Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik
und Lehrerbildung Mathematik

Rolf Biehler · Andreas Eichler
Reinhard Hochmuth · Stefanie Rach
Niclas Schaper *Hrsg.*

Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik

praxisrelevant – didaktisch fundiert – forschungsbasiert

Springer Spektrum

Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik

Reihe herausgegeben von

Die Lehre im Fach Mathematik auf allen Stufen der Bildungskette hat eine Schlüsselrolle für die Förderung von Interesse und Leistungsfähigkeit im Bereich Mathematik-Naturwissenschaft-Technik. Hierauf bezogene fachdidaktische Forschungs- und Entwicklungsarbeit liefert dazu theoretische und empirische Grundlagen sowie gute Praxisbeispiele.
Die Reihe „Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik" dokumentiert wissenschaftliche Studien sowie theoretisch fundierte und praktisch erprobte innovative Ansätze für die Lehre in mathematikhaltigen Studiengängen und allen Phasen der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik.

Weitere Bände dieser Reihe finden Sie unter http://www.springer.com/series/11632

Rolf Biehler · Andreas Eichler ·
Reinhard Hochmuth · Stefanie Rach ·
Niclas Schaper
(Hrsg.)

Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik

praxisrelevant – didaktisch fundiert – forschungsbasiert

Springer Spektrum

Hrsg.
Rolf Biehler
Institut für Mathematik, Universität Paderborn
Paderborn, Nordrhein-Westfalen, Deutschland

Andreas Eichler
Institut für Mathematik, Universität Kassel
Kassel, Hessen, Deutschland

Reinhard Hochmuth
Didaktik der Mathematik und Physik, Leibniz Universität Hannover
Hannover, Niedersachsen, Deutschland

Stefanie Rach
Institut für Algebra und Geometrie, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Magdeburg, Sachsen-Anhalt, Deutschland

Niclas Schaper
Institut für Humanwissenschaften
Universität Paderborn
Paderborn, Nordrhein-Westfalen, Deutschland

ISSN 2197-8751 ISSN 2197-876X (electronic)
Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik
ISBN 978-3-662-62853-9 ISBN 978-3-662-62854-6 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Annika Denkert
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Inhaltsverzeichnis

Einführung: Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik – praxisrelevant – didaktisch fundiert – forschungsbasiert

1

Rolf Biehler, Andreas Eichler, Reinhard Hochmuth, Stefanie Rach und Niclas Schaper

Zusammenfassung

In diesem einführenden Kapitel werden die Strukturierung und Ausrichtung des vorliegenden Bandes sowie des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik der Mathematik (khdm) vorgestellt. Dazu wird zunächst auf die Entstehungsgeschichte des khdm, seine nationalen und internationalen Aktivitäten und seinen Beitrag zur Nachwuchsförderung eingegangen. Anschließend werden die hier vorgestellten forschungsbasierten Lehrinnovationen, die im khdm von 2010 bis 2020 entwickelt wurden, eingeordnet. Die Beiträge strukturieren sich entlang von vier übergreifenden Perspektiven, nämlich fachlichen Analysen, Schnittstellenaktivitäten, Vorkurse sowie der Förderung mathematikspezifischer Arbeitsweisen und Lern-

R. Biehler (✉)
Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Paderborn, Deutschland
E-Mail: biehler@math.upb.de

A. Eichler
FB 10, Universität Kassel, Kassel, Deutschland
E-Mail: eichler@mathematik.uni-kassel.de

R. Hochmuth
idmp, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland
E-Mail: hochmuth@idmp.uni-hannover.de

S. Rach
FMA/IAG, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Magdeburg, Deutschland
E-Mail: stefanie.rach@ovgu.de

N. Schaper
KW, Universität Paderborn, Paderborn, Deutschland
E-Mail: niclas.schaper@upb.de

R. Biehler et al. (Hrsg.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik,*
Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6_1

strategien an der Hochschule. Innerhalb dieser vier Cluster besteht ein Schwerpunkt darin, die Forschungsbasierung des Designs der Lehrinnovationen herauszuarbeiten und, sofern vorhanden, durch Ergebnisse von Evaluationen und Begleitforschungen zu ergänzen.

Der vorliegende Band ist im Kontext des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) entstanden und fokussiert auf Good-Practice-Beiträge, die auf der Arbeit des khdm in den zurückliegenden zehn Jahren basieren. Herausgeber sind die Geschäftsführenden Direktoren im Jahre 2020, Rolf Biehler (Paderborn), Andreas Eichler (Kassel) und Reinhard Hochmuth (Hannover) sowie Niclas Schaper (Paderborn) als langjähriges Mitglied des Direktoriums des khdm und Kooperationspartner aus der Psychologie in mehreren khdm-Projekten sowie Stefanie Rach (Magdeburg), die von 2016 bis 2018 zur Entstehungszeit dieses Bandes die Juniorprofessur für Hochschuldidaktik an der Universität Paderborn innehatte. Da die Beiträge des Bandes auch die Geschichte des khdm repräsentieren, skizzieren wir diese zu Beginn und beschreiben dann kurz die Arbeitsstruktur des Kompetenzzentrums. Schließlich erläutern wir die Struktur des Bandes und geben einen Überblick zu den Inhalten der einzelnen Kapitel.

Geschichte des khdm

Das khdm stellte zunächst ein von der Stiftung Mercator und der Volkswagenstiftung finanziertes Drittmittelprojekt dar, das eine Startfinanzierung für zunächst drei Jahre ab dem Herbst 2010 erhielt mit dem Ziel einer Verstetigung und Institutionalisierung. Eingeworben wurden diese Mittel im Rahmen der Ausschreibung „Bologna – Zukunft der Lehre“ durch die beiden Universitäten Kassel und Paderborn. Neben Impulsen zur Entwicklung der Hochschuldidaktik Mathematik als interdisziplinäres wissenschaftliches Feld und als wissenschaftliche „Community“ sollten insbesondere kooperativ angelegte Forschungs- und Entwicklungsprojekte mit hohem, über die Universitäten hinausgehendem Transferpotenzial durchgeführt werden. An der Konzeption der Projekte und der Antragstellung waren ursprünglich 15 Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus der Fachmathematik, der schulbezogenen Mathematikdidaktik, der allgemeinen Hochschuldidaktik und der Psychologie beteiligt. Federführend eingeworben und dann geleitet wurde das Zentrum von Rolf Biehler (Paderborn) und Reinhard Hochmuth (Kassel). Bedingt durch den Wechsel des Letzteren an die Leuphana-Universität Lüneburg wurde das khdm in den Jahren 2011 bis 2015 zu einer Einrichtung dieser drei Universitäten. Mit dem Wechsel von Reinhard Hochmuth an die Leibniz Universität Hannover übernahm diese Hochschule (ab 2016) die Rolle der dritten Trägeruniversität von der Leuphana-Universität.

So ist das khdm aktuell als gemeinsame wissenschaftliche Einrichtung der Leibniz Universität Hannover, der Universität Kassel und der Universität Paderborn etabliert. Die Universitäten unterstützen die Arbeit des khdm mit einer Grundausstattung – Beteiligung an Sekretärinnenkapazität, Stellenanteile der Geschäftsführer und Sachmittel. Seine Weiterführung verdankt das khdm aber im Wesentlichen der Einwerbung von Drittmitteln für Forschungs- und Entwicklungsprojekte. Im Jahre 2019 kooperierten im khdm insgesamt 22 Professorinnen und Professoren sowie 38 wissenschaftliche Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Mit Bezug auf wissenschaftliche Nachwuchsförderung werden im khdm derzeit 19 Qualifikationsprojekte durchgeführt, zehn wurden bereits abgeschlossen (Feudel 2020; Fischer 2014; Göller 2020; Kempen 2019; Kortemeyer 2019; Laging 2021; Liebendörfer 2018; Ostsieker 2020; Püschl 2019; Wolf 2017). In der Aufbauphase des khdm wurden mehrere nationale und internationale Tagungen organisiert, um eine Vernetzung der Hochschuldidaktik Mathematik zu etablieren bzw. auszubauen. Die erste Arbeitstagung des khdm widmete sich schwerpunktmäßig den Vorkursen (Bausch et al. 2014) und die zweite der Studieneingangsphase (Hoppenbrock et al. 2016, 2013). Die internationale Einbettung des khdm wurde dann durch weitere vom khdm initiierten Tagungen in Oberwolfach (Biehler et al. 2014; Biehler und Hochmuth 2016) und Hannover (Göller et al. 2017) gestärkt.

Arbeitsstruktur des khdm

Nach der kurzen geschichtlichen Einbettung soll im Folgenden die Arbeitsstruktur des khdm vorgestellt werden. Die Mathematik ist eine eigenständige Disziplin an der Hochschule. Sie ist aber auch wichtige Grundlage anderer Disziplinen. In den verschiedenen Bereichen taucht die Mathematik dabei in sehr unterschiedlichen Formen auf, was die Inhalte, Ziele und Methoden betrifft. Da sich die Mathematik an der Hochschule in mehreren Studienbereichen wiederfindet und einen spezifischen Charakter je nach Studienbereich zeigt, wurden Entwicklungs- und Forschungsprojekte zu mathematischen Lehr- und Lernprozessen in verschiedene Arbeitsgemeinschaften eingeteilt.

Das khdm gliedert sich einerseits nach Studiengangsbereichen, die jeweils durch eine Arbeitsgemeinschaft (AG) repräsentiert sind:

- AG 1 Lehrer*innenausbildung Grund-, Haupt- und Realschule
- AG 2 Bachelor Mathematik und Lehrer*innenausbildung Gymnasium
- AG 3 Wirtschaftswissenschaften
- AG 4 Ingenieurwissenschaften

Eine besondere Herausforderung liegt in den mathematischen Eingangsvoraussetzungen für die verschiedenen Fächer, die von der zunehmend heterogenen Studierendengruppe sehr unterschiedlich erfüllt werden. Die besondere Bearbeitung der Übergangsproblematik mit Fokus auf der Sicherung eines gemeinsamen Mindestniveaus stellt daher einen eigenen Bereich dar:

- AG 5 Mathematische Vor- und Brückenkurse

Schließlich haben sich in den Jahren der gemeinsamen und standortübergreifenden Zusammenarbeit Projekte herausgebildet, die aus verschiedenen Perspektiven der

Arbeitsgruppen heraus betrachtet werden müssen. Hierfür wurde eine ergänzende Arbeitsgruppe eingerichtet:

- AG 6 Übergreifende Projekte

In diesen sechs AGs tauschen sich die Forschenden über ihre Projekte aus oder initiieren neue, interdisziplinär ausgerichtete Projekte. In jeder AG sind Lehrende der Mathematik aus der jeweiligen Domäne integriert.

Die Projekte in der Startphase waren an die AG-Struktur angedockt. Mittlerweile ist die Forschungs- und Entwicklungsarbeit des khdm in thematisch fokussierten Clustern organisiert, die stärker den weiterentwickelten Forschungsschwerpunkten entsprechen, quer zur AG-Struktur liegen und auch das Grundgerüst des vorliegenden Bandes bilden:

- Fachliche Analysen als Grundlage hochschuldidaktischer Innovationen (Kap. 2 – 6)
- Schnittstellenaktivitäten zwischen Schule, Hochschule und Profession (Kap. 7 – 12)
- Mathematikvorkurse als Einführung in das Studium (Kap. 13 – 18)
- Förderung mathematikspezifischer Arbeitsweisen und Lernstrategien an der Hochschule (Kap. 19 – 24)

Zu diesem Band

Die einzelnen Arbeiten des Bandes haben wir übergeordneten Kapiteln zugeordnet, die wir im Folgenden kurz vorstellen. Diese orientieren sich an den eben genannten Clustern (zu weiteren Arbeiten im khdm, die sich in die Cluster einreihen lassen, siehe die Website www.khdm.de).

Fachliche Analysen sind eine Grundlage hochschuldidaktischer Innovationen und bilden den thematischen Schwerpunkt der Kapitel 2 bis 6. Der Fokus auf das Lehren und Lernen einzelner mathematischer Begriffe und Theorien wurde im khdm bereits seit seinem Beginn gelegt, jedoch zunächst häufiger analytisch-beobachtend und weniger auf Lehrinnovationen zielend. In diesem Band sind solche Arbeiten dargestellt, die auch eine Komponente der Praxisinnovation beinhalten. Es gibt zwei Beiträge zu Konzepten für die Gestaltung von Mathematiklehrveranstaltungen in der Ausbildung für Studierende der Ingenieurwissenschaften. Ferner fokussieren zwei weitere Beiträge auf spezielle mathematische Themen, die Folgenkonvergenz und die Signaltheorie als Teil der Elektrotechnik.

Eine spezielle Form der Lehrinnovation in Vorlesungen stellen sogenannte Schnittstellenaktivitäten dar, die in den Kapiteln 7 bis 12 diskutiert werden. Dabei geht es darum, besondere Angebote für diejenigen Studierenden zu entwickeln, die nicht Mathematik auf Bachelor und Master als Hauptfach studieren, um später als Mathematikerin oder Mathematiker tätig zu sein, sondern die Lehrveranstaltungen als Teil einer wissenschaftlich fundierten Fachbildung und Berufsausbildung sehen. Das betrifft einerseits alle Lehramtsstudiengänge und andererseits diejenigen, die Mathematik als Servicefach belegen, also zum Beispiel die Studierenden der Wirtschaftswissenschaften oder Ingenieurwissenschaften. Die Angebote bestehen im Kern darin, Aufgaben und Aktivitäten zu entwickeln, die eine Verbindung zur späteren Berufspraxis oder zu den Bezugsdisziplinen herzustellen. In den entsprechenden Kapiteln werden daher sowohl Schnittstellenaktivitäten in der ingenieurwissenschaftlichen Ausbildung als auch in der Lehramtsausbildung thematisiert.

Ein besonderer Fokus des khdm liegt auf der Entwicklung und Beforschung von digital gestützten Mathematikvorkursen, zu denen Arbeiten in den Kapiteln 13 bis 18 präsentiert werden. Drei der fünf Beiträge in diesem Teil bauen auf den VEMINT-Vorkursen auf. Diese basieren auf dem 2003 gegründete VEMA-Projekt, in dem multimediale Vorkursmaterialien für Blended-Learning-Szenarien entwickelt und erforscht wurden – auch nach Gründung des khdm weiterhin zusammen mit der TU Darmstadt. Ein Beitrag ist dem Einsatz des Aufgabenentwicklungssystems STACK gewidmet, das mittlerweile an vielen Hochschulen eingesetzt wird. Ein Beitrag greift diese Technologie für die digitale Unterstützung von Übungen auf, und das nicht nur in Vorkursen, sondern auch im ersten Studienjahr. Ferner wird über eine vergleichende wissenschaftliche Studie zu verschiedenen weiteren Vorkursen mit dem Fokus auf digitalem Medieneinsatz bei Themen der Statistik berichtet.

Abschließend sind in den Kapiteln 19 bis 24 solche Arbeiten aus dem khdm aufgenommen, in denen die partielle Neugestaltung mathematischer Vorlesungen oder Tutorien im ersten Studienjahr vor allem zur Förderung mathematischer Arbeitsweisen in verschiedenen mathematikhaltigen Studiengängen diskutiert wird. Diese Arbeitsweisen zielen vor allem darauf ab, dass Studierende eigenständig Beweise konstruieren und ein umfassendes Verständnis abstrakter Begriffe aufbauen können. In den hier vorgestellten Beiträgen werden erstens Lerninnovationen vorgestellt, die direkt in Vorlesungen umgesetzt und evaluiert wurden, z. B. verschiedene Typen von Beweisen, Konzeptbasen, Lückenskripts oder die Einbindung der enaktiven Darstellungsebene. Zweitens werden Schulungsangebote für Tutorinnen und Tutoren im Hinblick auf die Förderung von Arbeitsweisen präsentiert.

Die Gesamtheit der Forschungsarbeiten des khdm abzubilden war nicht Ziel dieses Bandes. Vielmehr wird eine Zwischenbilanz nach zehn Jahren im Hinblick auf praktische Innovationen vorgelegt. Der aktuelle Stand ist auf unserer Homepage (www.khdm.de) gut abgebildet, eine zusammenfassende Darstellung des khdm findet sich auch in Hochmuth et al. (2020).

Alle Beiträge dieses Bandes sind einem Review-Verfahren mit zwei Gutachten unterzogen worden, einem Gutachten aus den Reihen des khdm und einem weiteren aus der Community der Hochschuldidaktik Mathematik.

Literatur

Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P. R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S., & Wassong, T. (2014). *Mathematische Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Biehler, R., & Hochmuth, R. (2016). Oberwolfach papers on mathematics in undergraduate study programs: Challenges for research. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1–7. doi: https://doi.org/10.1007/s40753-016-0049-7

Biehler, R., Hochmuth, R., Hoyles, D. C., & Thompson, P. W. (2014). Mathematics in undergraduate study programs: Challenges for research and for the dialogue between mathematics and didactics of mathematics. *Oberwolfach Reports, 11*(4), 3103–3175. https://doi.org/10.4171/OWR/2014/56.

Feudel, F. (2020). *Die Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Analysen zum benötigten, gelehrten und von Studierenden erreichten Verständnis des Ableitungsbegriffs*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Fischer, P. (2014). *Mathematische Vorkurse im Blended Learning Format - Konstruktion, Implementation und wissenschaftliche Evaluation*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Göller, R. (2020). *Selbstreguliertes Lernen im Mathematikstudium*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Göller, R., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2017). *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline – Conference Proceedings*. Kassel: Universitätsbibliothek Kassel. https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hebis:34-2016041950121.

Hochmuth, R., Liebendörfer, M., Biehler, R., & Eichler, A. (2020). Das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (khdm). *Neues Handbuch Hochschullehre, 95,* 117–138.

Hoppenbrock, A., Biehler, R., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (Hrsg.). (2016). *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase – Herausforderungen und Lösungsansätze*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hoppenbrock, A., Schreiber, S., Göller, R., Biehler, R., Büchler, B., Hochmuth, R., & Rück, H.-G. (2013). *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr - Extended Abstracts zur 2. khdm-Arbeitstagung*. Kassel: Universität Kassel. https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2013081343293.

Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule. Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und wissenschaftliche Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Kortemeyer, J. (2019). *Mathematische Kompetenzen in Ingenieur-Grundlagenfächern: Analysen zu exemplarischen Aufgaben aus dem ersten Jahr in der Elektrotechnik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Laging, A. (2021). *Selbstwirksamkeit, Leistung und Calibration in Mathematik. Eine Studie zum Einfluss von Aufgabenmerkmalen und Feedback zu Studienbeginn*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Liebendörfer, M. (2018). *Motivationsentwicklung im Mathematikstudium*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Ostsieker, L. (2020). *Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs: Gestaltung und empirische Untersuchung*. Heidelberg: Springer Spektrum.

Püschl, J. (2019). *Kriterien guter Mathematikübungen – Potentiale und Grenzen in der Aus- und Weiterbildung von studentischen TutorInnen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wolf, P. (2017). *Anwendungsorientierte Aufgaben für Mathematikveranstaltungen der Ingenieurstudiengänge - Konzeptgeleitete Entwicklung und Erprobung am Beispiel des Maschinenbaustudiengangs im ersten Studienjahr*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Teil I

Fachliche Analysen als Grundlage hochschuldidaktischer Interventionen

Fachliche Analysen als Grundlage hochschuldidaktischer Interventionen – Einführung

2

Reinhard Hochmuth

Zusammenfassung

Fachliche Analysen in der Hochschuldidaktik Mathematik fokussieren auf den Lehr- bzw. Lernstoff und theoretisch fundierte empirische Analysen fachlicher Lernprozesse. Sie tragen zur Klärung der Frage bei, welcher „Stoff“ auf welche Weise in Mathematik-, Lehramts-, Naturwissenschafts- und Ingenieurstudiengängen behandelt werden soll und kann. Damit verfolgen die fachlichen Sachstrukturanalysen insbesondere auch das Ziel, Grundlagen für neue Lehr-Lern-Sequenzen zu entwickeln. Die Einführung skizziert Antworten auf Fragen wie „Worum geht es in fachlichen Analysen?“ oder „Worin besteht deren Relevanz und worin liegen typischerweise deren Grenzen?“. Vor diesem Hintergrund werden schließlich die Beiträge dieses Buchteils kurz eingeordnet.

In der Hochschuldidaktik Mathematik fokussieren fachliche Analysen auf den Lehr- bzw. Lernstoff, dabei insbesondere auf Rekonstruktionen seiner fachlichen und innermathematischen Logik im Hinblick auf Lehr-Lern-Prozesse und auf theoretisch fundierte empirische Analysen fachlicher Lernprozesse selbst. Diesbezüglich besteht kein Unterschied zwischen einer hochschulmathematik- und einer schulmathematikbezogenen Fachdidaktik. Für einen vertiefenden und breiten historischen Überblick zur schulbezogenen stoffdidaktischen Forschung sei beispielsweise auf Hefendehl-Hebeker (2016) verwiesen. Fachliche Analysen haben dabei die Lehr-Lern-Situation in ihren sozialen Dimensionen, z. B. bezüglich des didaktischen Vertrags (Brousseau 1997),

R. Hochmuth (✉)
idmp, Leibniz Universität Hannover, Hannover, Deutschland
E-Mail: hochmuth@idmp.uni-hannover.de

R. Biehler et al. (Hrsg.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik,*
Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6_2

und in ihren psychologischen Dimensionen, z. B. bezüglich Fragen der Motivation, durchaus im Blick. Diese Perspektiven dienen unter anderem der Orientierung fachlicher Reflexionen und darauf basierender Lehrvorschläge, die das Lernen Studierender erleichtern und die Lernergebnisse vertiefen wollen. Fachlichen Analysen zugrunde liegende Fragen sind beispielsweise:

- Bezüglich welcher fachlichen Inhalte bzw. Aspekte sollen Studierende größere Verantwortung in ihren Lernhandlungen übernehmen?
- Welches Beispiel oder auch welches Hintergrundwissen könnte motivierend wirken?

Untersuchungen, die in elaborierter und spezifischer Weise auch auf theoretische Konzepte bezüglich etwa selbstständiger Lernformen, Lern- und Arbeitsstrategien oder Motivationsfragen eingehen, oder auf empirischer Basis die Frage zu beantworten versuchen, ob und inwiefern auch fachlich veranlasste Lehrinnovationen die angestrebten Ziele tatsächlich erreichen und welchen Anteil spezifisch fachliche Neuerungen daran haben, folgen in anderen Teilen dieses Bandes. Entsprechend finden sich dort an der einen oder anderen Stelle auch Analysen fachlicher Aspekte, die dann aber jeweils explizit einer anderen und in erster Linie nicht primär fachlichen Perspektive untergeordnet sind. Im Unterschied dazu sind in diesem Teil Beiträge versammelt, die fachliche Aspekte in den Mittelpunkt stellen und aus dem Fachlichen sowohl ihre zentralen Untersuchungsdimensionen, Fragestellungen und Ergebnisse als auch einen wichtigen Ausgangspunkt für Geltungsbegründungen ihrer Aussagen erhalten.

In der Forschungsperspektive des khdm stellen fachbezogene Analysen einen Schwerpunkt dar, auch weil von Beginn an im khdm Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler aus der Fachwissenschaft und der Didaktik intensiv in Projekten kooperierten. Dabei sind in den zurückliegenden Jahren insbesondere komplexe Fragen nach geeigneten fachlichen Übergängen und Passungen, etwa hinsichtlich der Verwendung von Begriffen und Kalkülen in den Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, untersucht worden. Die einmal eher begriffs- und ein anderes Mal eher textorientierten Sachstrukturanalysen verfolgten unter anderem auch das pragmatische Ziel, Grundlagen für neue Lehr-Lern-Sequenzen oder Aufgaben für die Lehre zu konstruieren.

Wir werden nun zunächst auf die beiden folgenden Fragen eingehen:

- Worum geht es in fachlichen Analysen?
- Worin besteht deren Relevanz und worin liegen typischerweise deren Grenzen?

Vor diesem Hintergrund werden dann schließlich die vier Beiträge dieses Buchteils eingeordnet.

Worum geht es in fachlichen Analysen?

Fachliche Analysen beschreiben und untersuchen Inhalte, Themen des Lehr- und Lernstoffs, den Lehrplan bzw. curriculare Aspekte eines Themas, einer Vorlesungseinheit, eines Moduls oder eines Studiengangs. Infrage gestellt wird das, was inhaltlich in Vorlesungen, Übungen und Seminaren behandelt wird. Dabei geht es insbesondere um spezifische fachliche Lernhürden. Was zum zu lehrenden Inhalt gehört, scheint in Studiengängen der Mathematik am klarsten zu sein. Deshalb geht es in darauf bezogenen Untersuchungen häufig mehr um das Wie, um das Verstehen bestimmter Schwierigkeiten beim Lernen an sich feststehender Inhalte im ersten Studienjahr sowie im Übergang von der Schule zur Universität. Schon für das gymnasiale Lehramt werden bezüglich der notwendigen und mit Blick auf die späteren beruflichen Anforderungen hilfreichen Inhalte und deren Gestaltung seit Jahren viele Fragen gestellt. Diese beziehen sich nicht nur auf die fortgeschrittene Mathematik, der sich etwa Master-Studierende in originären Mathematikstudiengängen widmen, sondern auch auf die Grundlagenveranstaltungen der Analysis und Linearen Algebra. Deren in der Regel axiomatischen Aufbau sollen Lehramtsstudierende zwar durchaus kennenlernen, ein erstes Fragezeichen besteht aber bereits hinsichtlich darauf bezogener Handlungskompetenzen. Und ein zweites, im gewissen Sinne „größeres" Fragezeichen besteht bezüglich fachlicher Anschlüsse zu schulmathematischen und fachdidaktischen Wissensbeständen. Was hier zur Disposition gestellt und wohl auch zu Recht mit Blick auf aktuell tatsächlich erreichte Lernziele angezweifelt wird, ist der Transfer vom universitären Wissenskanon der Analysis und Linearen Algebra zu entsprechenden schulbezogenen Wissensbeständen. Beiträge, die sich gezielt mit dieser Problematik auseinandersetzen, finden sich im Teil 2 dieses Bandes.

Ähnlich relevant sind solche den Inhalt selbst zur Disposition stellende Fragen mit Blick auf ingenieurwissenschaftliche Studiengänge und, diesbezüglich, auf Lehrveranstaltungen zur Höheren Mathematik. Deren Verhältnis wird derzeit vielleicht als nicht ganz so problematisch angesehen wie beim gymnasialen Lehramt. Von daher geht es in darauf bezogenen Studien eher um eine Optimierung der Lehre im Sinne einer besseren Verzahnung von mathematischen und ingenieurwissenschaftlichen Inhalten. In der Höheren Mathematik für Ingenieure finden sich häufig pragmatische und an Kalkülen orientierte Stoffauswahlen. Allerdings erscheint mit Kalkülorientierung die jeweilige Auswahl noch nicht hinreichend qualifiziert (Schupp 2016). Entsprechend haben in den zurückliegenden Jahren Umfang und Tiefe der Forschung zu Verwendungsweisen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften auch international zugenommen (Hochmuth 2020). Dabei wird jedoch oft nur in den Blick genommen, welche Kalküle und welche Begriffe in den Ingenieurwissenschaften konkret verwendet werden. Zunehmend werden aber auch weitergehende Fragen gestellt. Diese beziehen sich etwa auf die Spezifik der Verknüpfung von Mathematik als axiomatisch gegründeter Wissenschaft und empirisch fundierten Ingenieurwissenschaften und darauf bezogenes Begründungs- und Steuerungswissen. Entsprechend dieser Ausweitung untersuchter Fragestellungen haben sich in den zurückliegenden Jahren auch die in der Forschung fruchtbar gemachten Theorierahmen verändert (Artigue 2016).

Nach wie vor findet in der hochschuldidaktischen Forschung häufig die analytische Unterscheidung zwischen einem *concept image* und der *concept definition* Verwendung.

Diese wurde in den 1970er-Jahren (z. B. Vinner 1976) eingeführt und nachfolgend durch die viel zitierte Arbeit von Tall und Vinner (1981) zu einem wesentlichen Bestandteil eines kognitiv orientierten, entwicklungsorientierten Ansatzes zur Analyse des mathematischen Lernens auf Universitätsebene. In dieser Unterscheidung reflektiert sich zum einen die gegenüber der Schulmathematik größere Bedeutung von Definitionen. Aussagen etwa in Gestalt mathematischer Sätze müssen auf Basis von Definitionen, deren präziser Formulierung und unter Befolgung logischer Regeln bewiesen werden. Dies stellt einen großen Teil universitärer Mathematik dar, den es so für die Schulen weder vom Umfang her noch in der Tiefe jemals gab. Zum anderen gehen auch an der Universität Begriffe nicht in deren Definitionen auf. Für die Verwendung von Konzepten und Begriffen, ob beim Problemlösen, Anwenden oder dem Finden eines Beweises, spielen in der Regel vielfältige Vorstellungen, Darstellungen und teilweise auch intuitive Bezüge zwischen fachlichen Inhalten eine wichtige Rolle. Ziel der Lehre ist es, dass Studierende nicht nur die *concept definition* kennen und verständig damit umgehen können, sondern auch über ein darüber hinausgehendes reichhaltiges *concept image* verfügen, das in seinen verschiedenen Aspekten hinsichtlich seiner Möglichkeiten und Grenzen sowie seiner Verträglichkeit bezüglich der *concept definition* reflektiert werden kann.

In den zurückliegenden Jahren ist auch der Kompetenzbegriff mit seinen verschiedenen Facetten verstärkt in der Hochschuldidaktik Mathematik verwendet worden. Wie in der schulbezogenen Mathematikdidaktik adressieren die Dimensionen auch hier in erster Linie fachlich gedachte Kompetenzen unter expliziter Ausklammerung affektiver Aspekte. So hat etwa das SEFI-Netzwerk (2013) aufbauend auf dem von Niss formulierten Modell (Niss 2003; siehe auch Niss und Højgaard 2019) für die mathematischen Kompetenzen in den Ingenieurwissenschaften ein explizites Modell beschrieben.

Schließlich werden zunehmend für fachliche Analysen auch außerhalb der Länder und Regionen, in denen diese schon länger die Mittel der Wahl darstellen (vgl. etwa zu länderbezogenen Vergleichen Sträßer (1996) sowie Laborde (2016)) Elemente der Anthropologischen Theorie der Didaktik (ATD) und hier insbesondere das sog. 4 T-Model sowie die Skala der Ebenen der Kodetermination genutzt (Chevallard 1992; Bosch und Gascón 2014; Winsløw et al. 2014). ATD bietet einen kohärenten und systematischen Rahmen, mathematische und mathematikdidaktische Aktivitäten zu untersuchen. Die zentrale Untersuchungseinheit stellen sog. Praxeologien dar. Deren Beschreibung mittels 4T-Modellen beruht u. a. auf der Vorstellung, dass alle menschlichen Handlungen, also auch mathematische und mathematikdidaktische, zwei Momente einschließen: ein praktisches sowie ein theoretisches und begründendes Moment. Darüber hinaus fokussiert ATD auf die Dynamik von Wissensbereichen und -organisationen, deren Existenz- und Entwicklungsbedingungen in institutionellen Kontexten.

Worin bestehen die Relevanz und die Grenzen fachlicher Analysen?
Mit Bezug auf Predigers (2015) Darstellung fachdidaktischer Theorieelemente und ihre Funktionen lassen sich Stoffdidaktik und fachliche Analysen als notwendiges und hilfreiches Moment bezüglich der folgenden forschungsbezogenen Dimensionen ausweisen: In deskriptiven Theorieelementen betrifft das etwa Fragen danach, welche Phänomene und Beziehungen sich fachlich unterscheiden lassen, oder auch welche fachlichen Fehler typischerweise bei Studierenden auftreten. Im Kontext erklärender bzw. verstehender Theorieelemente helfen fachlich orientierte Untersuchungen Fragen nach Gründen des Auftretens bestimmter Phänomene zu beantworten bzw. deren fachliche Hintergründe zu spezifizieren. In normativen Theorieelementen sind sie notwendig, um Inhalte und die mit ihnen verknüpften fachlichen Ziele zu beschreiben, zu verorten und zu begründen. Mit Blick auf präskriptive Theorieelemente kann es etwa um folgende Fragen gehen:

- Wie sollen Begriffe eingeführt und welche Aufgaben sollen gestellt werden, um bestimmte Ziele zu erreichen?
- An welche fachlichen Bedingungen ist die Erreichung bestimmter Lehr-Lern-Ziele geknüpft?
- Welche Materialien und Beispiele sind hilfreich?

  Und schließlich mit Blick auf prognostische Theorieelemente:
- Was ist als Folge bestimmter fachlicher Voraussetzungen und Bedingungen anzusehen?

Es versteht sich von selbst, dass fachliche Untersuchungen und Vorschläge diesbezüglich nur gut begründete Möglichkeiten beschreiben können, deren Realisierung von weiteren, über das Fachliche hinausweisenden Faktoren abhängt. Unabhängig davon können fachliche Analysen sowohl in rekonstruktiven als auch in quantitativen und qualitativen, empirisch orientierten Forschungsdesigns eine zentrale Rolle einnehmen.

In einer vor mehr als zwanzig Jahren unter dem Titel „Hat die Stoffdidaktik Zukunft?“ erschienenen Überblicksarbeit hat sich Reichel (1995) mit der Relevanz und den Grenzen der sog. „Stoffdidaktik“ beschäftigt, wenn auch vor allem mit Blick auf die schulbezogene Fachdidaktik. Darin stellte er zunächst fest, dass Kern- und Ausgangspunkt der Stoffdidaktik stets ein mathematisches Thema sei, an das sich mannigfache didaktische Forschungen anschließen könnten. Als notwendige Klammer zwischen der fachlichen Seite und ihrer Umsetzung im Unterricht sieht er vor allem lernpsychologische und interaktionistische Studien. Deren Perspektiven und Fragestellungen markieren gleichsam Grenzen fachlicher Untersuchungen. Aufgrund der Verflechtung zwischen dem Unterrichtsgegenstand einerseits und dem hermeneutischen Verstehen zwischenmenschlicher Dialoge andererseits könne aber auf das Fachliche nicht verzichtet werden. Unter Berufung auf Blum (1984), weist Reichel darüber hinaus darauf hin, dass ein bewusstes Ausblenden stoffbezogener Aspekte zu Verkürzungen, u. a. der Unterschätzung fachmethodischer Spiel- und Handlungsräume, führe. Gleichzeitig widerspricht Reichel aber auch klar einer Beschränkung auf Sachanalysen und befürwortet vielmehr, wie bereits angedeutet, eine enge Verbindung inhaltlich-mathematischer Aspekte mit Fragen der Unterrichtskultur. Übertragen auf die hochschulbezogene Fachdidaktik scheint eine solche Erweiterung unter anderem hinsichtlich der Beantwortung folgender Forschungsfragen angebracht:

- Welche Gebiete, welche Art von Lehrveranstaltung und welches Studierenden- und Lehrerverhalten generieren bzw. spiegeln unbewusst welches Bild von Mathematik wider?
- Wie lassen sich allgemeine Denk- und Handlungsformen (Bildung), die in der Mathematiklehre möglicherweise besonders zum Tragen kommen, fachbezogen analysieren und bestimmen?
- Wie könnte eine fach- und interaktionsbezogene Didaktik der Prüfungen für die Hochschule aussehen?

Je nach theoretischer Rahmung fachlicher Untersuchungen werden sicher Aspekte der eben genannten Problembereiche bereits in fachlichen Analysen berührt, in der Breite und eventuell notwendigen Tiefe aber sicher nicht, da sie Fragen betreffen, die einen fachlichen Diskurs notwendig überschreiten.

Eines der Defizite der frühen und soeben adressierten „Stoffdidaktik" besteht darin, dass empirische Fragen hinsichtlich der Lernenden nicht systematisch in den Blick genommen wurden. In Bezug darauf hat sich in den letzten zwanzig Jahren viel bewegt (siehe dazu u. a. Biehler und Blum 2016). Ein vielversprechendes Rahmenkonzept zur Verknüpfung stoffdidaktischer Überlegungen und empirischer Ansätze stellt das sog. Design Research dar (für einen differenzierten Überblick zu verschiedenen Varianten siehe beispielsweise Prediger et al. 2015). Bezogen auf die schulbezogene Fachdidaktik haben unter anderem Hußmann und Prediger (2016) eine spezifische Konkretisierung des Design Research vorgeschlagen, die klassische stoffdidaktische Fragestellungen auf mehreren Ebenen eines allgemeinen Vier-Ebenen-Ansatzes verortet und empirisch einordnet. Ein entsprechender vollständiger Durchlauf mehrerer Forschungszyklen findet sich in der hochschuldidaktischen Forschung im Bereich Mathematik bisher selten. Die fachlich orientierten Analysen des vorliegenden Bandes decken aber durchaus relevante Schritte dieses umfassenden Rahmenkonzepts ab. In der weiteren Ausgestaltung konkreter empirischer fachlicher Analysen besteht diesbezüglich sicher noch viel Potenzial. Das betrifft auch eher theoretische, grundlagenorientierte Fragen wie etwa bezüglich einer auch wissenschaftstheoretischen Ansprüchen genügenden Konzeptualisierung des Verhältnisses zwischen eher institutionell orientierten stoffdidaktischen und subjektbezogenen empirischen Aspekten. In diesem Kontext ist dann auch eine möglichst präzise Fassung der Grenzen fachlicher Analysen und deren theoretischer Mittel nötig (vgl. dazu etwa Hochmuth und Peters im Druck).

Eine weitere und eher offensichtliche Grenze der vorliegenden Beiträge besteht nicht zuletzt in der Breite der untersuchten Studiengänge. So liegen bisher im khdm keine

Untersuchungen zur Verwendung der Mathematik in den Naturwissenschaften, der Psychologie und den Sozialwissenschaften vor.

Einordnung der Beiträge

Die vier Beiträge in diesem Buchteil beschäftigen sich mit der mathematischen Lehre in den Studiengängen der Mathematik und des gymnasialen Lehramts sowie in den Ingenieurwissenschaften und dabei insbesondere der Elektrotechnik. Dabei geht es vor allem um Fragen des Übergangs, hier insbesondere von der Schule zur Universität, bzw. der Passung, hier insbesondere zwischen Inhalten der Höheren Mathematik für Ingenieure und deren Verwendung in ingenieurwissenschaftlichen Fachveranstaltungen. Bezüglich des ersten Themenbereichs liegt der Schwerpunkt zweier Beiträge auf Untersuchungen, die den Übergang von der Schule in das erste Studienjahr fokussieren. Im Beitrag von Kortemeyer und Frühbis-Krüger (Kap. 3) wird über die Organisation einer Höhere-Mathematik-Lehrveranstaltung für Ingenieurwissenschaftsstudierende berichtet. Der spezifische Fokus des Beitrags liegt auf der Beschreibung einzelner Maßnahmen und wie diese im Hinblick auf die spezifischen Schwierigkeiten einer solchen Lehrveranstaltung ineinandergreifend miteinander verknüpft werden. Im Beitrag von Ostsieker (Kap. 4) geht es zentral um eine Lernumgebung und einen Workshop zum Konvergenzbegriff bei Folgen, die in einer Design-Based Research-Studie entwickelt wurden, um Studierenden den Zugang zu diesem bekanntermaßen schwierigen Begriff zu erleichtern. In diesem Beitrag wird insbesondere auf die Konstrukte der *concept definition* und des *concept image* zurückgegriffen. Die beiden weiteren Beiträge fokussieren auf fortgeschrittene ingenieurwissenschaftliche Fachveranstaltungen in mittleren Semestern. In beiden geht es um im weiteren Sinne signaltheoretische Inhalte. Der Beitrag von Block und Mercorelli (Kap. 5) entwickelt auf der Grundlage kompetenztheoretischer und fachlicher Überlegungen Lehrinnovationen anhand zwei verschiedener Themen unter besonderer Berücksichtigung der heterogenen Mathematikkompetenz von Studierenden. Im Vordergrund der Beschreibung und Analyse steht jeweils die stoffdidaktische Verzahnung von mathematischer und ingenieurwissenschaftlicher Theorie und Praxis. Im Beitrag von Peters und Hochmuth (Kap. 6) werden im Kontext signaltheoretischer Aufgaben zwei Mathematikdiskurse, ein Höherer-Mathematik-Diskurs und ein mathematischer Elektrotechnik-Diskurs, vor ihren jeweiligen institutionellen Hintergründen unterschieden. Praxeologische Analysen auf der Grundlage der ATD identifizieren dabei zentrale Verknüpfungspunkte der Diskurse und damit sowohl potenzielle Hürden in studentischen Aufgabenbearbeitungen als auch fachbezogene Anregungen für die Lehrpraxis.

Alle Beiträge verfolgen beschreibende und analysierende Ziele, konstruktive Aspekte im engeren Sinne nehmen zwei der Beiträge in den Blick. Die theoretischen Einbettungen sind vielfältig. Die verfolgten Erkenntnisinteressen betreffen in erster Linie deskriptive, erklärend-verstehende, normative und nicht zuletzt präskriptive Theorieelemente. So zeichnen die Beiträge mit Blick auf deren Erkenntnisinteressen ein vielfältiges Bild sowohl hinsichtlich der Studiengänge als auch bezüglich der theoretischen, methodischen und empirischen Orientierungen.

Literatur

Artigue, M. (2021). Mathematics education research at University level: Achievements and challenges. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, E. Nardi & C. Winsløw (Hrsg.), *Research and development in university mathematics education. New perspectives on research in mathematics education – ERME series* (S. 3-21). New York: Routledge.

Biehler, R., & Blum, W. (2016). Didaktisch orientierte Rekonstruktion von Mathematik als Basis von Schulmathematik und Lehrerbildung-Editorial. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 1–4.

Blum, W. (1984). Einige Bemerkungen zur Bedeutung von „stoffdidaktischen" Aspekten am Beispiel der Analyse eines Unterrichtsausschnittes in der Arbeit von J. Voigt. Journal für Mathematik-Didaktik, 5(4), 71–76.

Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Hrsg.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (S. 67–83). Dordrecht: Springer.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. [Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland* & *V. Warfield]*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. *Research in Didactique of Mathematics, Selected Papers*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 131–167.

Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Subject-matter didactics in German traditions. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 11–31.

Hochmuth, R. (2020). Service-Courses in University Mathematics Education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. Aufl., S. 770–774). New York: Springer.

Hochmuth, R., & Peters, J. (im Druck). On the analysis of mathematical practices in signal theory courses. *Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed.*

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and structuring mathematical topics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 33–67.

Laborde, C. (2016). A view on subject matter didactics from the left side of the Rhine. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(1), 255–273.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastravidis (Hrsg.), *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematics Education* (S. 115–124). Athens.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102*(1), 9–28.

Prediger, S., et al. (2015). Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung. In R. Bruder (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 643–662). Berlin: Springer.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes – An overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*(6), 877–891.

Reichel, H. C. (1995). Hat die Stoffdidaktik Zukunft. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 27*(6), 178–187.

Schupp, H. (2016). Gedanken zum „Stoff "und zur „Stoffdidaktik "sowie zu ihrer Bedeutung für die Qualität des Mathematikunterrichts. *Mathematische Semesterberichte, 63*(1), 69–92.

SEFI. (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education*. Brussels: European Society for Engineering Education (SEFI).

Sträßer, R., et al. (1996). Stoffdidaktik und Ingénierie didactique – ein Vergleich [‘Stoffdidactic’ and ‘Ingénierie didactique’ a comparison]. In G. Kadunz (Hrsg.), *Trends und Perspektiven* (S. 369–376). Vienna: Hölder-Pichler-Tempsky.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Vinner, S. (1976). The naive concept of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 7*(4), 413–429.

Winsløw, C., Barquero, B., De Vleeschouwer, M., & Hardy, N. (2014). An institutional approach to university mathematics education: From dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education, 16*(2), 95–111.

3

Mathematik im Lehrexport – ein bewährtes Maßnahmenpaket zur Begleitung von Studierenden in der Studieneingangsphase

Jörg Kortemeyer und Anne Frühbis-Krüger

Zusammenfassung

Der Lehrexport, d. h. die Mathematiklehre für Studierende nichtmathematischer Studiengänge, stellt ganz eigene Herausforderungen: jedes Semester vierstellige Studierendenzahlen, Veranstaltungen mit einer Vielzahl verschiedener Studiengänge, Mathematik in der Funktion eines Nebenfachs mit der Bedeutung eines Hauptfachs. All diesen Anforderungen muss sich auch die „Mathematik für Ingenieure" an der Leibniz Universität Hannover stellen und gleichzeitig natürlich auch denen, die jede Anfängerveranstaltung betreffen: so die Veränderungen durch G8, die Verschiebung von Inhalten aus der Schule ins Studium (vgl. Veränderungen in den Kerncurricula), die Studiensozialisation der Erstsemester und nicht zuletzt die wachsende Heterogenität der Gruppe der Studienanfänger durch den Anstieg der MINT-Anfängerzahlen, die Zulassung von Studierenden ohne Abitur (vgl. Projekt an der Leibniz Universität Hannover oder „Techniker2Bachelor" an der TU Clausthal) oder den höheren Anteil Studierender mit ausländischen Bildungsabschlüssen.

Angesichts dieser Vielfalt an Aufgaben und Randbedingungen ist es nicht überraschend, dass eine einzelne Maßnahme nicht ausreicht, um diese Herausforderungen erfolgreich anzugehen, sondern nur das Zusammenspiel eines über die Jahre gut ausbalancierten Portfolios an Einzelmaßnahmen zielführend sein kann (z. B. Vorkurs,

J. Kortemeyer (✉)
Institut für Mathematik, Technische Universität Clausthal, Clausthal-Zellerfeld, Deutschland
E-Mail: joerg.kortemeyer@tu-clausthal.de

A. Frühbis-Krüger
IFM, Carl-von-Ossietzki-Universität Oldenburg, Oldenburg, Deutschland
E-Mail: anne.fruehbis-krueger@uol.de

R. Biehler et al. (Hrsg.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik,*
Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-62854-6_3

frühzeitige Rückmeldungen zum Lernfortschritt, Zusammenarbeit mit Ingenieurfächern). In diesem Artikel möchten wir das durch eine kontinuierliche Evolution über zehn Jahre entstandene, in Hannover unter stetiger Begleitung durch didaktische Forschung eingesetzte Maßnahmenpaket im Detail vorstellen und dabei aufzeigen, wie die Einzelmaßnahmen gerade im Zusammenspiel wirken.

3.1 Die Ausgangslage an der Leibniz Universität Hannover

3.1.1 Die Studierendenkohorte

„Mathematik für Ingenieure" ist die gemeinsame mathematische Grundlagenveranstaltung für Ingenieurstudierende in zwölf verschiedenen Studiengängen an der Leibniz Universität Hannover. Diese Studiengänge werden von fünf verschiedenen Fakultäten getragen, siehe Tab. 3.1. Im Folgenden sind jeweils die einzelnen in der Veranstaltung vertretenen Studiengänge hinter dem Doppelpunkt aufgelistet:

- Fakultät für Maschinenbau: Maschinenbau, Produktion und Logistik, Technical Education Metalltechnik
- Fakultät für Bauingenieurwesen und Geodäsie: Bau- und Umweltingenieurwesen, Geodäsie und Geoinformatik
- Fakultät für Elektrotechnik und Informatik: Elektrotechnik und Informationstechnik, Mechatronik, Energietechnik, Technische Informatik, Technical Education Elektrotechnik
- Fakultät für Wirtschaftswissenschaften: Wirtschaftsingenieur
- Fakultät für Mathematik und Physik: Nanotechnologie

An der zweisemestrigen Veranstaltung nahmen von 2010 bis 2018 jährlich zwischen 1500 und 2000 Studierende teil; in diese Anzahl sind sowohl Erstsemester als auch

Tab. 3.1 Schwankungsbreite der Anfängerzahlen der beteiligten Studiengänge, zusammengefasst nach Fakultäten

Fakultät	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Bauingenieurwesen und Geodäsie	338	295	312	347	409	382
Elektrotechnik und Informatik	349	207	269	329	343	357
Maschinenbau	624	540	599	665	641	303
Wirtschaftswissenschaften	242	221	212	205	226	201
Mathematik und Physik	83	41	83	137	107	192
Summe:	1636	1239	1475	1683	1726	1435

Wiederholer und Hochschulwechsler eingerechnet. Die Veranstaltung ist dabei folgendermaßen gegliedert:

1. Zwei bis drei inhaltsgleiche Vorlesungen mit unterschiedlichen Dozenten, auf welche die Studierenden abhängig von ihrem Studiengang verteilt werden. Im Rahmen der Vorlesungen wird die Theorie eingeführt.
2. Eine Hörsaalübung, die für alle Studiengänge angeboten, von einem wissenschaftlichen Mitarbeiter gehalten und (seit 2012) auf Video aufgezeichnet wird. Die Hörsaalübung verbindet die Theorie mit Aufgabentypen, die dann in den Gruppenübungen näher besprochen werden.
3. Gruppenübungen mit einer eigentlich zu großen Gruppengröße von bis zu 40 (in Ausnahmefällen 50) Studierenden werden zum Training der verschiedenen Aufgabentypen eingesetzt. Es wird von den Studierenden hierzu erwartet, dass sie die Übungsaufgaben als Beispiele für typische Aufgabenformen selbstständig lösen, ihre Ergebnisse in der Gruppe abgleichen und Fragen dort diskutieren. Diese Übungen werden von wissenschaftlichen Mitarbeitern oder Studierenden der Ingenieurwissenschaften gehalten.

Derartige Veranstaltungen sind in vielen Fällen deutlich größer als Veranstaltungen wie „Analysis“ oder „Lineare Algebra“ für Studierende im Hauptfach Mathematik und werden unter anderen Rahmenbedingungen durchgeführt, die im Folgenden näher dargelegt werden:

Trotz teilweise unterschiedlicher benötigter mathematischer Kenntnisse, bezogen auf die ingenieurwissenschaftlichen Anwendungsfächer der einzelnen Studiengänge, hat es sich aus verschiedenen Gründen bewährt, diese Veranstaltung für alle Ingenieurstudiengänge der Leibniz Universität Hannover gemeinsam zu konzipieren und organisieren:

- Die Lehrenden der Ingenieurfächer haben durch die Anzahl grundständiger Studiengänge oft gemischte Studierendenkohorten in ihren Veranstaltungen und können sich durch die gemeinsame Mathematikveranstaltung in der Gestaltung auf eine gemeinsame mathematische Basis aller teilnehmenden Studierenden verlassen.
- Bei einem Studiengangwechsel zwischen Ingenieurstudiengängen, wie er innerhalb des ersten Studienjahrs laut (wiederholt eingeholter und stets gleich lautender) Auskunft der für die Anerkennung von Studienleistungen zuständigen Stellen im Akademischen Prüfungsamt nicht selten vorkommt, haben die Studierenden volle Kontinuität in der Mathematikgrundausbildung und es besteht Rechtssicherheit bzgl. der Gültigkeit der erbrachten Mathematikleistungen.
- Aus organisatorischer Sicht gewinnt die Veranstaltung an Flexibilität in der Reaktion auf die Entwicklung von Studierendenzahlen sowohl in den einzelnen Studiengängen als auch bei der Gesamtzahl der teilnehmenden Studierenden. Von Semester zu Semester ist eine Anpassung der Zuordnung der Studiengänge in die verschiedenen

Vorlesungstranchen möglich. Auch die Übungsgruppeneinteilung und der Prüfungsbetrieb erhalten hier größeren zusätzlichen Spielraum. Studierenden mit unüblichem Studienverlauf wie Wiederholern oder Hochschulwechslern bietet die Zahl an Parallelveranstaltungen die Möglichkeit zur kollisionsfreien Zusammenstellung des eigenen Stundenplans.

3.1.2 Die Lerninhalte der „Mathematik für Ingenieure"

Inhaltlich deckt die „Mathematik für Ingenieure" in Hannover den klassischen Kernstoff der Höheren Mathematik im Bereich der Reinen Mathematik mit Zielgruppe Ingenieurstudierende innerhalb von zwei Semestern ab:

Auf einen etwa siebenwöchigen Abschnitt mit Themen der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra, in dem auch die komplexen Zahlen eingeführt werden und der stofflich bis zu Eigenräumen vordringt, folgt ein Abschnitt mit den Grundlagen der Analysis in einer Veränderlichen. Im Gegensatz zu üblichen Veranstaltungen zur „Analysis 1" mit der Zielgruppe Mathematikstudierende sowie Kandidaten des gymnasialen Lehramts wird das Thema Reihen (seit 2014) nicht direkt im Anschluss an Konvergenz und Folgen behandelt, sondern erst zum Ende des ersten Semesters. Dadurch mündet es nahtlos in die Behandlung von Funktionenfolgen sowie den in den Ingenieurwissenschaften sehr relevanten Taylor- und Fourier-Reihen und hält den Spannungsbogen vom ersten zum zweiten Semester aufrecht. Im Zentrum des zweiten Semesters stehen die Differential- und Integralrechnung in mehreren Veränderlichen bis hin zu den Integralsätzen von Gauß und Stokes aus der Vektoranalysis. Den Abschluss bildet dann die Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe das Skript, abrufbar unter Ebeling 2013, 2014). Themen der Numerischen Mathematik folgen in der eigenen Veranstaltung „Numerische Mathematik für Ingenieure", während Themen der Funktionentheorie nicht behandelt werden (vgl. Studiendekanat für Maschinenbau 2019).

Vorbereitend auf die „Mathematik für Ingenieure" haben alle Studienanfänger in Ingenieurstudiengängen die Möglichkeit, an einem mathematischen Vorkurs teilzunehmen. Während die Fakultät für Elektrotechnik und Informatik ihren eigenen Vorkurs mit einer Gesamtdauer von vier Wochen anbietet (bestehend aus einem freiwilligen sowie einem verpflichtenden Abschnitt, der in einer Klausur abgeprüft wird), wird das Angebot eines zweiwöchigen Vorkurses für alle anderen Studiengänge seit 2013 durch das Team der „Mathematik für Ingenieure" koordiniert. Der letztgenannte Kurs ist dabei bereits sowohl auf mathematische Bedürfnisse der Anfängerveranstaltungen der Ingenieurfächer in den ersten Semesterwochen als auch auf die Inhalte der „Mathematik für Ingenieure" abgestimmt. Er deckt einerseits Inhalte der Sekundarstufe 1 ab, die sich in den Klausuren immer wieder als problematisch erwiesen haben, z. B. Bruchrechnung, Potenzgesetze oder das Aufstellen von Geraden bei zwei bekannten Punkten. Andererseits vertieft der Vorkurs die für die Technische Mechanik und Baumechanik so wichtige Trigonometrie und legt seinen Schwerpunkt auf die Kalküle zum Differenzieren und

Integrieren aus der eindimensionalen Analysis, die erst in der zweiten Semesterhälfte in den Mathematikveranstaltungen erneut thematisiert werden.

3.2 Herausforderungen

Vor dem Hintergrund der gerade skizzierten Ausgangssituation an der Leibniz Universität Hannover werden wir uns in diesem Abschnitt den verschiedenen Herausforderungen widmen, denen sich eine Mathematikveranstaltung im Lehrexport, d. h. in der Lehre für Studierende eines nichtmathematischen Hauptfaches, mit einer vierstelligen Teilnehmerzahl stellen muss.

3.2.1 Individuelle Betreuung der Studierenden

Eine individuell abgestimmte Betreuung von Studierenden bei inhaltlichen und organisatorischen Fragen, aber auch bei allgemeinerem Gesprächsbedarf zu Studium und Studieren ist in einer Massenveranstaltung (wie Vorlesung und Hörsaalübung) für die Lehrenden kaum bis gar nicht möglich. Auch für die Dozenten der Gruppenübungen stellt dies noch eine Herausforderung dar, da dort rein aus Kapazitätsgründen die Gruppenstärke nicht selten bei 40 und mehr liegt. Ein geregelter klassischer Hausübungsbetrieb mit wöchentlicher Abgabe von Lösungen und instruktiver individualisierter Korrektur ist allein organisatorisch kaum zu bewältigen – ganz zu schweigen von der Schwierigkeit der Rekrutierung und Anleitung geeigneten Personals sowie Qualitätssicherung bei der Korrektur. Hinzu kommt das gängige Problem der mangelnden Beschäftigung mit den Aufgaben und des Abschreibens von Lösungen seitens der Studierenden, wie es Liebendörfer & Göller (2016, S. 121) beschrieben haben:

> Insgesamt ergibt sich ein Bild vom Abschreiben als durchaus aus Schule und Hochschule bekanntem Phänomen. Es tritt zusammen mit einer eher negativen Wahrnehmung des Faches und der eigenen Fähigkeiten und Leistungsprobleme auf, u. a. um diese zu überdecken. Als problematisch angesehen werden dabei zum einen moralische Aspekte, zum anderen das Ausbleiben der vorgesehenen Lernhandlung.

Ein vollständiger Ersatz des Hausübungsbetriebs durch den Einsatz einer Lernplattform ist beim heutigen Stand der Technik zwar schon denkbar und wird z. B. an der TU Berlin oder der TU Hamburg-Harburg auch schon praktiziert. Dennoch ist derzeit noch nicht ausreichend geklärt, inwieweit dies einen vollen Ersatz für die individualisierten Rückmeldungen eines Hausübungsbetriebs und das direkte Eingehen von Tutoren auf häufig auftretende Probleme darstellt (vgl. Daniel et al. 2014). Darüber hinaus können sich zusätzliche Schwierigkeiten durch Missverständnisse einer elektronischen Korrektur oder einer nicht exakt passenden Rückmeldung ergeben: Syntaktische Fehler können bei richtigem Inhalt zu gemeldeten Fehlern führen, die Studierende als inhaltliche Fehler verstehen. Ein zu mächtiges Computer-Algebra-System kann Studierenden wichtige Umformungsschritte abnehmen, die eigentlich abgeprüft werden sollen (in der Software STACK vermieden durch die Verwendung von Maxima). Darüber hinaus kann die Rückmeldung eines Systems nicht in einem zweiten Schritt individuell umformuliert werden unter Berücksichtigung der Rezeptionsschwierigkeiten des Nutzers, wie es für einen Übungsleiter selbstverständlich ist.

3.2.2 Einordnung der Mathematik im Ingenieurstudium

Eine weitere Herausforderung stellt die Einordnung der Mathematik in das Ingenieurstudium dar. Neben der curricularen Verankerung und der inhaltlichen Abstimmung mit den erwähnten technischen Fächern hat dies vor allem auch einen motivationalen und volitionalen Aspekt. Eine Mathematikveranstaltung ist für Studierende in den Ingenieurwissenschaften einerseits nicht der Grund für die Wahl ihres Studiengangs. Andererseits müssen sie jedoch im ersten Studienjahr dafür ähnlich viel Zeit und Energie aufwenden wie für ein Hauptfach, um mittelfristig in den während der Vorlesungszeit parallel durchgeführten Mathematikveranstaltungen sowie in den ingenieurwissenschaftlichen Veranstaltungen erfolgreich sein zu können. Viele Studierende sind sich der entscheidenden Bedeutung mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten für ihr zukünftiges Studienfach und ihr Berufsziel im Vorhinein oder nach kurzer Zeit im Studium bewusst (vgl. Kortemeyer und Biehler 2012). Dennoch stellen diese unterschiedlichen Aspekte eine Herausforderung für die Studierenden bzgl. ihres Lern- und Arbeitsverhaltens dar. Auch für die Lehrenden entsteht so eine inhaltliche und didaktische Herausforderung bei der Stoffauswahl, der Art der Präsentation und der Gestaltung der Schnittstelle zu den Ingenieurfächern, die gerade im speziellen Setting an der Leibniz Universität Hannover mit dieser Vielzahl an Studiengängen etlichen Randbedingungen genügen muss. Asynchronizitäten, d. h. Unterschiede in der zeitlichen Abfolge zwischen Behandlung eines mathematischen Themas in der Mathematikvorlesung und Verwendung der mathematischen Inhalte in den technischen Fächern, sind dabei unvermeidlich, wie sich leicht erschließen lässt, wenn man nur die Kombinationen ansieht (vgl. Tab. 3.2), in denen Technische Mechanik und Elektrotechnik von Studierenden verschiedener Studiengänge besucht werden, wodurch wiederum klar wird, wie entscheidend die Vernetzung mit diesen Fächern ist:

Hinzu kommen für andere Studiengänge noch Veranstaltungen wie Baumechanik oder Grundlagenveranstaltungen der Geodäsie und Geoinformatik, aber auch mathematisch anspruchsvolle Nebenfächer beispielsweise aus der Physik, die ähnlich wie die Mathematik in ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen als Fach im Lehrexport auftritt.

Dabei können die bereits genannten Asynchronizitäten in beide Richtungen auftreten: Während bestimmte Themengebiete für eine technische Veranstaltung nicht