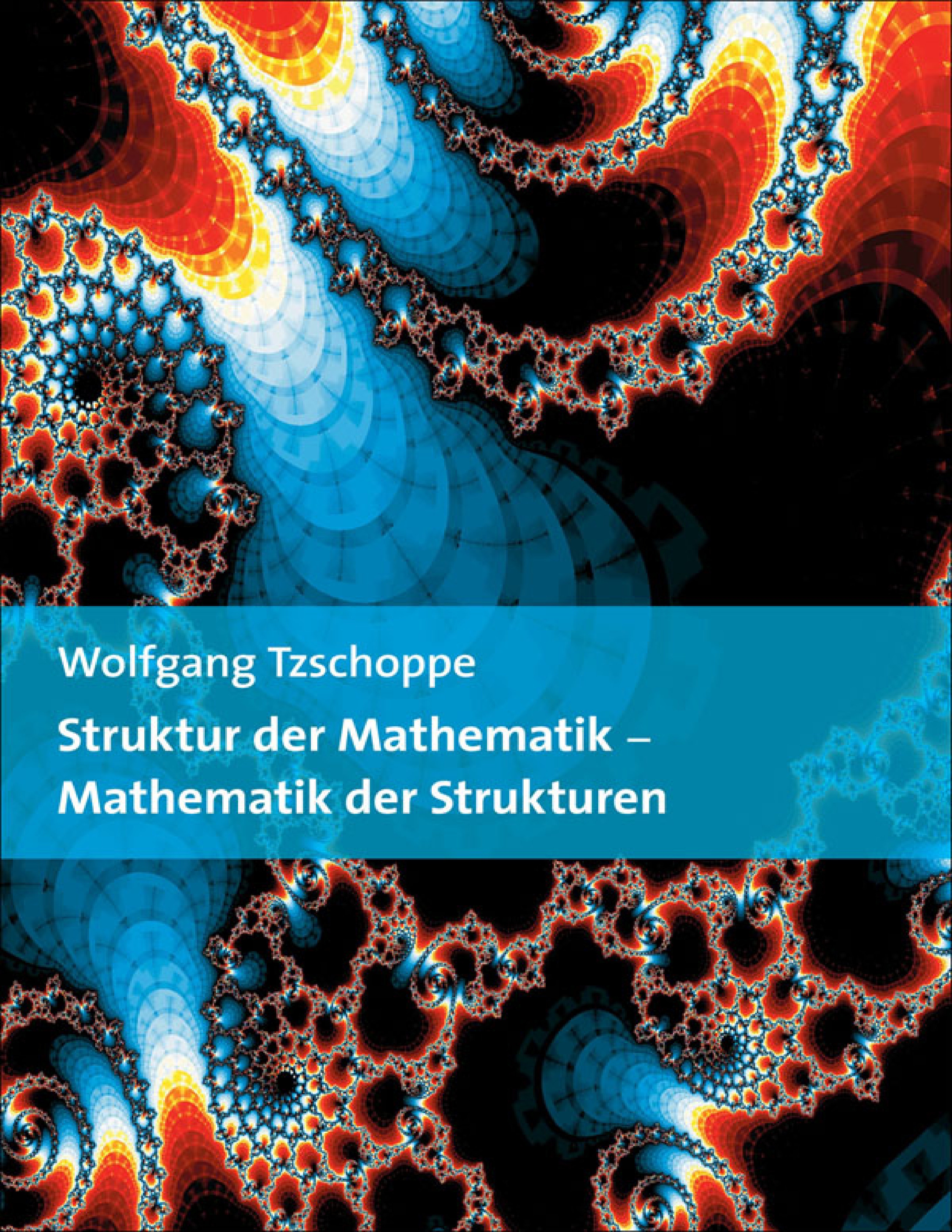
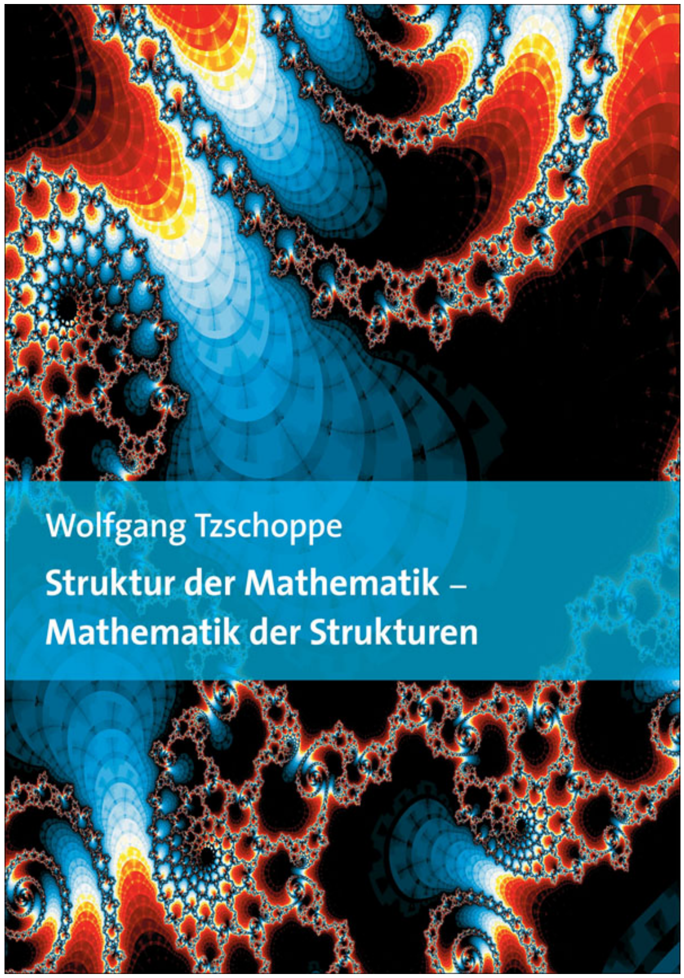


Wolfgang Tzschoppe

Struktur der Mathematik – Mathematik der Strukturen


Wolfgang Tzschoppe
Struktur der Mathematik –
Mathematik der Strukturen

Wolfgang Tzschoppe

Struktur der Mathematik – Mathematik der Strukturen

WOLFGANG TZSCHOPPE wurde 1942 in der Oberpfalz geboren. Nach dem Abitur und der Bundeswehrzeit studierte er die Fächer Sport und Mathematik für das höhere Lehramt. Vom Gymnasium kommend, beteiligte er sich am Aufbau und an der Durchführung des Gesamtschulversuchs in Hollfeld in der Fränkischen Schweiz (Bundesland Bayern). Die Schule hat sich inzwischen als Schule besonderer Art in der Region etabliert und genießt dort die volle Anerkennung.

Der Autor ist verheiratet, hat zwei Söhne und zwei Enkelkinder. Dem ersten Enkelkind Jasmin hat er sein erstes Buch »Jasmins Strukturen« (2011) gewidmet.

Inhalt

Struktur der Mathematik – Mathematik der Strukturen

Vorwort

Der Buchtitel ist punktsymmetrisch, wenn man die einzelnen Wörter als »Punkte« auffasst:

S d M – M d S

Diese Feststellung sagt noch nichts über den Inhalt meines Buches aus, nötigt aber, über die Bedeutung der Wortumstellungen nachzudenken. »Typisch Mathematiker!«, werden viele Leser sagen, die als Schüler oder später als Studenten mit Mathematikern unangenehme Erfahrungen gemacht haben. Für manche ist oder war Mathematik oft ein »Horrorfach«, das aus Auswendiglernen von Formeln und Nachvollziehen von fertigen Denkergebnissen besteht oder bestanden hat. Bestenfalls bekamen viele, die so empfunden haben, noch gewisse mathematische Vorstellungen durch interessante Anwendungsaufgaben vermittelt.

Nun, mit »Struktur der Mathematik« meine ich, ganz weit gefasst, die allerersten Anfänge der »Mathematik«, ihre Gegenstände und ihre Arbeitsweisen. Wie hat sich die Mathematik im Laufe der Jahrhunderte (Jahrtausende) entwickelt und wie »funktioniert« sie?

Dazu gehört sowohl die Evolution der Erkenntnisorgane des Menschen als auch die historische Entwicklung des mathematischen Wissens. Es lassen sich nämlich, geschichtlich gesehen, charakteristische Merkmale in den Denkweisen der Mathematik erkennen. Diese Merkmale versuche ich anhand von konkreten Beispielen zu verdeutlichen.

Dem Leser empfehle ich, mit Bleistift und Papier den dargestellten Problemen auf den Leib zu rücken. Tipps, wie man das am besten bewerkstelligt, gibt der Mathematiker GEORGE POLYA[1].

Die »Mathematik der Strukturen« dagegen befasst sich mit den abstrakten Ergebnissen der Mathematik und deren Darstellung in Theorien. Durch Vergleichen der Ergebnisse auf den unterschiedlichsten mathematischen Gebieten lassen sich Gemeinsamkeiten erkennen und durch Verallgemeinerung (Abstraktion) mithilfe von geeigneten »Begriffen« lassen sich diese Ergebnisse dann strukturieren. Im letzten Teil des Buches wird die Verwendung dieser Strukturen aufgezeigt.

Mein Buch habe ich für an der Mathematik interessierte Leser geschrieben, die sich einen Überblick über die Entstehung und die Strukturen dieser Wissenschaft verschaffen wollen. Nutznießer können aber auch Gymnasiasten der höheren Klassen sowie Studienanfänger der Mathematik sein. Es gibt leicht verständliche, aber auch weniger zugängliche Kapitel des Buches.

Ich empfehle deshalb folgenden Leseplan:

Überblick:	Vorwort – Schlusswort – Inhaltsverzeichnis
Erster Lesegang:	Kapitel 1, 2 (2.1–2.3, 2.9, 2.10), 5 (5.1–5.4), 6.1
Zweiter Lesegang:	Kapitel 2 (2.4–2.8), 4, 7
Dritter Lesegang:	Kapitel 3, 5 (5.5–5.8), 8
Rest:	Kapitel 9, 6.2

Gewidmet habe ich dieses Buch meinen Söhnen Roman und Carsten. Beide haben ganz unterschiedliche Erfahrungen mit der Mathematik gemacht. Der Ältere der beiden benutzt als Diplomingenieur der Elektrotechnik die angewandte Mathematik, der Jüngere musste sich als Studienanfänger der Wirtschaftsmathematik mit den unbeliebten Existenzbeweisen und den abstrakten Theorien auseinandersetzen. Beiden wünsche ich beim Lesen ein besonderes Vergnügen.

[1] George Polya: Schule des Denkens – Vom Lösen mathematischer Probleme, Göttingen, Francke Verlag, 2010

Teil I
Struktur der Mathematik – Funktionsweise

1 Evolution der Erkenntnisfähigkeit (vor 3 Millionen Jahren)

»Mathematik findet im Kopf statt«, dieser Behauptung wird wohl niemand widersprechen. Aber welchen Part spielte und spielt die Hand bei mathematischen Denkprozessen? Lassen Sie uns gemeinsam die Suche in der Sprache beginnen:

Handeln – handhaben – handikapen – handverlesen – handlungsfähig – stellen – vorstellen – Vorstellung – greifen – vergreifen – begreifen – Begriff. Ich denke, wir sind fündig geworden. Der Neurologe Frank R. Wilson schreibt allen Kognitionswissenschaftlern ins Stammbuch: »Jede Theorie der menschlichen Intelligenz, die die Wechselbeziehung von Hand und Hirnfunktion, die historischen Ursprünge dieser Beziehung oder ihren Einfluss auf die Entwicklungsdynamik des modernen Menschen außer Acht lässt, ist meiner Meinung nach höchst irreführend und unfruchtbar.«[2]

1.1 Entwicklung der Hand

Der erste zweifüßige Vorfahre des Menschen, »Lucy« (vor 3,2 Mio. Jahren in Ostafrika), besaß eine affenunähnliche Hand und hatte ein schimpansengroßes Gehirn[3]. Die offenkundigen funktionellen Vorteile waren:

- »Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger können einen Dreipunkte-Feingriff bilden, mit anderen Worten, die Hand kann unregelmäßig geformte Körper (zum Beispiel Steine) ergreifen und festhalten.
- Gegenstände, die man zwischen Daumen und den Spitzen von Zeige- und Mittelfinger hält, können exakt bewegt werden.
- Man kann Steine in der Hand halten und mit ihnen wiederholt auf harte Gegenstände (beispielsweise Nüsse) einschlagen oder Wurzeln

> ausgraben, weil das Handgelenk besser als die Menschenhand in der Lage ist, den Rückprall harter Schläge zu absorbieren.«[4]

Der zunehmende Gebrauch der Hände unserer Vorfahren bei der Nahrungsbeschaffung, der Herstellung von Werkzeugen und deren Handhabung verlieh ihnen auf dieser Stufe der Evolution den Namen **Homo habilis**. In der motorischen und kognitiven Entwicklung eines Säuglings (Ontogenese) läuft diese stammesgeschichtliche Entwicklung (Phylogenese) gleichsam wieder im Zeitraffermodus ab.

Man kann beim Säugling gut beobachten, wie zuerst der Mund und dann die **Hand** die Erkundung der Umwelt übernimmt. Ja, die Hand bahnt sogar deutlich durch Zeigen und Gesten die sprachliche Kommunikation an.

1.2 Entwicklung des Gehirns

Zurück zu »Lucy« nach Hadamar in Ostafrika. Sie besaß, wie bereits gesagt, eine affenunähnliche Hand und ein schimpansengroßes Gehirn. Wie Schädelfunde beweisen, wuchs das Gehirnvolumen seitdem von 400 bis 500 auf 1350 Kubikzentimeter: Australopithecinen 400–500, Homo habilis 600–700, Homo erectus 900–1100, Homo sapiens 1350 Kubikzentimeter.

»Die Verbesserung und vielleicht auch die Spezialisierung der Manipulations-, Jagd- und Angriffsfertigkeiten sowie die Verzweigung der sozialen Interaktionen, die durch die differenziertere Kommunikation (und Migration) des Homo erectus ermöglicht wurden, förderten die Funktionsweise und Struktur des Gehirns weiter.«[5]

Werkzeuggebrauch – Sprache – Denken

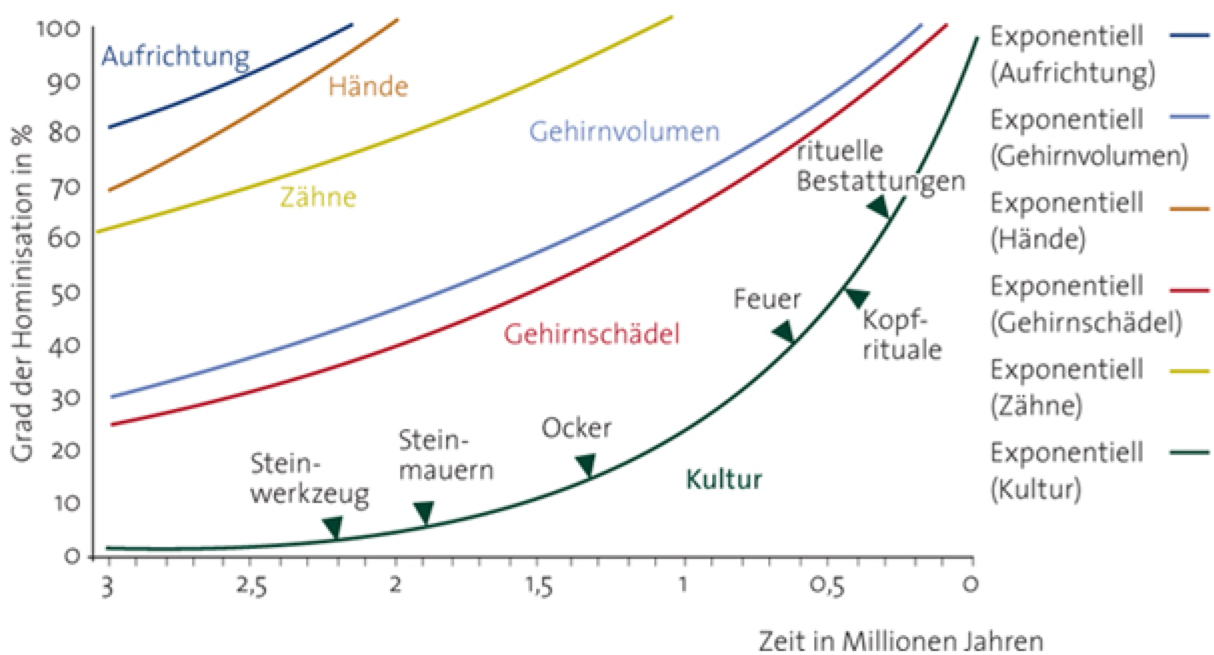
Welcher Zusammenhang könnte zwischen Werkzeuggebrauch, Sprache und Denken bestehen? Um eine Antwort zu finden, empfiehlt es sich, die Menschwerdung unserer Art zu betrachten.

Der Satz »der Mensch stammt vom Affen ab« ist so nicht wahr. Aber Mensch und Affe haben eine gemeinsame Entwicklungsgeschichte, die sich an einem nicht exakt festlegbaren Punkt verzweigt hat. Die Tier-Mensch-Übergangsphase beginnt mit der Werkzeugbenutzung (**tool-user**) und endet mit der Herstellung zweckmäßiger Geräte (**tool-maker**). Schier unglaublich: Die Entwicklung vom Geröllstein mit abgeschlagener scharfer

Kante zum beidseitig bearbeiteten Faustkeil hat ca. 1 Million Jahre gedauert! Entwicklungsfaktoren wie aufrechter Gang, Gebrauch der Hände, Entwicklung des Gebisses, des Gehirnvolumens und Form des Gehirnschädels haben die Hominisation (Menschwerdung) bedingt. Fest steht auch, dass sich das Entwicklungstempo seit 40.000 Jahren exponentiell beschleunigt hat (siehe Tabelle unten)[6]. Der Homo sapiens verdankt seine einmalige Stellung zwei raffinierten Problemlösungsstrategien:

- Erstens hat er die »**Technik** zum Herzstück seiner Überlebensstrategie gemacht«
- und zweitens hat er die **Sprache** entwickelt[7].

Bedingende Faktoren der Menschwerdung[8]



FRANK R. WILSON[9] zitiert DONALD[10], dass **homo erectus** (ca. 1 Mio. – 250 Tsd. Jahre) am Ende seiner Periode außerordentliche Fortschritte gemacht habe:

»Erectus entwickelte eine Vielzahl raffiniert hergestellter **Werkzeuge** und breitete sich über die gesamte eurasische Landmasse aus. Dabei passte er sich höchst unterschiedlichen Klimabedingungen an und lebte in einer **Gesellschaft**, in der Kooperation und soziale Handlungskoordination von zentraler Bedeutung für die Überlebensstrategie der Art waren.«

Laut DONALD soll die eigentliche Errungenschaft die **mimetische Fähigkeit** (Gesichtsausdruck) als Grundlage für die Kultur des erectus gewesen sein. Dazu dürfte die Verwendung einer **Gestensprache** gekommen sein.

Der von Schülern, oft zu recht, ausgestoßene Seufzer »das kann ich nicht begreifen!« scheint WILSON recht zu geben. Er meint nämlich, dass der verbesserte Gebrauch der »**neuen Hand**« dem **homo sapiens** den Anstoß zur Umgestaltung und Neuordnung der Schaltkreise im Gehirn gegeben habe. Das »**Manipulieren**« (Handhaben) von Objekten (in der Sprache von Satzgegenständen) verlangte nach der logischen Abfolge von vorher und nachher bzw. Ursache und Wirkung (Wenn-dann-Implikation).

Die pädagogischen Erfahrungen beim Gestalten von Lernprozessen sprechen ebenfalls für diese These. Die bewährte Reihenfolge für das Erarbeiten und Darstellen von Inhalten ist:

enaktiv (handelnd) → ikonisch (bildhaft) → symbolisch (abstrakt)

Nach WILSON hat die Psychologieprofessorin PATRICIA GREENFIELD[11] anhand von Tests festgestellt, dass Kinder in der Lage sind Regeln zu erzeugen, die Nomina behandeln, als wären sie Spielklötzchen, und Verben, als wären sie Hebel oder Flaschenzüge.

Entwicklung von Sprache

Wie hat sich die Sprache als Medium des Denkens und als Mittel der Kommunikation stammesgeschichtlich entwickelt?

Der Nobelpreisträger JOHN C. ECCLES[12] übernimmt das Sprachebenenmodell von KARL BÜHLER (Sprachtheoretiker) und KARL RAIMUND POPPER (Wissenschaftstheoretiker). Demnach gibt es zwei niedere Formen der Sprache, die tierischen und menschlichen Sprachen gemeinsam sind, und zwei höhere Formen, die möglicherweise ausschließlich menschlich sind.

Erste	»Das Tier drückt seine inneren **emotionalen**

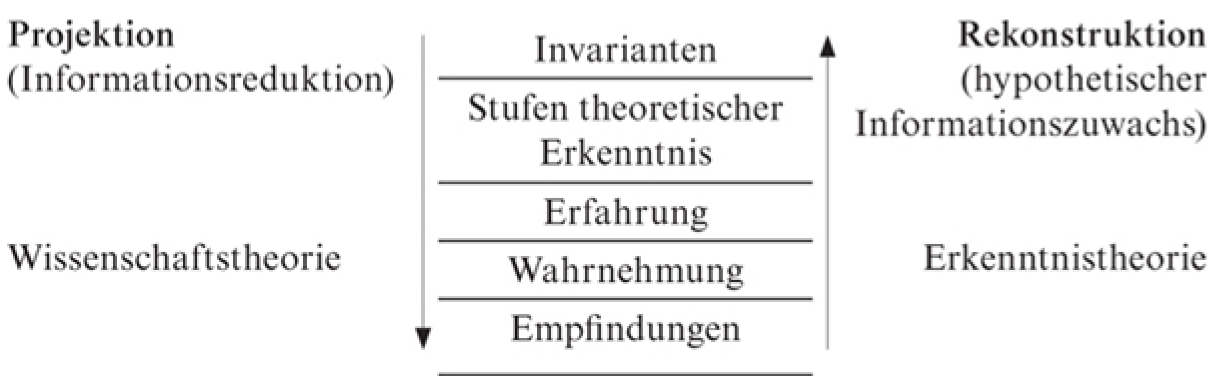
Sprachebene: hat expressive oder symptomatische Funktion	**Zustände** aus, so wie es auch Menschen tun, indem sie rufen, schreien, lachen usw.«
Zweite Sprachebene: hat Signal- oder auslösende Funktion	»Der Sender versucht durch eine Mitteilung […] beim Empfänger eine Reaktion hervorzurufen. So **signalisiert** der Alarmruf eines Vogels der übrigen Schar eine Gefahr.«
Dritte Sprachebene: hat deskriptive Funktion	»Sie macht den größeren Teil der menschlichen Kommunikation aus. Wir **beschreiben** anderen unsere Erfahrungen […]. Die deskriptive Funktion der Sprache zeichnet sich dadurch aus, dass die Aussagen faktisch wahr oder falsch sein können. Das schließt die Möglichkeit des Lügens ein.«
Vierte Sprachebene: hat argumentative Funktion	»Hier erreicht die Sprache ihre höchste Ebene. Diese komplizierte Funktion hat sich mit Sicherheit phylogenetisch als letzte entwickelt, was sich auch ontogenetisch widerspiegelt. Die Kunst der kritischen **Argumentation** ist eng an die menschliche Fähigkeit zu rationalem Denken gebunden.«

»Die vier Ebenen der Sprache lassen sich in der Entwicklung vom Kleinkind zum Kind deutlich verfolgen, denn das Kind schreitet von der anfangs rein expressiven Ebene zur signalisierenden Ebene, dann zur deskriptiven Ebene und schließlich zur argumentativen Ebene fort. Dabei ist aber jede Sprachebene von den niedrigeren Ebenen durchdrungen.«[13] Wenn die Ontogenese die zeitliche Verkürzung der Phylogenese ist, dann verrät sie uns Grundzüge des Spracherwerbs der menschlichen Art.

Nach John C. Eccles wurde der große Erfolg der Hominidenevolution »sichergestellt durch die **asymmetrische Ökonomie**, die die Rindenkapazität möglicherweise fast verdoppelte […] Durch die Strategie der Asymmetrie konnte somit der Neo-Neokortex stark zunehmen, ohne dass Geburtsrisiken dadurch über Gebühr wuchsen«[14].

1.3 Der Stufenbau menschlicher Erkenntnis[15]

»Die projektive Erkenntnistheorie deutet **Sinneseindrücke als Projektionen** realer Strukturen auf unsere Peripherie, auf unsere Ober-›Fläche‹, auf die »Ebene« unserer Sinnesorgane. Unser Bemühen um Erkenntnis ist dann umgekehrt der Versuch, diese realen Strukturen in unserem Gehirn zurückzugewinnen, also **isomorphe Modelle** davon zu bilden. Dieser Versuch erfolgt in der **Wahrnehmung** unbewusst und unkritisch, in der **Erfahrung** bewusst und unkritisch, in der **Wissenschaft** bewusst und kritisch. Wir gelangen so zu einem Mehrschichtenmodell unserer Erkenntnis.



Die unterste Stufe bilden die Empfindungen […]. Sie stellen noch keine Erkenntnis dar […].

Wahrnehmung dagegen beruht bereits auf einer Verarbeitung und Synthese […]. Die (vorwissenschaftliche) Erfahrung bezieht weitere Elemente in den Erkenntnisprozess ein: Sie macht – meist unkritisch – Gebrauch von sprachlichen Mitteln, Verallgemeinerungen, Analogien, elementaren Schlüssen und Gedächtnis […]. Die **wissenschaftliche Erkenntnis** geht auch noch über diese Alltagserkenntnis weit hinaus. Sie arbeitet mit Abstraktionen, theoretischen Begriffen und logischen Schlüssen […].

Die theoretische Erkenntnis weist selbst eine innere Stufung auf. Je nachdem, wie weit wir uns von der Ebene der Empfindungen entfernen, erhalten wir **verschiedene Theoriegrade**.«[16]

»Die menschliche Erkenntnisfähigkeit ist ein Ergebnis der Evolution. Das bedeutet natürlich nicht, dass alles menschliche Wissen genetisch determiniert wäre. Die Evolutionäre Erkenntnistheorie beschreibt oder erklärt auch gar nicht die Evolution menschlichen Wissens; das ist eine Aufgabe der Kulturgeschichte und der Wissenschaftstheorie.«[17]

---

[2] Frank R. Wilson: Die Hand – Geniestreich der Evolution, Reinbek bei Hamburg, Rowohlt, 2002, S. 14

[3] Ebd., S. 23

[4] Ebd., S. 35

[5] Ebd., S. 42

[6] Horst M. Müller: Evolution, Kognition und Sprache, Verlag Paul Parey 1987, S. 128

[7] Wilson, S. 46

[8] Müller, S. 129

[9] Wilson, S. 59

[10] Merlin Donald: Origins of Modern Mind – Three Stages in the Evolution of Culture and Cognition, Harvard University Press, Mass. 1991, S. 163 f.

[11] Artikel mit dem Titel: »Language, Tools and Brain: The Ontogeny and Phylogeny of Hierarchically Organized Sequential Behavior«, Behavioral and Brain Sciences 14 (1991), S. 531–595

[12] John C. Eccles: Die Evolution des Gehirns – die Erschaffung des Selbst, Serie Piper 1993, S. 125

[13] Ebd., S. 127

[14] Ebd., S. 345

[15] Gerhard Vollmer: Was können wir wissen? Band 1: Die Natur der Erkenntnis, Stuttgart (S. Hirzel Verlag) 1988, S. 33

[16] Ebd., S. 34

[17] Ebd., S. 41

2 Evolution der Mathematik (seit 20.000 Jahren)

2.1 Von den Kerben zu den Zahlen

Kerben
»Ein Wolfsknochen mit 55 **Kerben**, aufgeteilt in zwei Reihen von Fünfergruppen, der 1937 in Vestonice in der Tschechoslowakei gefunden wurde und mindestens 20.000 Jahre alt ist, gilt als eine der ältesten ›Rechenmaschinen‹ aller Zeiten.« So berichtet GEORGES IFRAH[18] in seinem ausführlichen Buch über die Entstehung der Zahlen in den verschiedensten Kulturen. Die ersten Anfänge liegen in einem gewissen Zahlenverständnis, das übrigens auch bei Tieren vorhanden ist. Einige primitive Völker sind auch heutzutage noch nicht über das Zahlenverständnis von »eins, zwei und viele« hinausgekommen.

»Der **Ishango-Knochen** ist ein steinzeitliches Artefakt, das vom belgischen Archäologen JEAN HEINZELIN DE BRAUCOURT 1950 im damaligen Belgisch-Kongo, der heutigen Demokratischen Republik Kongo, entdeckt wurde. Es handelt sich um einen etwa 10cm langen Knochen, auf dem in drei Spalten mehrere **Gruppen von Kerben** angeordnet sind. Der Sinn oder Zweck der Einkerbungen ist unklar, Spekulationen zufolge wurde der Knochen als eine Art Rechenstab benutzt, eine Funktion als Kalender wird ebenfalls vorgeschlagen. Das Alter des Artefakts wird heute mit rund 20.000 Jahren bestimmt. Es wird im belgischen Museum für Naturwissenschaften in Brüssel aufbewahrt.«[19]

Abb. 1: Ishango-Knochen

Abb. 2: Anordnung der Kerben

»Die Paare (3, 6), (4, 8) und (10, 5) der mittleren Spalte werden aus einer Zahl und ihrem Doppelten gebildet. Die letzten beiden Zahlen 5 und 7 passen allerdings nicht in dieses Schema. Die Gruppen in der rechten Spalte bilden genau die Zahlen 10 ± 1 und 20 ± 1. Die linke Spalte enthält genau die Primzahlen zwischen 10 und 20.«[20]

Zählen

Die erste Stufe hin zum Zählen war der Vergleich von **»gleichmächtigen«** Mengen. Jedem Objekt (Tier, Gegenstand, …) einer Menge wurde eine Kerbe auf einem Knochen oder einem Stück Holz **zugeordnet**.

Kinder lernen das »Zählen« spielhaft als **Wortfolge** z. B. beim Ziehen einer Mensch-Ärger-dich-nicht-Figur auf dem Spielbrett: »eins«, »zwei«, »drei«, … Das **Startwort** ist die »eins«, der einzige **Nachfolger** von »eins« ist »zwei«, irgendwann hört das Zählen auf, weil das nachfolgende Zahlwort nicht mehr bekannt ist. Der Zählvorgang verlangt ein **Hantieren** mit verschiebbaren Perlen, Spielsteinen, »hinzählbaren« Münzen beim Kaufen usw. So wird es sich auch vermutlich bei der stammesgeschichtlichen Entwicklung (Phylogenese) des Menschen ereignet haben.

Zahlzeichen

Der ständige Umgang mit unterschiedlich großen Mengen des Alltags machte Zahlzeichen erforderlich. So entwickelte sich im Laufe der Zeit aus dem Vorgang des Zuordnens das Zählen und aus dem Zählen entstanden die **abstrakten Zahlzeichen**. »Die älteste bekannte Zahlendarstellung stammt aus der Zeit der Sumerer um 3300 v. Chr. […]«[21]

Babylonische Zahlen in Keilschrift

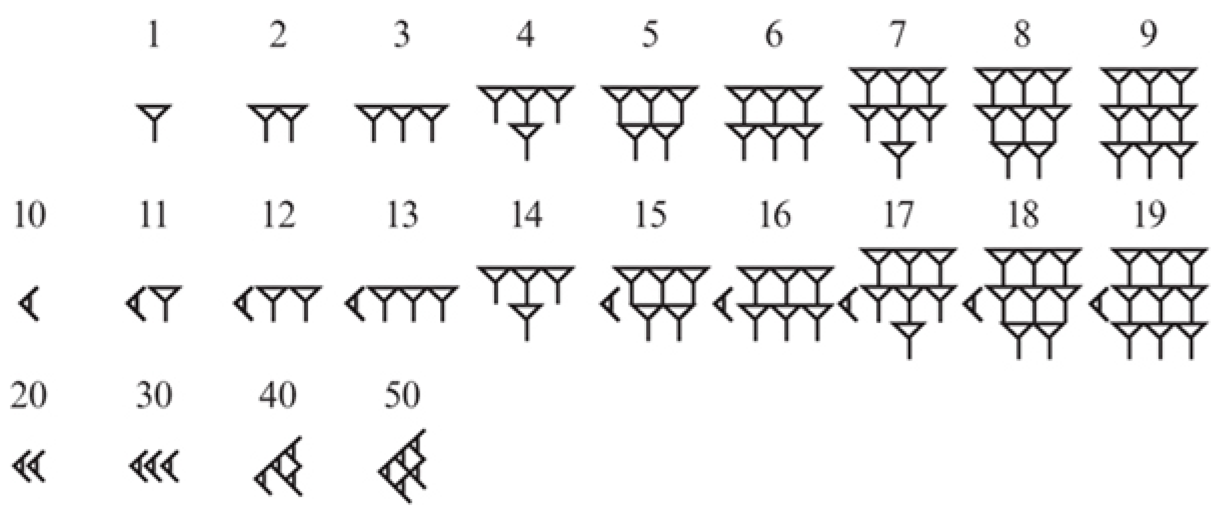


Abb. 3: Babylonische Zahlen

»Als **römische Zahlen** bezeichnet man die Zahlzeichen einer in der römischen Antike entstandenen und noch heute für Nummern und besondere Zwecke gebräuchlichen Zahlschrift, in der in der heutigen Normalform die lateinischen Buchstaben I (1), V (5), X (10), L (50), C

(100), D (500) und M (1000) als Zahlzeichen für die Schreibung der natürlichen Zahlen verwendet werden.«[22]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X

20	30	70	80	101	590	1942	1999	2000	2012
XX	XXX	LXX	XXC	CI	DXC	MCMXLII	MIM	MM	MMXII

Die römischen Zahlen verwenden die sieben Zahlzeichen I, V, X, L, C, D, M. Sie sind in der Darstellung nicht eindeutig und eigenen sich auch nicht zum Rechnen, da sie nicht in einem Stellenwertsystem erfasst sind, wie z. B.:

VIII = IIX, XXX = XXL, MCMXLII + LVIII = MM

Eine Regel allerdings gibt es:

Befindet sich das niederwertige Zahlzeichen links (rechts) vom höherwertigen, so wird es subtrahiert (addiert).

Stellenwertsysteme

Die nächste Stufe war, die Anzahl der Zahlzeichen mithilfe von **wenigen Ziffern** zu beschränken. Dieses Bestreben führte zum **Stellenwertsystem**.

Da der Mensch nun mal zehn Finger hat, setzte sich im Lauf der Zeit das **Zehnersystem** durch.

»**Die indischen Ziffern** (in Europa auch als **indisch-arabische Ziffern** oder umgangssprachlich **arabische Ziffern** bekannt) sind eine Zahlschrift, in der Zahlen positionell auf der Grundlage eines Dezimalsystems mit neun aus der altindischen Brahmi-Schrift herzuleitenden Zahlzeichen und einem eigenen, oft als Kreis oder Punkt geschriebenen Zeichen für die Null dargestellt werden.«[23]

Europäisch	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arabisch-Indisch	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Östliches Arabisch-Indisch (Persisch und Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Devanagari (Hindi)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Tamil		௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

Abb. 4: Zahlenschriften

Die Babylonier dagegen benutzten das **Sexagesimalsystem** (Sechzigersystem), das bei Winkelgraden und Zeitmessung heute noch verwendet wird: Ein Vollkreis hat 360°, eine Stunde 60 Minuten, eine Minute besteht aus 60 Sekunden.

Die Ziffergruppe **3; 1; 2** bedeutet in verschiedenen Stellenwertsystemen auch unterschiedliche Zahlen (Beispiel aus Universalgeschichte der Zahlen):

Im Zehnersystem: $\mathbf{3} \times 10^2 + \mathbf{1} \times 10 + \mathbf{2} = \mathbf{312}$

Im Sexagesimalsystem: $\mathbf{3} \times 60^2 + \mathbf{1} \times 60 + \mathbf{2} = 3 \times 3600 + 60 + 2 = \mathbf{10862}$

Zum Besetzen einer leeren Stelle im Stellenwertsystem wurde von den Baby-loniern später im 6. Jahrhundert v. Chr. die **Null** verwendet.

»Die **ägyptischen Zahlen** (auch ägyptische *Ziffern* oder *Zahlzeichen* genannt) sind eine seit Anfang des 3. Jahrtausends v. Chr. bezeugte **hieroglyphische Zahlschrift**, mit der positive rationale Zahlen (ganze und gebrochene) additiv geschrieben wurden. In ihrer Weiterentwicklung zur hieratischen Zahlschrift traten ab Mitte des 3. Jahrtausends an die Stelle dieser Zahlenhieroglyphen **hieratische Kursivzeichen** mit einer Vereinfachung des Prinzips additiver Zeichenwiederholung. […]

Die Ägypter benutzten ein **dezimales Zahlensystem**, in dem es für jede Zehnerpotenz von 1 bis 1.000.000 ein eigenes Zeichen gab. Eine beliebige natürliche Zahl (positive ganze Zahl) schrieb man mit möglichst großen, der Größe nach geordneten Zehnerpotenzen, die man jeweils so oft angab, bis man mit deren Gesamtsumme die Zahl erhielt.«[24]

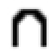
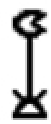
1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
Einfacher Strich	Rinds-gespann	Seil-schlinge	Wasser-lilie	Finger	Kaulquappe oder Fisch	Heh (altägyptischer Gott der Unendlichkeit
						

Abb. 5: ägyptische Stufenzahlen

Grundrechnungsarten

Handel und Buchführung führten durch die **Tätigkeiten** des Erwerbens, Teilens, Tauschens und Kaufens (später) **zwangsläufig** zu den Grundrechnungsarten Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren.

Hans Wussing und Wolfgang Arnold schreiben in ihrem Buch »Biographien bedeutender Mathematiker«[25], dass die ersten Hochkulturen der Menschheit in den Flusstälern des Gelben Flusses, des Indus, des Euphrat und Tigris und des Nils beträchtliche mathematische Kenntnisse aufwiesen. Aufgrund erhalten gebliebener Papyri aus dem 17. Jahrhundert v. Chr. kennt man Struktur und Höhe der altägyptischen Mathematik recht gut.

Rechenverfahren

»Die vier Grundrechnungsarten mit natürlichen Zahlen waren den Ägyptern vertraut, auch Operationszeichen sind überliefert. Beim Addieren und Subtrahieren wird ein Rechenbrett benutzt, beim Subtrahieren meist die

Differenz heraufaddiert.«[26] Die **Rechenverfahren** der Ägypter beruhten auf fortgesetztem **Verdoppeln und Halbieren**.

Beispiel 1: 13 mal 18[27]

\	1	18
	2	36
\	4	72
\	8	144
13 x	18	= 234

Die Grundlage der **Bruchrechnung** war ein durchgebildeter **Algorithmus** des Rechnens mit Stammbrüchen.

Beispiel 2: Algorithmus für das Zerlegen von Brüchen
Die Ägypter konnten das Doppelte von Stammbrüchen mit ungeradem Nenner nach folgendem Verfahren in zwei Stammbrüche zerlegen:

Subtrahiere vom Nenner 1 und halbiere die so erhaltene Zahl. Addiere zu dieser Zahl 1, dann hast du den Nenner des ersten Stammbruches. Multipliziere diesen erhaltenen Nenner mit dem Nenner der Ausgangszahl, dann erhältst du den Nenner des zweiten Stammbruchs.

$$2/3 = 1/2 + 1/6;\ 2/5 = 1/3 + 1/15;\ 2/7 = 1/4 + 1/28$$
$$2/(2k+1) = 1/(k+1) + 1/(k+1)(2k+1)$$

Beweise dieses Formel durch Rechnung!

Der Papyrus Rhind enthält auch eine 2/*n*-Tabelle.

Beispiel 3: Lösen der Gleichung: x + (x/7) = 19 (Problem 24 aus dem Papyrus Rhind)[28]

Im Text stehen nur die Zahlen der Rechnung ohne Erläuterung

Spalte	Text	Erläuterung
1	Ein Haufen und ein Siebtel des Haufens sind 19 1 7 $\overline{7}$ 1	Man teilt den Haufen in 7 Teilhaufen: $x = 7y$ $(1 + 1/7)\ x = 8y$
2	1 8 \2 16 $\overline{2}$ 4	Wie oft ist 8 in 19 enthalten? 2 $\overline{4}$ $\overline{8}$ mal
3	\\$\overline{4}$ 2 \\$\overline{8}$ 1	
4	\1 2 $\overline{4}$ $\overline{8}$ \2 4 $\overline{2}$ $\overline{4}$ \4 9 $\overline{2}$	2 $\overline{4}$ $\overline{8}$ mal 7
5/6	Mach es so. Der Haufen ist 16 $\overline{2}$ $\overline{8}$ $\overline{7}$ 2 $\overline{4}$ $\overline{8}$ Summe 19	 Ergebnis Probe

»Der Papyrus Rhind ist ein sachlich gut geordnetes Lehrbuch. Um das festzustellen, muss man freilich das ganze Werk Aufgabe für Aufgabe durchgehen […] Der Papyrus beginnt mit Divisionsaufgaben und Aufgaben zur Bruchrechnung. […] Die Ägypter arbeiten fast nur mit **Stammbrüchen**, d. h. Brüchen mit dem Zähler 1 oder besser gesagt: mit dem n-ten Teil des

Ganzen.«[29] Wir schreiben z. B. 1/5, indem wir über die 5 einen Querstrich setzen ($\bar{5}$).

Multiplikation und Division führten die Ägypter auf die einfachen Operationen **Verdoppeln und Halbieren** zurück.

Die obige Aufgabe x + (x/7) = 19 lässt sich auf die Gleichung 8y = 19 zurückführen, wenn man ein Siebtel x gleich y setzt. Es ist also 19 durch 8 zu dividieren.

Dazu wird 8 so oft wie möglich verdoppelt:

1	8
\2	16

Um die restlichen 3 auszuschöpfen, wird 8 jetzt mehrmals halbiert:

$\bar{2}$	4
\\$\bar{4}$	2
\\$\bar{8}$	1

Die Zahlen, die zur Summe 19 gehören, werden angestrichen (\), das Ergebnis ist:

»Acht geht in neunzehn zweimal und ein viertelmal und ein achtelmal«

$$2\ \bar{4}\ \bar{8}$$

Um x zu erhalten, wird diese Zahl noch mit 7 multipliziert:

\1	$2\ \bar{4}\ \bar{8}$
\2	$4\ \bar{2}\ \bar{4}$
\4	$9\ \bar{2}$

Summe: $16\bar{2}\ \bar{8}$

Dazu wird schrittweise verdoppelt und anschließend addiert. Schließlich folgt eine Probe.[30]

Die griechische Mathematik

Die vorgriechische Mathematik beschränkte sich auf Regeln zur Lösung von Aufgaben, die das soziale und religiöse Leben stellte. In der griechischen Mathematik (von ca. 800 v. Chr. bis 600 v. Chr.) wird sie zur logisch begründeten und axiomatisch aufgebauten Wissenschaft. Den vermutlich ersten **indirekten Beweis** führte **Euklid**, als er zeigte, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Beispiel 4: 1»Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.«[31]

Wir nehmen an, es gibt nur endlich viele Primzahlen p_1, p_2, p_3, p_4, ……… p_n, dann bilden wir die Zahl p_1* p_2* p_3* p_4 p_n + 1. Diese Zahl ist durch keine der endlich vielen Primzahlen teilbar, weil bei der Division jedes Mal der Rest 1 bleibt. Folglich müsste diese Zahl eine Primzahl sein. Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt. Folglich gibt es unendlich viele Primzahlen.

Bemerkung: Der Widerspruchsbeweis wird in der Mathematik oft verwendet, um auf »axiomatisch« begründeten Gebieten neue Erkenntnisse zu gewinnen. Ich werde im nächsten Kapitel näher auf ihn eingehen.

Aus der **Schule der Pythagoreer** stammen folgende Einsichten[32]:

- Die Quadratzahlen sind die Summe ungerader Zahlen:
  $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$