

Ewald Bamberger

# Lineare Funktionen und Gleichungssysteme

Typische Aufgabenstellungen an Beispielen erklärt

# Inhaltsverzeichnis

Prolog

Gleichungen

Funktionen

Aufgabentypen

Systeme

Methoden

Anwendungen

Determinanten

Epilog

# Prolog

In diesem Buch möchte ich das Rechnen mit linearen Gleichungen, linearen Funktionen und linearen Gleichungssystemen vorstellen.

Ich werde mich dabei beschränken auf solche Gleichungen, in denen eine Variable oder aber zwei Variablen auftreten.

Diese Themen werden innerhalb der zweiten Hälfte der Sekundarstufe I, in den Klassenstufen 8, 9 und 10 behandelt.

Die Theorie werde ich nur berühren und kurz zur Darstellung bringen. Dieses Buch will den Unterricht der Schulen ergänzen, nicht ersetzen.

Im Vordergrund und Mittelpunkt dieses Buches stehen die typischen Aufgabenstellungen und Methoden, die es zu lernen gilt.

Zentrale Begriffe werden sein: Gleichung, Variable, Parameter, Gerade, Funktion, Funktionsterm, Argument, Funktionswert, Steigung(sdreieck), Achsenabschnitt, Nullstelle, Schnittpunkt, Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Determinante, Cramersche Regel.

Das primäre Ziel besteht für mich darin, diese Themen so darzustellen, sodass sie für dich, den Leser oder die Leserin, verständlich sind.

Ich werde daher den gesamten Text in kleinen Portionen auf die einzelnen Seiten dieses Buches verteilen.

Lerne Schritt für Schritt, Portion für Portion, indem du die Aussagen und Beispiele genau betrachtest und, wenn nötig, mehrfach wiederholst.

Versuche dann deine Kenntnisse auf die Aufgabenstellungen des Unterrichts in deiner Schule anzuwenden.

Dieses Buch will den Unterricht der Schule, wie gesagt, ergänzen. Es ist daher insbesondere entscheidend, dass du dich im Unterricht beteiligst.

Dadurch erhältst du im mündlichen Bereich eine bessere Note, kannst eher mitreden, wenn der Lehrer oder die Lehrerin etwas fragt und du nimmst dir selbst etwas den Druck, kannst gelassener die Klassenarbeiten angehen.

Nun wünsche ich dir mit diesem Buch viel Erfolg!

# Gleichungen

Gleichungen in der Mathematik sind entweder Aussageformen oder Aussagen. Aussagen können wahr sein oder unwahr.

Zum Beispiel ist  $17 = 17$  eine wahre Aussage. Jedoch, wenn wir Einheiten hinzufügen, etwa  $17 \text{ cm} = 17 \text{ m}$ , dann ergibt sich eine unwahre Aussage.

Eine Gleichung, die einen Buchstaben enthält, zum Beispiel  $x + 3 = 8$ , ist keine Aussage, sondern eine Aussageform.

Je nachdem, welche Zahl man für den Buchstaben, hier den Buchstaben  $x$ , einsetzt, ergibt sich dann entweder eine wahre Aussage oder aber eine unwahre Aussage.

Setzen wir zum Beispiel die Zahl 4 für den Buchstaben  $x$  ein, so erhalten wir die unwahre Aussage  $4 + 3 = 8$ . Setzen wir hingegen die Zahl 5 für den Buchstaben  $x$  in die Aussageform ein, bekommen wir eine wahre Aussage, nämlich  $5 + 3 = 8$ .

Eine Gleichung, die einen Buchstaben enthält, zu lösen, bedeutet, jene Zahlen zu finden, für die die Aussageform in eine wahre Aussage übergeht.

Buchstaben nennen wir in der Mathematik manchmal Variable und manchmal Parameter. Den Unterschied werden wir weiter unten im Text noch kennenlernen.

Lineare Gleichungen nun, um diese geht es ja in diesem Buch, sehen im einfachsten Fall etwa so aus:

$$3x - 6 = 0$$

Diese Gleichung ist linear, weil in ihr der Buchstabe  $x$  lediglich in der 1. Potenz vorkommt. Du wirst im Verlauf deiner Schulzeit wahrscheinlich auch Gleichungen kennenlernen, in denen zum Beispiel ein  $x^2$  auftaucht (lies:  $x$  quadriert).

Mit solchen Gleichungen wollen wir uns in diesem Buch nicht beschäftigen. In den Gleichungen dieses Buches, den linearen Gleichungen, stehen die Buchstaben zudem immer im Zähler und nie im Nenner eines Bruches.

$$3x - 6 = 0$$

Lass uns diese Gleichung noch einmal betrachten. In dieser Gleichung sehen wir einen Buchstaben, nämlich den Buchstaben  $x$ . Dieser wird nicht quadriert. Er steht zudem im Zähler. Würde er im Nenner stehen, sähe dies so aus:

$$\frac{3}{x} - 6 = 0$$

Ansonsten werden in unserer Gleichung keine Operationen vollzogen, also keine Sachen gemacht, die uns beunruhigen müssten.

$$3x - 6 = 0$$

Der Buchstabe  $x$  wird lediglich mit der Zahl 3 multipliziert, anschließend (Punkt vor Strich) wird die Zahl 6 subtrahiert. Das Ergebnis dieser Rechnung soll dann 0 ergeben.

Entweder man sieht nun quasi sofort, dass für die Variable  $x$  die Zahl 2 einzusetzen ist, damit eine wahre Aussage entsteht. Denn:

$$3 \cdot 2 - 6 = 0$$

Oder aber wir nehmen zwei Umformungen vor, die die Gleichung jeweils vereinfachen. Wir könnten zum Beispiel zunächst einmal auf beiden Seiten der Gleichung die Zahl 6 addieren. Dann passiert das:

$$\begin{aligned}3x - 6 &= 0 \\ \Rightarrow 3x - 6 + 6 &= 0 + 6 \\ \Rightarrow 3x &= 6\end{aligned}$$

Diese Gleichung sieht doch schon etwas freundlicher aus. Wir können überlegen. Welche Zahl muss man mit 3 multiplizieren, um das Ergebnis 6 zu erhalten? Nun, dies ist natürlich die Zahl 2.

Wir können aber auch eine weitere Umformung vornehmen. Nun dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch 3, denn 3 ist der Faktor (Koeffizient) vor dem x:

$$\begin{aligned}3x &= 6 \\ \Rightarrow 3x: 3 &= 6: 3 \\ \Rightarrow &= 2\end{aligned}$$

So, nun haben wir's aber. Die Zahl 2 löst die Gleichung  $3x - 6 = 0$ . Denn bei Einsetzung dieser Zahl für die Variable x erhalten wir eine wahre Aussage.

$$3 \cdot 2 - 6 = 0$$

Die Zahl 2 ist auch die einzige Lösung unserer Gleichung. Lineare Gleichungen mit einer Variablen (oder: in einer Variablen) haben immer genau eine Lösung.

Ach so, ich hatte dir ja versprochen, den gesamten Text in kleine Portionen aufzuteilen. Daher machen wir nun besser eine Pause.

Du kannst gern eine Pizza essen gehen oder dich etwas ausruhen, ich warte hier solange auf dich. Aber du musst auch wiederkommen, ja?

Also dann, weiter geht's. Bisher haben wir nur eine lineare Gleichung mit **einer** Variablen behandelt. Die linearen Gleichungen mit einer Variablen stellen aber eigentlich