12. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son Tautologías? :
    a) $[(p \vee \sim q) \wedge q] \rightarrow p$, b) $[(p \wedge q) \vee q] \leftrightarrow q$
    c) $[(\sim p) \wedge (q \vee \sim r)] \leftrightarrow [(q \wedge \sim p) \vee \sim(p \vee r)]$

13. De la falsedad de $(p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \rightarrow s)$, deducir el valor de verdad de:
    a) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)$
    b) $[(\sim r \vee q) \wedge q] \leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
    c) $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q$

14. Si se sabe que $(p \wedge q)$ y $(q \rightarrow t)$ son falsas, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas? :
    a) $(\sim p \vee t) \vee s$, b) $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$
    c) $[(\sim p) \vee (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge \sim(q \wedge t)]$

15. ¿Cuál (es) de las siguientes proposiciones es equivalente a:
    "*Es necesario pagar* 100 *soles y ser más joven para ingresar al baile* " ?,
    a) No ingresar al baile pagar 100 soles, y ser más joven.
    b) Pagar 100 soles ser más joven, y no ingresar al baile.
    c) Pagar 100 soles y ser más joven no ingresar al baile.

16. Si la proposición $(q \wedge \sim p) \rightarrow [(p \wedge r) \vee t]$ es falsa, halle el valor de verdad de:
    a) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (r \vee \sim t)]$
    b) $(\sim q \wedge \sim r) \vee [(\sim t) \wedge (p \vee q)]$
    c) $(\sim p \rightarrow t) \rightarrow (\sim q \rightarrow r)$

17. Demuestre que las tres proposiciones siguientes son equivalentes:
    a) $\sim[(q \vee \sim p)\ \text{v}\ (q \wedge (r \vee \sim p))]$
    b) $(p \wedge \sim q) \wedge [\sim q \vee (p \vee \sim r)]$
    c) $\sim[(\sim q) \rightarrow (\sim p)] \wedge [q \rightarrow \sim(p \rightarrow r)]$

18. La proposición $(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)$ es verdadera ; teniendo r y s valores de verdad opuestos, ¿cuáles son verdaderas?:
    a) $[(\sim p \wedge \sim q) \vee (r \wedge s)] \wedge p$ es *verdadera*
    b) $[\sim(p \vee q) \wedge (r \vee s)] \vee (\sim p \wedge q)$ es *falsa*
    c) $[(\sim r \wedge \sim s) \rightarrow (p \vee r)] \wedge \sim(r \wedge s)$ es *verdadera*

19. ¿Cuáles son Equivalencias Lógicas? :
    a) $\sim(q \rightarrow \sim p) \leftrightarrow (q \vee p)$
    b) $[(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q] \leftrightarrow \sim[(p \vee q) \wedge q]$

c) $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

20. Si $p \downarrow q$ se define por $[(\sim p) \wedge (\sim q)]$, entonces ¿a cuál es equivalente $\sim(p \leftrightarrow q)$? :

    a) $[(\sim p) \downarrow q] \vee (q \downarrow p)$

    b) $[(\sim p) \downarrow q] \vee [(\sim q) \downarrow p]$

    c) $[(\sim p) \downarrow (\sim q)] \vee (p \downarrow q$

21. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones

    a) $\sim[p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)]$, b) $(p \wedge \sim q) \vee r$

    c) $(r \vee q) \wedge \sim(\sim r \wedge q)$, d) $(\sim p) \vee q \vee r$

    son equivalentes a : $(p \rightarrow q) \rightarrow r$?.

22. Si $p \downarrow q$ significa " ni p y ni q ", ¿cuáles de las siguientes proposiciones son Tautologías? :

    a) $[(p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow p)] \leftrightarrow (p \vee q)$

    b) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (p \downarrow q)$

    c) $(p \downarrow q) \leftrightarrow \sim(p \vee q)$

23. ¿Cuántas F y cuántas V tiene el resultado de la Tabla de Verdad de:
    $\sim[(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \wedge (s \vee \sim s)$ después de simplificarla? .

24. Dada la proposición
    $z : \{(p \rightarrow q) \rightarrow [p \vee (q \wedge r)]\} \rightarrow [q \wedge (p \vee r)]$,

    a) Indique los valores de p y r de modo que si q es F, entonces z es F.
    b) Indique los valores de p y r de modo que si q es V, entonces z es V.

25. Escribir la negación de cada una de las proposiciones siguientes:

    a) Él no es rico, pero es feliz.
    b) Él no es pobre ni es feliz.
    c) Él es bajo pero es ágil.
    d) Ni Juan ni Carlos viajarán a Huaraz a fin de mes.
    e) Él tiene un compás una regla.
    f) Ambos equipos Alianza y la U irán a la Copa Libertadores.
    g) Si Juan llega a tiempo con los documentos, entonces ambos, Carlos y Pedro, podrán inscribirse en la Universidad..

26. Si p, q, r, s, t, w son proposiciones tales que

    a) $(p \wedge \sim r) \leftrightarrow (s \rightarrow w)$ es verdadera,
    b) $(\sim w \rightarrow \sim s)$ es falsa,

    halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

    c) $(p \wedge q) \vee r \vee s$, d) $(s \leftrightarrow \sim w) \rightarrow (r \vee \sim p)$
    e) $[t \rightarrow (w \vee \sim p)] \wedge \sim(p \rightarrow r)$

RPTA: $w : F$, $s : V$, $r : V$, $p : F$, de donde (c) y (d) son verdaderas, mientras que (e) es falsa.

27. Exprese la siguiente proposición compuesta de otra forma, utilizando únicamente los símbolos $(\sim)$ y $(\rightarrow)$: $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$.

RPTA: $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow [(\sim r) \rightarrow s]$.

28. Simplifique la expresión:

$$(\sqrt[3]{8} > \sqrt{2} \wedge -8 < 0) \rightarrow [\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{8} \vee (\frac{1}{\sqrt[3]{8}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow 8 > 0)]$$

29. Sin usar tablas de verdad, determinar si las siguientes proposiciones (a) y (b) son Lógicamente Equivalentes:

a) $[(\sim s) \rightarrow (\sim w)] \vee [t \rightarrow (\sim w)]$, b) $w \rightarrow [(\sim t) \vee s]$

CLAVE DE RESPUESTAS

6. III , 7. Todas , 8. Sólo (c) , 9. $\sim q$, 10. $\sim q$,
11. Sólo (a) y (b) , 12. Todas , 13. a) F, b) F , c) V ; 14. Todas,
15. Sólo (c) , 16. a) F , b) V , c) V . 18. Sólo (c) , 19) Sólo (b) y (c),
20. y 21. Sólo (b), 22. Sólo (a) y (c), 23. 1V y 7F,
24. a) p , r : V , b) p , r : V .
25. a) Él es rico no es feliz; b) Él es pobre es feliz.
c) Él no es bajo no es ágil.
d) Al menos uno, Juan Carlos viajarán a Huaraz a fin de mes.
e) Él no tiene ni un compás ni una regla.
f) Al menos uno de los dos equipos, Alianza la U, no irá a la Copa Libertadores.
g) Juan no llegará a tiempo con los documentos, y en tal caso al menos uno, Carlos Pedro, no podrá inscribirse en la Universidad.
28. V , 29. Sí son Lógicamente Equivalentes.

7. RAZONAMIENTO LÓGICO. ARGUMENTOS VÁLIDOS

Un **ARGUMENTO LÓGICO** (simplemente un **ARGUMENTO**) es una condicional de la forma:

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \rightarrow q \quad (*)$$

donde las proposiciones p_1, p_2, ... , p_k son llamadas **PREMISAS**, y originan como consecuencia otra proposición q llamada **CONCLUSIÓN**.

A) El Argumento $(*)$ recibe el nombre de **ARGUMENTO VÁLIDO** si dicha condicional es una TAUTOLOGÍA. Es decir, si

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \Rightarrow q \; .$$

B) Si el Argumento $(*)$ es FALSO, entonces se tiene la llamada **FALACIA**.

TEOREMA.- Si el Argumento $(*)$ es VÁLIDO, y las premisas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, son verdaderas entonces la CONCLUSIÓN q es correcta (V).

PRUEBA.- Siendo el Argumento válido entonces la condicional $(*)$ es una TAUTOLOGÍA (V), en la que $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k)$ es verdadera (V), pues cada p_i lo es, de donde la única posibilidad para q es que sea verdadera (pues si fuese FALSA, la condicional $(*)$ sería falsa y el argumento $(*)$ no sería VÁLIDO).

OBSERVACIÓN.- Un argumento no se modifica si es que una varias de las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_k, q$ se reemplaza por otra u otras que sean EQUIVALENTES.

NOTACIÓN .- Un argumento $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_k) \rightarrow q$ también se denota en la forma:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ . \\ . \\ p_k \\ \hline q \end{array}$$

PROBLEMA.- Demuestre que el siguiente argumento es VÁLIDO:

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

SOLUCIÓN . - Por definición, se debe demostrar que la condicional

$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ es siempre verdadera (V) :

$$\begin{aligned}
&\equiv \sim[p \wedge (p \rightarrow q)] \vee q \equiv \sim[p \vee (\sim p \vee q)] \vee q \\
&\equiv \sim[(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)] \vee q \equiv \sim[F \vee (p \wedge q)] \vee q \\
&\equiv \sim[p \wedge q] \vee q \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q \\
&\equiv (\sim p) \vee (\sim q \vee q) \equiv \sim p \vee V \equiv V \text{ (TAUTOLOGÍA) .}
\end{aligned}$$

EJEMPLO .- En un ejercicio propuesto se presentó la propiedad TRANSITIVA: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$. Por lo tanto, el siguiente argumento es VÁLIDO:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

PROBLEMA .- Para cada conjunto dado de premisas, encuentre una CONCLUSIÓN adecuada de manera que el argumento sea VÁLIDO:

a) $p \to \sim q\ ,\ \ r \to q$; b) $p \to \sim q\ ,\ \ r \to p\ ,\ q$.

SOLUCIÓN .- De las implicaciones conocidas vemos que en:

a) Si $r \to q$ la reemplazamos por su equivalente $(\sim q \to \sim r)$ entonces se obtiene que, por la propiedad TRANSITIVA:

$$(p \to \sim q) \wedge (\sim q \to \sim r) \Rightarrow (p \to \sim r) .$$

b) Análogamente, por conmutatividad se tiene que:

$$\equiv [(r \to p) \wedge (p \to \sim q)] \wedge q \ \Rightarrow\ (r \to \sim q) \wedge q$$

$\equiv q \wedge (q \to \sim r) \ \Rightarrow\ \sim r$, por el problema anterior.

En resumen, se han hallado las siguientes conclusiones correctas para:

a) $p \to \sim r$, b) $\sim r$.

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Cuando se demuestra que un argumento en la forma

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots\ \wedge p_k) \to q \qquad \dots \text{(I)}$$

es una TAUTOLOGÍA, se dice que se ha empleado un MÉTODO DIRECTO DE DEMOSTRACIÓN.
Si ahora consideramos la negación de la conclusión q y de *alguna* de las premisas $p_1\ , p_2\ ,\ \dots\ , p_k$, digamos de p_k , y se forma el argumento

$$[(p_1 \wedge p_2 \wedge \ \dots\ \wedge p_{k-1}) \wedge (\sim q)] \to \sim p_k \qquad \dots \text{(II)}$$

veremos que este último argumento (II) <u>es equivalente</u> a (I) :

(II) $\equiv \sim[(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{k-1}) \wedge \sim q] \vee (\sim p_k)$

$\equiv [\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_{k-1}) \vee \sim(\sim q)] \vee (\sim p_k)$

$\equiv \sim(p_1 \wedge \dots \wedge p_{k-1}) \vee (\sim p_k) \vee q \equiv \sim(p_1 \wedge \dots \wedge p_{k-1} \wedge p_k) \vee q$

$\equiv (p_1 \wedge \dots \wedge p_k) \to q \quad \dots$ (I)

DEFINICIÓN .- *Cuando se desea demostrar la validez de* (I) *usando su forma equivalente* (II) *se dice que se está empleando el MÉTODO INDIRECTO MÉTODO POR REDUCCIÓN AL ABSURDO. Note que este método consiste en considerar ahora como una premisa a la negación de la conclusión, es decir a* $(\sim q)$ *y se trata de inferir (válidamente) la negación de alguna de las premisas (en el caso anterior, se trató de inferir:* $\sim p_k$) *considerando las demás proposiciones verdaderas.*

PROBLEMA .- Verifique la validez de los siguientes argumentos. Usar primero un método directo y luego un método indirecto.

a) $$\begin{array}{l} p \to q \\ r \to \sim q \\ \hline p \to \sim r \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} q \to p \\ q \vee s \\ \sim s \\ \hline p \end{array}$$

SOLUCIÓN .- **MÉTODO DIRECTO** :

a) $(p \to q) \wedge (r \to \sim q) \to (p \to \sim r)$

$\equiv (p \to q) \wedge (q \to \sim r) \to (p \to \sim r) \equiv V$, por la propiedad TRANSITIVA.

b) $(q \to p) \wedge (q \vee s) \wedge (\sim s) \to p \equiv (\sim q \vee p) \wedge (q \wedge \sim s) \to p$

$\equiv (p \wedge q \wedge \sim s) \to p \equiv \sim(q \wedge (\sim s) \wedge p) \vee p$

$\equiv \sim(q \wedge \sim s) \vee (\sim p) \vee p \equiv \sim(q \wedge \sim s) \vee V \equiv V$

MÉTODO INDIRECTO : a) Demostraremos la validez de: $$\begin{array}{c} p \to q \\ \sim(p \to \sim r) \\ \hline \sim(r \to \sim q) \end{array}$$

$\equiv (p \to q) \wedge \sim(p \to \sim r) \to \sim(r \to \sim q)$
$\equiv \sim(p \to q) \vee (p \to \sim r) \vee \sim(r \to \sim q)$
$\equiv \sim[(p \to q) \wedge (r \to \sim q)] \vee (p \to \sim r)$
$\equiv \sim[(p \to q) \wedge (q \to \sim r)] \vee (p \to \sim r)$
$\equiv (p \to q) \wedge (q \to \sim r) \to (p \to \sim r) \equiv V$ (TAUTOLOGÍA)

b) Demostraremos que la siguiente condicional es una Tautología:

$[(q \to p) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s)] \to \sim(q \vee s)$

$\equiv [(\sim q \vee p) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s)] \to \sim(q \vee s)$
$\equiv \{[(\sim q \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim p)] \wedge (\sim s)\} \to \sim(q \vee s)$
$\equiv \{[(\sim q \wedge \sim p) \vee F] \wedge (\sim s)\} \to \sim(q \vee s)$
$\equiv (\sim q) \wedge (\sim p) \wedge (\sim s) \to \sim(q \vee s) \equiv \sim(q \vee p \vee s) \to \sim(q \vee s)$
$\equiv q \vee p \vee s \vee \sim(q \vee s) \equiv p \vee [(q \vee s) \vee \sim(q \vee s)] \equiv p \vee V \equiv V$

PROBLEMA DE APLICACIÓN .- Sea n un entero positivo. Demostrar que: si n^2 es par, entonces n es par.

SOLUCIÓN .- Sean p : n^2 es par, q : n es par. Se desea demostrar que:

$p \Rightarrow q$, pero en forma indirecta por REDUCCIÓN AL ABSURDO ,

es decir, demostraremos que:

$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$, para lo cual, *asumimos como PREMISA a la NEGACIÓN de* q , $(\sim q)$: n es impar

entonces $n = 2k + 1$ para algún entero $k \geq 0$, y por lo tanto:

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k_1 + 1,$$

donde $k_1 = 2k^2 + 2k$ es un entero, lo que indica que n^2 es IMPAR.
Así, hemos llegado a inferir la NEGACIÓN de p :

$\sim p$: n^2 es Impar, con lo cual el problema queda resuelto.

PROBLEMA DE APLICACIÓN.- Demuestre que no existe ningún número racional $q = \dfrac{m}{n}$, m , n enteros primos entre sí (es decir, que no tienen factores enteros comunes, excepto el 1) , tal que: $q^2 = 2$.
(equivalentemente, que $\sqrt{2}$ *no es racional*).

SOLUCIÓN .- Supongamos que (lo contrario) la negación de la tesis se cumple, es decir, que $q^2 = 2$, para algún racional q tal que $q = \dfrac{m}{n}$, con m , n enteros primos entre sí. Entonces,

$q^2 = 2 \Rightarrow (m/n)^2 = 2 \Rightarrow (*)\ \ m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ es par

$\Rightarrow$ m también es par (por el problema anterior) $= 2k_1$, para algún entero k_1 , entonces en $(*)$: $4k_1^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2$ es par

$\Rightarrow$ n es par (por el problema anterior) $n = 2k_2$, para algún entero k_2 ; resultando así que m y n tienen al número 2 como factor común, *contradiciendo* (negando) la hipótesis acerca de m y n de no tener factores comunes distintos de 1 .

SERIE DE EJERCICIOS

1. Verifique la validez de los siguientes Argumentos:

a) $\begin{array}{l} p \wedge q \\ \sim p \rightarrow q \\ \hline \sim q \end{array}$

b) $\begin{array}{l} p \wedge (p \vee q) \\ (p \vee q) \rightarrow r \\ r \rightarrow s \\ \hline s \end{array}$

d) $\begin{array}{l} r \rightarrow \sim q \\ p \rightarrow q \\ \sim r \rightarrow s \\ \hline p \rightarrow s \end{array}$

c) $\dfrac{\begin{array}{l}(p \wedge q) \to (r \wedge s)\\ (\sim q) \vee (\sim s)\end{array}}{(\sim p) \vee (\sim q)}$ d) $\dfrac{\begin{array}{l}p\\ (\sim p \vee \sim s) \to [(\sim p) \wedge (\sim r)]\end{array}}{s}$

SUG: Algunos se prueban mejor por el método indirecto.

2. Sea n un número entero. Demuestre que si n^2 es múltiplo de 3, entonces n también es múltiplo de 3.

   SUG: n no múltiplo de 3 equivale a que $n = 3k + 1$ o $n = 3k + 2$, para k entero, y en ambos casos resulta que n^2 no es múltiplo de 3.

3. Sea n un entero, demuestre que si n^2 es múltiplo de 5 entonces n es múltiplo de 5.

4. Sea n un entero, demuestre que si n^2 es múltiplo de 6 entonces n es múltiplo de 6.
   SUG: m es múltiplo de 6 si y sólo si m es múltiplo de 2 y de 3 a la vez

5. Sea n un entero, demuestre que si n^3 es múltiplo de 2 entonces n es múltiplo de 2.

6. Demuestre que no existe ningún número racional q tal que $q^2 = 3$.

7. Demuestre que no existe ningún número racional q tal que $q^3 = 2$.

2

CONJUNTOS

1. CONJUNTOS

Se entiende por CONJUNTO a una colección, agrupación o reunión de objetos o ELEMENTOS, y que puede ser determinado ya sea por EXTENSIÓN: cuando sus elementos están indicados explícitamente entre llaves, o por COMPRENSIÓN: cuando existe una propiedad o condición que es común a todos estos elementos, de tal manera que al considerar cualquier objeto existente se pueda establecer sin ambigüedad si es o no elemento de tal colección.

NOTACIÓN .- Para representar a los conjuntos generalmente se utilizan letras mayúsculas A, B, X, etc. y para representar a sus elementos se usan letras minúsculas a, b, x, etc. Si el conjunto A consiste de los elementos $1, 3, 5, 7$, se puede representar:

a) Por extensión: $A = \{1, 3, 5, 7\}$

b) Por comprensión: $A = \{x / \ (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = 0\}$

o sino $A = \{x : \ (x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = 0\}$

y se lee " A es el conjunto de los x tales que

$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) = 0$ ".

Si un objeto x es elemento de un conjunto A se dice que " x **pertenece** al conjunto A " o que " x **está** en el conjunto A ", y se denota $x \in A$.

En caso contrario, se denotará $x \notin A$.

En el caso del conjunto A que acabamos de presentar: $7 \in A$, pero $4 \notin A$.

Es importante saber que un conjunto mismo puede ser también elemento de algún otro conjunto. Por ejemplo, si $A = \{\{0\}, \{2\}, \{6\}\}$ y $B = \{0\}$, entonces $0 \in B$, $B \in A$ y $0 \notin A$.