Heinz-Dieter Ebbinghaus

# Zahlen und Zeilen oder das blaue Pferd

## Mathematik und Lyrik im Gespräch

Zweite Auflage

# Vorbemerkungen

Mathematik und Lyrik, Beweise und Gedichte zusammenbringen? Auf der einen Seite Begriffe und Argumente, die formalen und logischen Kriterien genügen müssen, auf der anderen Seite die freie Entfaltung sprachlichen Gestaltens; dort der Anspruch auf Objektivität, hier die individuelle Aussage. Doch diese Gegensätze verlieren an Gewicht, wenn man, vielleicht ein wenig überraschend, feststellt, daß manche Eigenheiten mathematischen Arbeitens auch für die lyrische Tätigkeit zutreffen: Kreativität und Phantasie als Helfer, Dichte und Einfachheit der Darstellung als methodische Ziele, ästhetische Urteile über das Erreichte, z. B. Urteile, die einem Beweis Eleganz und Schönheit zuschreiben.

Das vorliegende Bändchen stellt der Schilderung eines mathematischen Sachverhalts, Begriffs oder Beweises jeweils ein Gedicht zur Seite, das wesentliche Aspekte der mathematischen Aussage spiegelt, bisweilen auch hinterfragt oder ergänzt. Oft läßt sich die innere Verwandtschaft der Partner unmittelbar erkennen. Wenn nicht, sei die ÜberSetzung aus der einen Welt in die andere der Phantasie anvertraut. Es lag in meiner Absicht, die Bezüge zuweilen auch rätselhaft erscheinen zu lassen.

Die mathematischen Themen folgen keiner Systematik; zuweilen äußern sich inhaltliche Zusammenhänge im örtlichen Beieinander. Einige Themen handeln nicht von Ergebnissen der Mathematik, sondern von der Mathematik selbst, ihrer Methodik und deren Tragweite. Die Auswahl ist sicherlich sehr subjektiv. Insgesamt aber, so hoffe ich, ist ein Mosaik entstanden, das den Reichtum der Mathematik bezeugt und in der Vielgestaltigkeit von Form und Inhalt der Gedichte ein farbiges Gegenüber findet.

Die Gleichberechtigung von Mathematik und Lyrik wollte ich nach außen sichtbar machen, nämlich durch die Beschränkung der mathematischen Texte „auf Gedicht länge“, auf jeweils eine einzige kleinformatige Seite. So können die einzelnen Paare mit einem Blick erfaßt werden. Dennoch wollte ich den mathematischen Gehalt klar zutage treten lassen und auf geschichtliche Entwicklungen nicht verzichten.

Der Preis für diese Vorgaben liegt auf der Hand: Die Texte können nur knapp das Wesentliche sagen. Ich habe mich bemüht, sie so abzufassen, daß sie ohne eine weit erreichende Kenntnis der jeweiligen Gebiete verständlich sein sollten. Dennoch erfordern einige Texte eine größere Vertrautheit mit der mathematischen Denkweise. Häufig betrifft diese Voraussetzung allerdings nicht die Texte im Ganzen; die Kernaussage bleibt dann von ihr unberührt.

Die Gedichte wollen keinen poetischen Anspruch erheben. Sie sind vor allem Partner, die charakteristische Züge ihrer mathematischen Begleiter eigensinnig übernommen haben. Zuweilen haben sie auf die Texte zurückgewirkt. Dem habe ich durch das Wort „Gespräch“ im Untertitel Rechnung getragen.

Detlef Spalt und Rüdiger Thiele haben mir wertvolle historische Hinweise gegeben.

Mein besonderer Dank gilt Heidi und Susanne. Sie haben die Entstehung des Bändchens anregend und kritisch begleitet.

Die vorliegende zweite Auflage ist eine korrigierte und erweiterte Fassung der ersten Auflage von 2010.

Heinz-Dieter Ebbinghaus

# Einige Hinweise

Mathematische Symbole werden eher zurückhaltend benutzt. Die Elementbeziehung wird durch das Symbol ε wiedergegeben. Die Schreibweise *„x ε M“* deutet an, daß das Objekt *x* ein Element der Menge *M* ist. Die Menge der natürlichen Zahlen schließt die Null ein; sie wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Wenn nichts anderes vereinbart ist, dienen die Buchstaben *i, j, k, l, m, n* als Variablen für natürliche Zahlen.

Mengen definiert man in der Regel dadurch, daß man ihre Elemente angibt. Man schreibt dann z. B. {1, 3, 5,...} oder *{n | n* ist ungerade natürliche Zahl} für die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

Mit log ist stets der natürliche Logarithmus gemeint, also der Logarithmus mit der sog. Eulerschen Zahl *e* = 2,71828... als Basis.

Sachverhalte und definierte Begriffe, die mehrfach auftreten, sind auf den Seiten 129–131 in einem kleinen Sachverzeichnis zusammengetragen. Die sie dort begleitende Zahl verweist auf die Seite, auf der sie geschildert oder definiert werden. Zusammengesetzte Begriffe der Form „Adjektiv Substantiv“ findet man unter „Substantiv, Adjektiv“, also „Goldener Schnitt“ unter „Schnitt, Goldener“. Dem Sachverzeichnis gehen bibliographische Anmerkungen und ein Namenverzeichnis voran.

# Inhalt

... wenn der Mathematiker
wircklich etwas richtiges thut,
so thut ers,
als *poetischer philo soph.*

Novalis (1772–1801)

Dorthin gehen,
wo die Parallelen sich schneiden.
Die Forderungen der Logik
durch Träume erfüllen.

Günter Eich (1907–1972)

# Das Kugelparadoxon

Das Kugelparadoxon von Stefan Banach und Alfred Tarski (1924) gehört zu den erstaunlichsten Resultaten der Mathematik: Eine Kugel vom Radius $r$ läßt sich so in endlich viele Teile zerlegen, daß man aus diesen Teilen zwei volle Kugeln vom gleichen Radius $r$ zusammensetzen kann. Nach Raphael Robinson (1947) gibt es paradoxe Zerlegungen dieser Art, die aus nur fünf Teilen bestehen.

Der Beweis des Kugelparadoxons gibt keinen Hinweis darauf, wie die Teile aussehen könnten. Er ist, wie man sagt, ein reiner Existenzbeweis. Seine Eigenart hat ihren Grund darin, daß er wesentlich das Auswahlaxiom benutzt, ein Axiom, das wegen seiner Abstraktheit in der Mathematik lange umstritten war.

Da sich Volumina von Teilen beim Zusammensetzen addieren, müssen einige Teile einer paradoxen Zerlegung der Kugel so “zerfasert“ sein, daß sie kein Volumen haben. Selbst wenn sie aus Gold bestünden, hätten sie kein Gewicht. Träume, durch paradoxe Zerlegungen einer Goldkugel reich zu werden, lassen sich nicht erfüllen.

Das Kugelparadoxon besitzt eine gleichermaßen erstaunliche Verallgemeinerung: Es seien $K$ und $K'$ Punktmengen des dreidimensionalen Raumes, die eine endliche Ausdehnung haben und eine — wenn auch noch so kleine — Kugel umfassen; z. B. sei $K$ ein Körper von der Gestalt einer Rosenknospe oder eines Spinnennetzes und $K'$ ein Körper von der Gestalt des Freiburger Münsters oder gar der gesamten Milchstraße. Dann läßt sich $K$ in endlich viele Teile zerlegen, aus denen man $K'$ zusammensetzen kann.

## Unter einem Apfelbaum

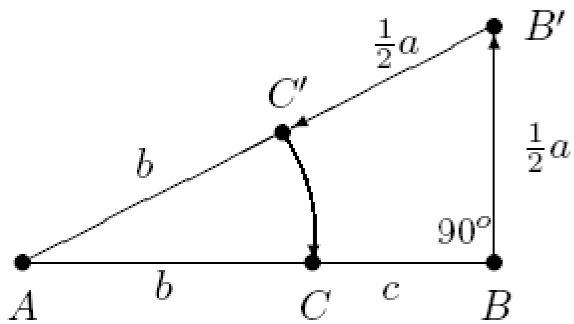
Ein rosenfarbner Frühlingsschaum
gelegt in knorrig schwarze Äste.
Sieh jene Blüte dort
an jenem Zweig:
sie birgt in sich
den ganzen Blütenhimmel,
und dieser, ohne sie,
bleibt ganz sich gleich.

# Der Goldene Schnitt

Der Punkt *C* der Strecke *AB* teilt *AB* im Goldenen Schnitt, wenn sich die Länge *a* der Strecke *AB* zur Länge *b* des größeren Abschnitts *AC* wie *b* zur Länge *c* des kleineren Abschnitts *CB* verhält, wenn also *b* das geometrische Mittel von *a* und *c* ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}, \quad \text{d. h.} \quad b = \sqrt{ac}.$$

Die Zeichnung deutet an, wie man *C* (über die Punkte *B'* und *C')* mit Zirkel und Lineal gewinnen kann.




Der von der Strecke *AB* unabhängige Quotient $\frac{b}{c}$, die Zahl Φ des Goldenen Schnitts, genügt der Gleichung $\Phi^2 - \Phi = 1$ und hat den Wert $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \approx 1,618$.

In der Architektur hat der Goldene Schnitt zuweilen bei Fragen der Ästhetik eine Rolle gespielt; Maßverhält nisse der Größe Φ galten als besonders ansprechend. So teilt die Grundfläche des Helms den Turm des Freiburger Münsters (ohne die aufgesetzte Kreuzblume) der Höhe nach im Goldenen Schnitt, und die Abstände der (Mitten der) Langhauspfeiler zu den gegenüber liegenden bzw. zu den benachbarten Pfeilern verhalten sich wie 21 Ellen zu 13 Ellen, also wie $\frac{21}{13} \approx 1,615$. Noch in den 1940er Jahren hat Le Corbusier eine sich am Goldenen Schnitt orientierende Theorie der Proportionen aufgestellt.

# Der Barockgarten

Scheren die Natur verwalten,
schneiden Werden und Vergehen,
Wind möcht zögerlich nur wehen,
Zufall darf sich nicht entfalten.

Bannstrahl metrischer Gestalten
hat kein Quentchen übersehen,
fest auf allen Beeten stehen
Form und Maß, im Plan gehalten.

Quell der Regelhaftigkeiten,
absoluter Herrscherwille
fesselt gar die Jahreszeiten.

Jenseits von Struktur und Stille
ein jauchzend Kind, und Schmetterlinge gleiten
von hier nach dort in bunter Fülle.

# Primzahlen

Eine natürliche Zahl ≥ 2, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist, heißt prim oder eine Primzahl.

Die Primzahlen sind die multiplikativen Bausteine der natürlichen Zahlen; denn jede natürliche Zahl $n \geq 2$ läßt sich — sogar bis auf die Reihenfolge eindeutig — als ein Produkt von Primzahlen schreiben. Man gewinnt ein solches Produkt, indem man $n$ möglichst weit in Teiler zerlegt.

Nach Euklid (ca. 300 v. Chr.) gibt es unendlich viele Primzahlen. Denn zu je endlich vielen Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, P_n$ gibt es eine weitere. Sei nämlich $p$ ein primer Teiler von $p_1 \ldots p_n + 1$. Da $p_1 \ldots p_n + 1$ bei Division durch $p$ den Rest 0, bei Division durch die $P_i$ jedoch den Rest 1 läßt, ist $p$ von den $p_i$ verschieden.

Nach dem Primzahlsatz (Charles Jean de La Vallee-Poussin und Jacques Hadamard 1896) geht der Quotient aus der Anzahl $\pi(n)$ der Primzahlen $\leq n$ und n/log $n$ mit wachsendem $n$ gegen 1. Man sieht daraus, daß der Anteil $\pi(n)/n$ der Primzahlen an den Zahlen $\leq n$ etwa wie 1/log n gegen 0 geht. Nur rund 8% (4%) der natürlichen Zahlen $\leq 10^6$ ($\leq 10^{12}$) sind prim. Weiter muß es beliebig große Abstände benachbarter Primzahlen geben, beliebig große Primzahllücken. Das läßt sich auch direkt zeigen: Sei $m$ eine (große) natürliche Zahl. Dann ist $m! = 1.2.3 \cdot \cdot \cdot m$ durch 2, 3,..., $m$ teilbar, also $m! + 2$ durch 2, $m! + 3$ durch 3,..., $m! + m$ durch $m$. Daher sind die Zahlen $m! + 2$, $m! + 3$,..., $m! + m$ nicht prim.

Und kleine Lücken? Dazu ein Beispiel. Zwei Primzahlen mit dem Abstand 2, etwa 17 und 19, heißen Primzahlzwillinge. Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.