Hans-Peter Zerlauth / Johannes Barton

Mathematische Erzählungen

Geschichten mit grundlegenden Begriffen der Mathematik

Was dich in diesem Buch erwartet

Vorwort

Es soll nicht genügen, dass man Schritte tue,
die einst zum Ziele führen,
sondern jeder Schritt soll Ziel sein
und als Schritt gelten.

Johann Wolfgang von Goethe

Kein Zitat kann die letzten Jahre, in denen wir uns mit dem Projekt »Lesbare Mathematik« beschäftigt haben, besser beschreiben.

Welcher Gedanke bewegte uns, ein mathematisches Lesebuch zu schreiben? Damals waren wir – so wie auch heute noch – mit der Entwicklung in der Schulmathematik und der sturen Rechnerei unzufrieden. Uns ging es, und geht es noch immer, um mehr. Wir wollen »über die Sache sprechen«.

Wenn wir über mathematische Begriffe reden, sollen Bilder entstehen – die sehr oft im gleichen Atemzug durch eine andere Sichtweise relativiert oder kritisch hinterfragt werden dürfen, denn die Anschauung ist ein Konstrukt unseres Blickes, unserer Erfahrungen, Empfindungen und Gefühle, und die Mathematik scheint kein Gefühl zu besitzen. Ähnlich denkt man wohl auch über Mathematiker.

Prinzipiell ist es aber umgekehrt: Wenn wir als Mathematiker Begriffe untersuchen, so treten diese in die Realität ein und erzeugen Emotionen. Ein Beispiel soll das veranschaulichen. Der Begriff »Sterblichkeitsraten« wird von Versicherungen verwendet, um Prämien zu berechnen und von Banken eingesetzt, wenn es um die Vergabe von Krediten geht. Es ist kein gutes Gefühl zu hören »Sie sind zu alt für einen Kredit!«, auch wenn das meist höflicher formuliert wird und wir – scheinbar zufrieden – mit einer Ablebensversicherung das Gebäude verlassen.

In ähnlicher Form argumentieren wir in diesem Buch, und das ist auch im Wesentlichen unsere Grundidee, die am Heurigentisch vor gut 10 Jahren entwickelt wurde und mit den Zeilen »*Betrachten wir den Lauf des Lebens, so fragen wir uns oft* …« begann.

Unseren ersten Schritt zur Verwirklichung dieser Grundidee setzten wir 2010 mithilfe des Verlages Braumüller im Buch »Mathematik quergedacht« (ISBN 978-399100-013-6), das die folgenden Kapitel behandelte:

Das Fundament (Natürliche Zahlen)

Der Automat (Funktionen)

Die Zelle (Vektorräume)

Das Kaleidoskop

So wie sich die Schulmathematik in Richtung Standards entwickelte, hat auch im Verlagswesen eine Wende stattgefunden, und wir haben uns nach Rücksprache mit dem Braumüller Verlag entschlossen, den zweiten Band im Eigenverlag herauszugeben, um unser Ziel – den gesamten österreichischen Oberstufenlehrstoff lesbar zu machen und mit Bildern zu veranschaulichen – zu verwirklichen.

Der zweite Teil unseres Projektes ist nun fertig und behandelt die noch offenen Kapitel:

Das Tagebuch (Folgen und Reihen)

Das Netz (Stochastik)

Das Foto (Differenzialrechnung)

Die Waage (Integralrechnung)

Wir bleiben also auch im zweiten Buch unserem Motto treu und haben zu den für uns grundlegenden mathematischen Begriffen wieder Geschichten verfasst, die wir besprechen und berechnen.

Wie auch in »Mathematik quergedacht« haben wir unsere Kapitel in Abschnitte unterteilt, wobei der erste Abschnitt stets unsere Grundgedanken zu diesem Kapitel behandelt und der letzte die Gedanken der einzelnen Abschnitte wiederholt und zusammenfasst.

Dass wir mit Bildern arbeitenn erkennt man schon an unseren Abschnittsüberschriften, und insgesamt ist der zugrunde liegende mathematische Gedanke nicht sofort ersichtlich. Das ist bewusst so gewählt, denn im Erlernen der Mathematik geht es vielen ähnlich: trotz klarer mathematischer Darstellung dringt der Lernende bisweilen nur schrittweise zum Kern der Sache vor.

In den Randspalten finden sich Anregungen oder fett gedruckte Begriffe, die gewissermaßen als Stichworte dienen und Querverbindungen herstellen.

Wir wünschen nun viel Spaß mit der Lektüre und bedanken uns bei allen Variablen, Parametern und Symbolen, die unser Buch stützen, und bei Frau R.

Hans-Peter Zerlauth, Johannes Barton
Manhartsbrunn, Wien, 2015

Es soll nicht genügen, dass man Schritte tue,
die einst zum Ziele führen,
sondern jeder Schritt soll Ziel sein
und als Ziel gelten.
Johann Wolfgang von Goethe

Das Tagebuch

»Hast du ein Tagebuch?«

Wir haben die Ereignisse unseres bewegten Lebens in einem Tagebuch verewigt und dieses liegt aufgeschlagen vor uns. Beim Durchblättern stellen wir uns drei Fragen:

1. War und ist unser Lebensweg zu jedem zukünftigen Zeitpunkt voraussagbar? Sprich: Wir geben ein Datum an und erfahren, dass zu diesem Zeitpunkt die folgenden Zeilen verfasst werden.
2. Hat sich unser Lebensweg aufgrund unserer momentanen Entscheidungen immer wieder in eine neue Richtung entwickelt? Sprich: Weil wir bei einem Gespräch ermuntert werden über ein Tagebuch zu schreiben, entschließen wir uns spontan diese Zeilen zu schreiben.
3. War unser Leben eine Mischung aus 1. und 2.? Sprich: Wir geben ein Datum an und wissen, dass zu diesem Zeitpunkt ein Gespräch stattfindet, und daraufhin entschließen wir uns spontan ein paar Zeilen zu schreiben.

Aus dem Bauch heraus wünschen wir uns manchmal 1., manchmal 2. und vermuten vielleicht, dass es 3. ist. Beim Durchblättern des Tagebuches stellen wir allerdings fest, dass eines ganz bestimmt richtig ist: Es geht stetig voran!

Seite für Seite, Tag für Tag, Ereignis für Ereignis …

Der Lauf der Zeit hat eine Richtung, und es ist uns nicht möglich, Vergangenes zu beeinflussen, auch wenn wir uns das manchmal wünschen. Es gelingt uns auch nicht jünger zu werden. Im Gegenteil, wir altern!

Wenn du dich nun fragst, was dies alles mit Mathematik zu tun hat, sieh dir unser Tagebuch doch noch etwas näher an. Wir brauchen das Gesagte nur geringfügig zu vereinfachen, und schon können wir daraus ein höchst spannendes Teilgebiet der Mathematik entwickeln. Wir müssen uns nur von den persönlichen Erlebnissen trennen und die wesentlichen Gedanken mithilfe der Symbolsprache und einiger neuer Begriffe beschreiben. Filtern wir also auf den nächsten Seiten die Grundgedanken aus dem eben Gesagten heraus.

Reihenfolge und **Richtung**: Sie sind in unserem Tagebuch durch die aufeinanderfolgenden Einträge und in der Mathematik durch die Ordnung der natürlichen Zahlen gegeben:

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Erlebnisse und **Einträge**: Die Einträge in unserem Tagebuch erfolgten in eindeutiger Weise. Am 10. des Monats um 18.45 Uhr ist eben nicht das Eine und zur gleichen Zeit das Andere passiert. Unser Leben ist somit eindeutig! Diese Eindeutigkeit wird auch vom Funktionsbegriff gefordert.

Wir können also den Funktionsbegriff verwenden und benützen dabei für jeden Zeitschritt die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Definitionsmenge. Wir fordern bei dieser speziellen Funktion allerdings auch die Einhaltung einer Reihenfolge oder Abfolge unserer Funktionswerte. Solch eine Funktion bezeichnen wir zukünftig als **Folge**.

Grafisch ist diese Reihenfolge im Koordinatensystem stets zu beachten und in einer »sortierten« Tabelle würde dies wie folgt aussehen, wenn wir die Ereignisse, die wir zukünftig als **Folgeglieder** bezeichnen, als x_n anschreiben:

Reihenfolge	Ereignis
0	x_0
1	x_1
2	x_2
3	x_3
...	...

Da wir bei Folgen immer die Ordnung der natürlichen Zahlen verwenden werden, liegt es nahe eine Kurzschreibweise einzuführen und auf die Tabellenform in manchen Fällen zu verzichten. Wir schreiben die Folgeglieder einfach der Reihe nach von links nach rechts in Zeilenform an. Die Kurzschreibweise unseres mathematischen Tagebuchs sieht daher wie folgt aus:

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$$

Hierbei bezeichnet x_3 das vierte Ereignis in unserer Reihenfolge. Das ist manchmal etwas unpraktisch. Viel besser wäre es, wenn sich an der dritten Stelle auch das dritte Ereignis befände. Das erreichen wir, wenn die Ordnung nicht bei 0, sondern bei 1 beginnt:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots$$

Beide Schreibweisen sind üblich. Die Folge der Primzahlen sieht zum Beispiel so aus:

$$2, 3, 5, 7 \ldots$$

Du kannst es dir nun aussuchen, ob das erste Folgeglied, in unserem Beispiel die erste Primzahl, nämlich 2 – übrigens die einzig gerade Primzahl –, mit x_0 oder x_1 bezeichnet wird. Die skizzierte Kurzschreibweise nennen wir zukünftig die **aufzählende Darstellung** einer Folge.

Bezüglich der Anzahl von Folgegliedern geben wir keine Einschränkung. Folgen können unendlich oder endlich viele Folgeglieder haben.

Woher aber kommen Folgeglieder? Können wir sie erzeugen? Diese spannenden Fragen wollen wir uns gleich etwas genauer ansehen!

Wir können zwei häufig verwendete Bildungsvorschriften und eine Mischform angeben, analog zu den drei Fragen zu Beginn dieses Kapitels. Für den 24. Dezember lesen wir in unserem Tagebuch:

1. »Heute habe ich jede Menge Weihnachtsgeschenke ausgepackt!«

Dieser Eintrag wird offensichtlich durch ein Datum (Position im Lauf der Zeit) bestimmt und die mathematische Beschreibung eines Folgegliedes in Abhängigkeit von der Position wird, wenn überhaupt möglich, mittels **Funktionsgleichung** geschehen:

$$x_n = \text{FolgegliedAnPosition}(n) \quad \text{und} \quad n \text{ aus } \mathbb{N}$$

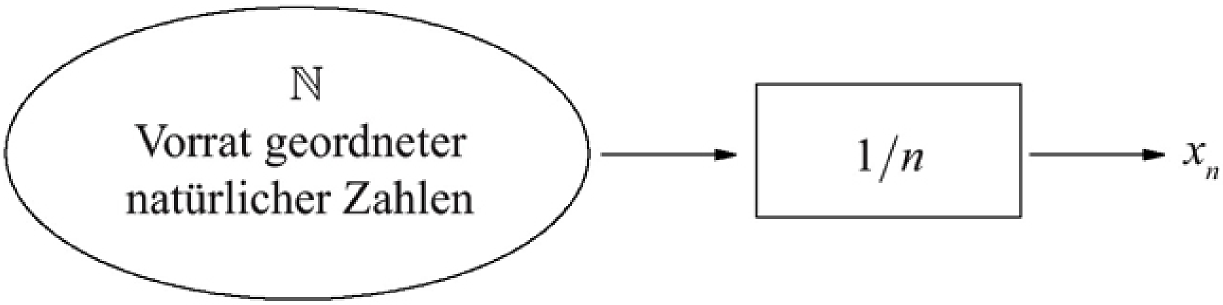
Dies werden wir zukünftig die *explizite Darstellung einer Folge* nennen.

Mit dem Funktionsterm, der bei Folgen auch Bildungsgesetz genannt wird, können wir die Folgeglieder an jeder beliebigen Stelle (zu jedem beliebigen Datum) *n* sofort bestimmen. Zum Beispiel erzeugen wir mit dem Bildungsgesetz

$$x_n = 1/n$$

eine Folge der Stammbrüche: 1/1, 1/2, 1/3 …, und an der Stelle 97 steht 1/97.

Grafisch können wir uns das wie folgt vorstellen, wenn das Rechteck das Bildungsgesetz (die Funktion) symbolisiert:



Im Bildungsgesetz steckt also die gesamte Information der Folge zu beliebigen Zeitpunkten, und damit ist unsere Einstiegsfrage 1, »War und ist unser Lebensweg zu jedem zukünftigen Zeitpunkt voraussagbar?«, zu bejahen.

Für Frage 2 werden wir ebenfalls eine Funktionsgleichung, aber mit veränderter Definitionsmenge, verwenden. Etliche Seiten später finden wir für den 3. März in unserem Tagebuch die folgende Episode:

2. »Heute, habe ich wesentlich mehr Zahnbürsten verkauft als gestern, weil ich den Anfängerfehler von gestern vermieden habe!«

Jetzt wüssten wir gerne, was denn gestern so passiert ist, und werden wohl neugierig auf die Seite davor schielen. Der Lauf des Lebens ergibt sich damit *in Abhängigkeit von den vorangegangenen Ereignissen.*

Wie lässt sich nun ein Ereignis bzw. ein Funktionswert unter Berücksichtigung des vorangegangenen Ereignisses mathematisch beschreiben? Die gestellte Frage liefert zugleich die Antwort: Die erzeugten Funktionswerte ergeben die Elemente der Definitionsmenge. Sehen wir uns das etwas genauer an:

a) Unser Tagebuch hat einen ersten Eintrag. Irgendwo oder irgendwann müssen wir wohl auch bei unserer Folge beginnen. Daher werden *wir* das erste Folgeglied und damit die Folge zum Leben erwecken. Wir bezeichnen diesen allerersten Eintrag (der Index 0 ist die Geburtsstunde und x_0 das Geburtsereignis) als **Startwert** x_0 und setzen ihn an die Stelle 0. Es kann auch mehrere Startwerte geben. Das ändert aber nichts am weiteren Geschehen.

b) Der Startwert wird als Argument in eine von uns gewählte Funktionsgleichung eingesetzt und wir erhalten das zweite Folgeglied, welches wir mit x_1 bezeichnen. Im nächsten Schritt wird unsere Funktion mit x_1 »gefüttert« und wir erhalten x_2 , nun ist x_2 das »Futter« und wir erhalten x_3… Wir erzeugen einen **Kreislauf**, der sich nach einmaliger Zündung selbstständig vorantreibt. Die Definitionsmenge zur Erzeugung der Folgeglieder ist nun nicht die Menge der natürlichen Zahlen, sondern die Menge der Funktionswerte inklusive Startwert.

Durch das schrittweise Einsetzen der Funktionswerte erhalten wir die von uns geforderte Reihenfolge! Der Index gibt sozusagen an, wie oft wir bereits Funktionswerte eingesetzt haben.

Wir schreiben das wie folgt an:

$$x_{n+1} = \mathrm{FolgegliedVomVorherigen}(x_n) \text{ mit selbst gewähltem } x_0 \text{ aus } \mathbb{R}$$

Dies werden wir zukünftig die **rekursive Darstellung** einer Folge nennen.

Mit ihrer Hilfe können wir allerdings erst nach dem Ablauf von *n* Berechnungen (Ereignissen) an jeder beliebigen Stelle *n* das nächste Folgeglied (Ereignis) bestimmen. Unsere

Tagebucheinträge ergeben sich als Folge momentaner Entscheidungen.

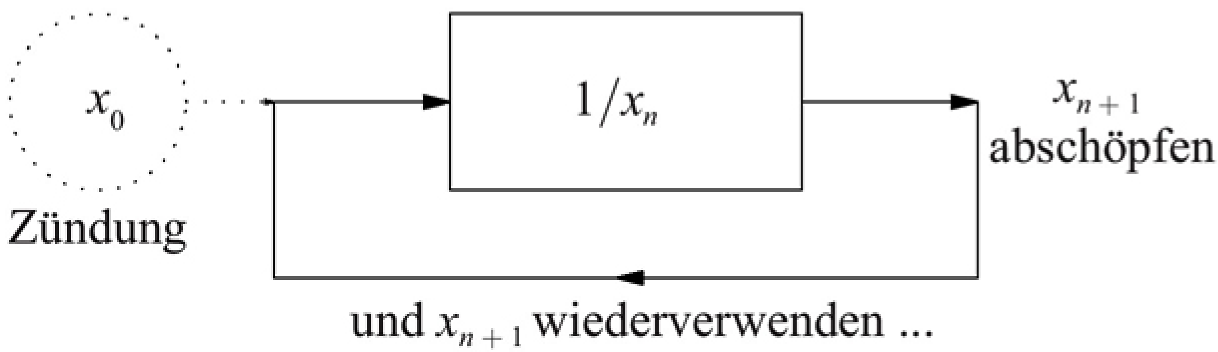
Zum Beispiel erzeugt:

$$x_{n+1} = 1/x_n \quad \text{mit} \quad x_0 = 2$$

die periodische Folge:

$$2, 0.5, 2, 0.5 \ldots$$

Grafisch können wir das eben Gesagte so darstellen:



Auch den zweiten Einstiegsgedanken, »Hat sich unser Lebensweg aufgrund unserer momentanen Entscheidungen immer wieder in eine neue Richtung entwickelt?«, bestätigen wir also, und wir schließen mit der Mischung aus 1. und 2.

Eine Mischung aus rekursiver und expliziter Darstellung haben wir im nachfolgenden Beispiel angeschrieben. Der Ausdruck beschreibt die Fakultät einer Zahl, wenn wir bei x_0 starten:

$$x_{n+1} = \text{MischungAus}(x_n, n)$$
$$x_{n+1} = x_n \cdot (n+1) \quad \text{mit} \quad x_0 = 1 \quad \text{und} \quad n \text{ aus } \mathbb{N}$$
$$1, 1, 2, 6, 24 \ldots$$

Mit dem Fakultätssymbol angeschrieben

$$0!, 1!, 2!, 3!, 4! \ldots$$

erkennen wir schön den Zusammenhang zum Index und zum 3. Gedanken in der Einleitung: »War unser Leben eine Mischung aus 1. und 2.?«

Es stellt sich die Frage, ob eine rekursive Darstellung auch explizit angeschrieben werden kann, und umgekehrt, ob der Lauf des Lebens sowohl explizit als auch rekursiv beschrieben werden kann.

Speziell für Folgen gilt der von Aristoteles formulierte Gedanke:

Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile!

Schriftschnitt

Versuchen wir das in der Einleitung Gehörte zu vertiefen, so werden wir den Funktionsbegriff als Hilfsmittel verwenden. Wir müssen lediglich die Reihenfolge einhalten und uns der natürlichen Zahlen als Definitionsmenge bei der expliziten Darstellung bedienen. Die identische Funktion soll unser Versuchskaninchen sein:

$$y = \mathrm{id}(x) \quad \text{mit} \quad y = x \quad \text{und } x \text{ aus } \mathbb{N}$$

WISSENS –

Die aufzählende Form entspricht einem herkömmlichen Tagebuch.

– WERT

Untersuchen wir diese Funktion unter dem Aspekt »Folge«:

1. Wir beschreiben die Folge in Worten mit: Der Index (die Position) und das Folgeglied haben denselben Wert, sind ein und dasselbe.
2. Wir schreiben die Folgeglieder geordnet auf und verwenden die Kurzschreibweise der Tabellendarstellung:

$$x_0 = 0, x_1 = 1 \ldots$$

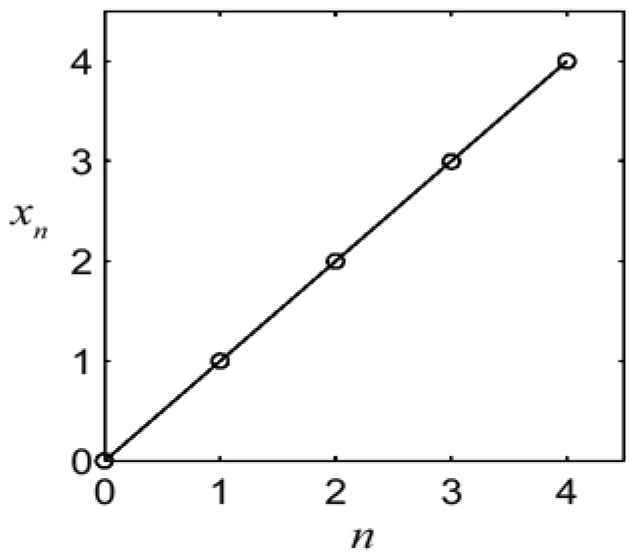
$$0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

3. Wir verwenden das Bildungsgesetz.
   Zur Darstellung der Funktionsgleichung verwenden wir eine neue Schreibweise. Ein Bildungsgesetz setzt üblicherweise den Buchstaben *n* als unabhängige Variable. Dieses *n* erinnert an die Definitionsmenge der

natürlichen Zahlen und den Index, der die Position angibt. Das Folgeglied x_n entspricht dem Funktionswert und zeigt mithilfe der Indexschreibweise die Position an.

$$x_n = n$$

4. Wir stellen die Funktion grafisch dar.
   Wir zeichnen die Folgeglieder als einzelne Punkte ein und werden diese zur optischen Unterstützung auch ab und zu verbinden.



5. Wir verwenden die Rekursion.
   Das ist ein neuer Aspekt, den wir etwas genauer beleuchten. Betrachten wir die Folgeglieder, so können wir die rekursive Darstellung direkt ablesen. Wir dürfen unseren Blick allerdings nicht auf die Position lenken, sondern schauen von einem Folgeglied zum nächsten.

$$0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

UNTERSUCHENS –

Die Folgeglieder einer explizit oder durch Rekursion beschriebenen Folge lassen sich mittels Iteration berechnen!

– *WERT*

Wie entsteht ein Folgeglied aus seinem Vorgänger? Der Nachfolger entsteht durch Addition von 1! Das müssen wir nur niederschreiben:

$$x_{n+1} = x_n + 1 \quad \text{mit} \quad x_0 = 0$$

Da es zu jeder Rekursion eine aufzählende Darstellung gibt, können wir diese jederzeit grafisch, wie oben gezeigt, darstellen. Speziell für Rekursionen kann mit einer anderen grafischen Variante die Dynamik der Folge vermittelt werden. Zu diesem Zweck zeichnen wir ein Koordinatensystem, bei dem die Achsen horizontal mit x_n und vertikal mit x_{n+1} beschriftet werden. Weiters benötigen wir zur Unterstützung zwei Funktionen, die von uns gleich beschrieben und im herkömmlichen Sinne eingezeichnet werden.

BEACHTENS –

Wir haben unseren Blickwinkel geändert! Die dargestellte Funktion ist eine Parallele zur identischen Funktion, stellt sie aber rekursiv dar!

– *WERT*

a) Wir zeichnen stets die identische Funktion ein. Sie führt uns von Folgeglied zu Folgeglied. Zufälligerweise ist sie in unserem Beispiel auch Objekt der Betrachtung.

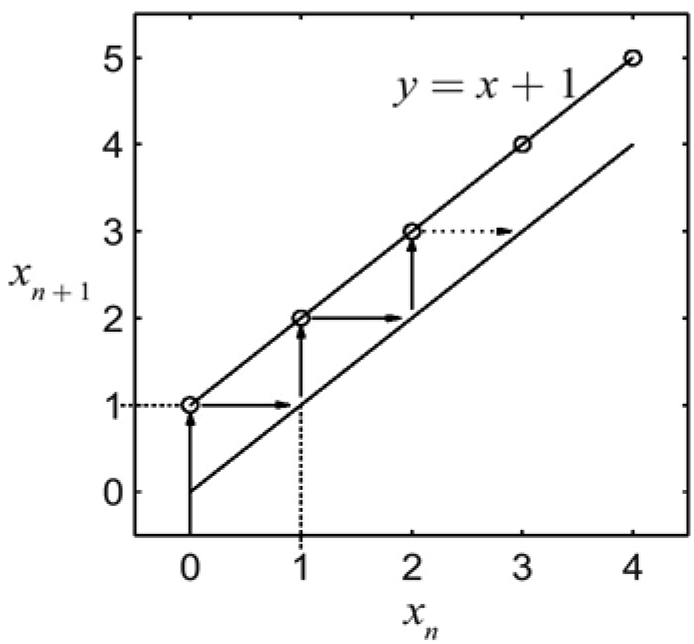
b) Wir interpretieren die rechte Seite der betrachteten Rekursion als Funktionsterm und zeichnen den Graphen der zugehörigen Funktionsgleichung ebenfalls ein. In unserem Fall liegen alle durch $x_n + 1$ erzeugten Folgeglieder *irgendwo auf* dem Funktionsgraphen von $y = x + 1$.

Nun schreiten wir wie folgt grafisch voran: Unser optischer Anhaltspunkt ist stets id(x). Wir starten bei $x_0 = 0$ auf der horizontalen Achse und schwenken den Blick nach oben, wo wir auf $y = x + 1$ das Folgeglied $x_1 = 1$ entdecken. Der Weg führt, durch horizontalen Blick, immer über id(x). Wenn wir die identische Funktion treffen, blicken wir senkrecht nach unten, wo wir unser neues Argument 1 erblicken und senkrecht nach oben, wo wir auf $y = x + 1$ das Folgeglied $x_2 = 2$ erhalten, usw. … Bei dieser Rekursion entsteht eine Treppe.

UNTERSUCHENS –

Was passiert, wenn wir bei x_0 = - 0.5 starten?

– WERT



Wir kennen nun die unterschiedlichen Darstellungsformen von Folgen und den Zusammenhang zum Funktionsbegriff. Im nächsten Abschnitt werden wir uns Beispiele für Folgen ansehen, über ihren Ursprung sprechen und dabei die Reihe entdecken.

Schriftart

$$1, 0, 0, 1, 1$$

WISSENS –

Folgen, bei denen nur endlich viele Glieder angegeben sind, können beliebig fortgesetzt werden, wenn das Geheimnis der Entstehung nicht verraten wird.

– WERT

Wie wird diese Zahlenfolge fortgesetzt? Was beschreibt diese Folge? Zwei Möglichkeiten wären:

1. Eine Folge von »Ja = 1« und »Nein = 0« auf die letzten fünf Fragen in einem Quiz.
2. Eine binäre Botschaft an Außerirdische, die soeben ausgesendet wurde.

Konstante Folge

Die Zeichenfolge hätte auch

$$0, 0, 0, 0, 0$$

lauten können. Wir nennen dies unter Menschen »stur«, für die Außerirdischen bedeutet es so viel wie »Die wissen nichts!« und in der Mathematik sprechen wir von einer konstanten Folge. Dieses Beispiel zeigt auch den Unterschied zur Mengenschreibweise auf:

$$\{0\}$$

Bei einer Folge kann ein Element durchaus mehrmals vorkommen, da es ja einen Platz zugewiesen bekommt. Jedes Folgeglied hat sozusagen ein »Mascherl«, auch wenn es nach außen hin gleich aussieht. Als Element einer Menge kommt die Null nur ein Mal vor.

Welche Zahl können wir beim nächsten Beispiel für das Fragezeichen einsetzen?

$$12, 1, 16, 37, 4, ?$$

Wenn wir bei der Lottoziehung am so und so vielten die 45 gewählt hätten, hätten wir bei dieser Lottoziehung 6 Richtige gehabt. Wir nennen das eine Folge von Zufallszahlen, und wer würde nicht gerne das Bildungsgesetz für die Lottoziehung kennen?!

Zufallszahlen

Noch eine Folge, deren Bildungsgesetz wir nicht kennen:

$$2155400, 2118500, 2066900, 2052000, 2051000, ?, ?$$

Zeitreihe

Die Folge beschreibt die Anzahl der Rinder mit Stichtag 1. Dezember. Der Index steht für diesen Stichtag während der letzten fünf Jahre. So etwas nennen wir eine Zeitreihe, weil der Index den Zeitpunkt und die Differenz der Indizes somit die Zeitdauer angibt. Für die Zeitspanne wird auch sehr oft das Symbol

$$\Delta t$$

Reihe

verwendet. Sehr begehrte Zeitreihen sind Aktienkurse. Viele Menschen glauben, dass sie die Entwicklung der Kurse aus den Grafiken dieser Zeitreihen ablesen können.

Harmonische Folge

Als Mathematiker machen wir uns bewusst, dass der Begriff Reihe im Reich der Folgen eine spezielle Bedeutung hat und mit dem Wort Reihe in Zeitreihe in keinem Zusammenhang steht. Wie sieht eine echte mathematische Reihe aus? – Wir zeigen das anhand der harmonischen Folge, deren explizite Beschreibung wir in der Einleitung kennengelernt haben:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ \dots$$

Folge der Teilsummen
=
Reihe

Unter einer Reihe verstehen wir die Folge der Teilsummen der zugehörigen Folge. Wir schreiben die ersten drei Teilsummen für obige Folge an:

$$s_1 = 1, \ s_2 = 1 + \frac{1}{2}, \ s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ \dots$$

Harmonische Reihe

Die zugehörige Folge der Teilsummen nennen wir harmonische Reihe, obwohl es wiederum eine Folge von Zahlen ist, und diese hat folgendes Aussehen:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6} \ \dots$$

Wir halten uns mit diesen beiden Folgen (harmonische Folge und harmonische Reihe) zwei weitere Aspekte vor Augen.
1. Das Bildungsgesetz für die harmonische Folge lautet wohl

$$x_n = 1/n.$$

Blicken wir in die zukünftige Entwicklung von x_n, so können wir annehmen, dass für sehr großes n die Zahl 0 wohl immer besser angenähert wird. Es ist eine Frage der gewünschten Genauigkeit. Der Taschenrechner liefert das sehr rasch, wenn wir ihn mit den Indizes füttern. Wir werden uns mit dieser Beobachtung noch intensiver auseinandersetzen und Folgen, die unaufhörlich gegen null wandern, Nullfolgen nennen!

Nullfolge

2. Was bedeutet die erste Beobachtung für die harmonische Reihe? – Stellen wir uns ein großes Gefäß vor, in welches wir einen Liter Wasser füllen, im nächsten Schritt 0.5 Liter usw. Wird dieses Gefäß jemals voll werden, wenn wir die Flüssigkeitsmengen nach den Gesetzmäßigkeiten der harmonischen Folge stetig hinzugeben? Wir können zeigen, dass dieses Gefäß immer überlaufen wird, egal wie groß wir dieses zu Beginn gewählt haben!
Wir könnten aber eine neue Folge und ihre zugehörige Reihe konstruieren, indem wir einen Liter hinzugeben, einen halben Liter wegnehmen usw. Für diese Reihe können wir ein Gefäß finden, das nicht übergeht. Wie groß dieses Gefäß ist? Genau mit diesen Fragen werden wir uns in »Bitte der Reihe nach!« [S. →] beschäftigen.

$$1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \ \dots$$

Obiges Vorstellungsvermögen ist manchmal sehr hilfreich bei der Untersuchung von Folgen, soll uns aber nicht in die Irre führen.

Abschließen wollen wir mit einer Abfolge von Glockenschlägen:

$$\times, \cdot, \times, \cdot, \times, \times, \cdot, \times, \cdot, \times, \cdot, \times$$

»The 6/8 bell«

Die Kreuze stellen den Glockenschlag und die Punkte eine Pause dar. Eine zyklische Wiederholung dieses Musters erzeugt eine unendliche, periodische Folge.

Schritt für Schritt

In diesem Abschnitt werden wir eine Folge zur Berechnung von Quadratwurzeln möglichst anschaulich konstruieren und ihre Eigenschaften analysieren. Dabei werden wir einige für die Mathematik wesentliche Gedanken kennenlernen. Bei Quadratwurzeln handelt es sich zumeist um irrationale Zahlen, sodass wir sie nur näherungsweise bestimmen können. Um konkret zu bleiben: Wir überlegen uns eine rekursive Berechnungsvorschrift für folgenden Ausdruck:

$$\sqrt{3}$$

Nachdenkens –

Welche geometrische Vorstellung verwendest du, damit die dritte Wurzel aus einer Zahl mittels Folge berechnet werden kann?

– Wert

Dabei wird uns nun der folgende Grundgedanke leiten: $\sqrt{3}$ können wir uns als die Seitenlänge eines Quadrates mit dem Flächeninhalt 3 vorstellen. Diesem Quadrat wollen wir uns Schritt für Schritt durch flächengleiche Rechtecke annähern. Die eine Seite des n-ten Rechtecks bezeichnen wir mit x_n. Damit wir dem Flächeninhalt 3 gerecht werden, muss die andere Seite die Länge $3 / x_n$ besitzen. Eine Seitenlänge ist größer und eine kleiner als die gesuchte Wurzel. Unserem gewünschten Resultat »Wurzel aus Drei« nähern wir uns, wenn wir für das nächste Rechteck, eine Seitenlänge x_{n+1} wählen, die zwischen den Werten x_n und $3 / x_n$ liegt. Dies erreichen wir am einfachsten durch die Bestimmung des arithmetischen Mittelwerts.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$$

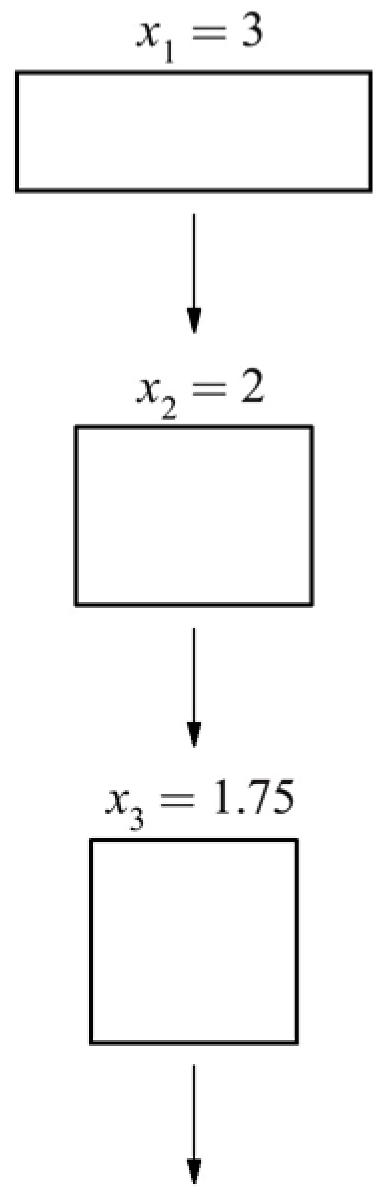
Mit dem beliebig gewählten Startwert $x_1 = 3$ erhalten wir so die rekursive Definition einer Folge, welche uns die näherungsweise Berechnung von

$$\sqrt{3} = 1.73205080756\ldots$$

ermöglicht. Um das zu verdeutlichen, schreiben wir die ersten Folgeglieder, so wie sie der Taschenrechner liefert, an.

n	x_n
1	3.000000000
2	2.000000000
3	1.750000000
4	1.732142857

n	x_n
5	1.732050810
6	1.732050808
7	1.732050808
8	…



Anhand dieser Tabelle können wir sagen, dass sich die Folge dem gesuchten Wert annähert, sodass wir die »Wurzel aus Drei« als Grenzwert der Folge bezeichnen werden. Was heißt das aber für die praktische Berechnung? Dazu müssen wir den Begriff »Annäherung an einen Grenzwert« präzisieren. Wir geben uns eine gewisse Genauigkeit vor, sagen wir zwei signifikante Stellen, und können behaupten, dass für alle Indizes $n \geq 3$ diese Genauigkeit erreicht ist. Benötigen wir eine genauere Angabe, beispielsweise sechs signifikante Stellen, dann finden wir diese Genauigkeit für alle $n \geq 5$

gegeben. Jetzt wird klar, was wir unter einer »Annäherung an einen Grenzwert« verstehen wollen: Für jede beliebige Genauigkeit lässt sich ein Index angeben, ab dem sich die Folgeglieder innerhalb dieser vorgegebenen Genauigkeit nicht mehr ändern.

Nun haben wir es in der Mathematik nicht nur mit Dezimalzahlen zu tun, sodass wir für eine allgemeine Definition nicht den Begriff der »signifikanten Stellen« verwenden sollten. Vielmehr wollen wir die Genauigkeit durch ein offenes Intervall, also durch Fehlergrenzen, angeben. Die offizielle Definition, die wir daraus ableiten können, lautet:

Eine Folge x_n konvergiert gegen einen Grenzwert x, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert, sodass für alle $n > N$ die Ungleichung

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

gilt. Eine häufig verwendete Schreibweise mit gleicher Bedeutung ist die folgende:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Konvergente Folge

Die Abkürzung »lim« steht für das lateinische Wort »limes«. Anhand dieser Definition erkennen wir auch, dass die Existenz eines Grenzwertes gleichbedeutend mit der Eindeutigkeit dieses Wertes ist. Wir sprechen dann kurz von einer konvergenten Folge. Alle anderen Folgen werden divergent genannt.

Divergente Folge

Bleiben wir noch bei der Folge, welche uns die Berechnung von Quadratwurzeln gestattet. Zwar ist die berechnete Tabelle ein Indiz für die Konvergenz der Folge, aber leider noch kein Beweis. Die analytische Diskussion der Frage, ob die Folge wirklich einem Grenzwert zustrebt, beruht auf einer wichtigen Beziehung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittelwert zweier Zahlen, die wir vorbereitend untersuchen wollen.

Geometrisches Mittel

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \quad \text{für} \quad a,b \geq 0$$

Beachtens –

Wir verknüpfen bei dieser Interpretation Geometrie und Rechnung. Das kann auch in die Irre führen.

– *WERT*

Bevor wir diese Ungleichung beweisen, geben wir noch eine kurze geometrische Interpretation zur linken und rechten Seite dieser Ungleichung. Der Radikand in der linken Seite kann als Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen *a* und *b* betrachtet werden. Die Wurzel aus diesem Produkt beschreibt die Seitenlänge eines flächengleichen Quadrates. Die rechte Seite wiederum kann als mittlere Streckenlänge der beiden Rechtecksseiten angesehen werden. Wir vergleichen also durch Wurzelziehen und Addieren zwei Streckenlängen. Die Ungleichung behauptet, dass der Mittelwert der Streckenlängen stets größer ist, wenn die Strecken nicht gleich lang sind.

Hier nun der strenge arithmetische Beweis dieser Behauptung. Wir quadrieren beide Seiten und multiplizieren sie anschließend mit 4. Es ergibt sich:

$$4 \cdot a \cdot b \leq (a+b)^2$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite und anschließende Subtraktion von 4·*a*·*b* führt wiederum auf eine quadratische Form und somit auf die wahre Aussage, dass eine Quadratzahl stets größer gleich null ist:

$$0 \leq (a-b)^2$$

NACHDENKENS –

Wir wollen betonen, dass divergente Folgen nicht die »schlechten« sind, vielmehr sind sie die »freien« oder »ungezwungenen« Folgen, da sie keinem Grenzwert zustreben.

– WERT

Wenden wir die arithmetisch-geometrische Ungleichung auf die rekursive Definition unserer Folge an, dann finden wir:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{3}{x_n}} = \sqrt{3}$$

Alle Folgeglieder unserer Rekursion sind also größer gleich $\sqrt{3}$ .Das bedeutet, dass die Folge nach unten beschränkt ist. Die Folge ist aber auch monoton fallend, denn aus

$$x_n \geq \sqrt{3} \quad \text{folgt} \quad x_n^2 = x_n \cdot x_n \geq 3 \quad \text{und daher} \quad x_n \geq \frac{3}{x_n}$$

WISSENS –

---

monoton + beschränkt = konvergent

– WERT