

Walter Tinsson

Plans d'expérience: constructions et analyses statistiques



MATHÉMATIQUES
&
APPLICATIONS

Directeurs de la collection :
G. Allaire et J. Garnier

67

MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS

Comité de Lecture 2008–2011/Editorial Board 2008–2011

RÉMI ABGRALL
INRIA et Mathématiques, Univ. Bordeaux 1, FR
abgrall@math.u-bordeaux.fr

GRÉGOIRE ALLAIRE
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR
gregoire.allaire@polytechnique.edu

MICHEL BENAÏM
Mathématiques, Univ. de Neuchâtel, CH
michel.benaïm@unine.ch

OLIVIER CATONI
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 6, FR
catoni@ccr.jussieu.fr

THIERRY COLIN
Mathématiques, Univ. Bordeaux 1, FR
colin@math.u-bordeaux1.fr

MARIE-CHRISTINE COSTA
UMA, ENSTA, Paris, FR
marie-christine.costa@ensta.fr

ARNAUD DEBUSSCHE
ENS Cachan, Antenne de Bretagne
Avenue Robert Schumann,
35170 Bruz, FR
arnaud.debussche@bretagne.ens-cachan.fr

JACQUES DEMONGEOT
TIMC, IMAG, Univ. Grenoble I, FR
jacques.demongeot@imag.fr

NICOLE EL KAROUI
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR
elkaroui@cmapp.polytechnique.fr

JOSSELIN GARNIER
Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 6 et 7, FR
garnier@math.jussieu.fr

STÉPHANE GAUBERT
INRIA, Saclay, Îles-de-France, Orsay et
CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR
stephane.gaubert@inria.fr

CLAUDE LE BRIS
CERMICS, ENPC et INRIA
Marne la Vallée, FR
lebris@cermics.enpc.fr

CLAUDE LOBRY
INRA, INRIA, Sophia-Antipolis et
Analyse Systèmes et Biométrie
Montpellier, FR
lobrinria@wanadoo.fr

LAURENT MICLO
Analyse, Topologie et Proba., Univ. Provence, FR
miclo@cmi.univ-mrs.fr

FELIX OTTO
Institute for Applied Mathematics
University of Bonn, DE
otto@iam.uni-bonn.de

VALÉRIE PERRIER
Mod. et Calcul, ENSIMAG, Grenoble, FR
valerie.perrier@imag.fr

BERNARD PRUM
Statist. et Génome, CNRS, INRA, Univ. Evry, FR
bernard.prum@genopole.cnrs.fr

PHILIPPE ROBERT
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, FR
philippe.robert@inria.fr

PIERRE ROUCHON
Automatique et Systèmes, École Mines, Paris, FR
pierre.rouchon@ensmp.fr

ANNICK SARTENAER
Mathématiques, Univ. Namur, BE
annick.sartenaer@fundp.ac.be

ERIC SONNENDRÜCKER
IRMA, Strasbourg, FR
sonnen@math.u-strasbg.fr

SYLVAIN SORIN
Combinat. et Optimisation, Univ. Paris 6, FR
sorin@math.jussieu.fr

ALAIN TROUVÉ
CMLA, ENS Cachan, FR
trouve@cmla.ens-cachan.fr

CÉDRIC VILLANI
UMPA, ENS Lyon, FR
cedric.villani@umpa.ens-lyon.fr

ENRIQUE ZUAZUA
Basque Center for Applied
Mathematics, Bilbao, Basque, ES
enrique.zuazua@uam.es

Directeurs de la collection :
G. ALLAIRE et J. GARNIER

Instructions aux auteurs :

Les textes ou projets peuvent être soumis directement à l'un des membres du comité de lecture avec copie à G. ALLAIRE ou J. GARNIER. Les manuscrits devront être remis à l'Éditeur sous format \LaTeX 2 ϵ (cf. <ftp://ftp.springer.de/pub/tex/latex/svmonot1/>).

Walter Tinsson

Plans d'expérience:
constructions et analyses
statistiques

 Springer

Walter Tinsson
Université de Pau et des Pays de l'Adour
Laboratoire de Mathématiques et leurs Applications
UMR CNRS 5142 - Bâtiment IPRA
Avenue de l'Université
BP 1155
64013 Pau Cedex, France
walter.tinsson@univ-pau.fr

ISSN 1154-483X
ISBN 978-3-642-11471-7 e-ISBN 978-3-642-11472-4
DOI 10.1007/978-3-642-11472-4
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Library of Congress Control Number: 2010922453

Mathematics Subject Classification (2000): 62K, 62J, 05B05, 05B15, 05B20

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.

Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Maquette de couverture: SPi Publisher Services

Imprimé sur papier non acide

Springer est membre du groupe Springer Science+BusinessMedia (www.springer.com)

Table des matières

Partie I Généralités

1	La notion de plan d'expérience	3
1.1	Introduction	3
1.2	La démarche de planification expérimentale	4
1.2.1	Objectifs	4
1.2.2	Réponse	4
1.2.3	Facteurs	5
1.2.4	Domaine expérimental	6
1.2.5	Réalisation des expériences	7
1.3	Historique	14
1.4	Guide de lecture de l'ouvrage	15
1.4.1	Positionnement	15
1.4.2	Structure	16
1.4.3	Analyse des exemples	19
1.5	Thèmes non abordés dans l'ouvrage	20
1.5.1	Plans pour modèles mixtes	21
1.5.2	Plans pour modèles non linéaires	21
1.5.3	Plans à effets de voisinage	22
1.5.4	Plans d'expérience numériques	23
1.6	Logiciels pour les plans d'expérience	23
1.7	Présentation d'une étude	24
1.7.1	Facteurs et réponse	25
1.7.2	Domaine expérimental	25
1.7.3	Codage des facteurs	26
1.7.4	Plan d'expérience utilisé	26
1.7.5	Ajustement d'un modèle d'ordre un	28
1.7.6	Ajustement d'un modèle à effets d'interactions	30
1.7.7	Ajustement d'un modèle d'ordre deux	32
1.7.8	Recherche des conditions optimales	35
1.7.9	Conclusion	36

2	Outils mathématiques pour les plans d'expérience	39
2.1	Introduction	39
2.2	Algèbre	40
2.2.1	Calcul matriciel	40
2.2.2	Projection orthogonale	41
2.2.3	Analyse spectrale	41
2.2.4	Matrices particulières	42
2.2.5	Notion de groupe	43
2.3	Probabilités	43
2.3.1	Variables aléatoires réelles	43
2.3.2	Vecteurs aléatoires	44
2.4	Statistiques	45
2.4.1	Notion d'estimateur	45
2.4.2	Modèle statistique	46
2.4.3	Modélisation linéaire	47
2.4.4	Estimation au sens des moindres carrés	49
2.4.5	Prédiction de la réponse moyenne	50
2.5	Analyse de la variance	51
2.5.1	Décomposition fondamentale	51
2.5.2	Coefficient de corrélation linéaire multiple	53
2.5.3	Estimation de σ^2	54
2.5.4	Décomposition plus fine de SSE	55
2.6	Tests d'hypothèses	58
2.6.1	Exemple introductif	58
2.6.2	Cas général	59
2.6.3	Test de validité du modèle	60
2.6.4	Test de significativité des paramètres	61
2.6.5	Test d'ajustement du modèle	62
2.6.6	Exemples	63
2.7	(Compléments) Démonstrations	69

Partie II Plans d'expérience pour facteurs quantitatifs

3	Plans d'expérience pour modèles d'ordre un	77
3.1	Introduction	77
3.2	Généralités	78
3.2.1	Variables codées	78
3.2.2	Modèle utilisé	79
3.2.3	Moments d'un plan d'expérience	79
3.2.4	Plans d'expérience usuels	80
3.3	Plans factoriels complets	82
3.3.1	Définition	82

3.3.2	Propriétés	84
3.3.3	Intérêt des réplifications centrales	85
3.4	Fractions régulières de plans factoriels	86
3.4.1	Exemple	86
3.4.2	Contrastes et produit d'Hadamard	87
3.4.3	Générateurs d'une fraction régulière	89
3.4.4	Fractions régulières de résolution III	92
3.4.5	Taille des plans factoriels	93
3.5	Plans simplexes	94
3.5.1	Définition	94
3.5.2	Propriétés	96
3.6	Plans de Plackett et Burman	97
3.6.1	Définition	97
3.6.2	Propriétés	99
3.7	Exemple d'application	99
3.8	Résumé	106
3.9	(Compléments) Démonstrations	109
4	Plans d'expérience pour modèles à effets d'interactions	115
4.1	Introduction	115
4.2	Généralités	116
4.2.1	Modèle utilisé	116
4.2.2	Plans d'expérience usuels	117
4.3	Plans factoriels complets	118
4.4	Fractions régulières de plans factoriels	120
4.4.1	Fractions régulières de résolution V	120
4.4.2	Taille des plans factoriels	121
4.5	Généralisation à des interactions quelconques	122
4.5.1	Modèle à effets d'interactions d'ordre 3	122
4.5.2	Modèle contenant tous les effets d'interactions	125
4.5.3	Application aux fractions de résolution III	127
4.6	Utilisation de modèles incomplets	129
4.7	Exemple d'application	133
4.8	Résumé	143
4.9	(Compléments) Démonstrations	147
5	Plans d'expérience pour surfaces de réponse	151
5.1	Introduction	151
5.2	Généralités	152
5.2.1	Modèle utilisé	152
5.2.2	Plans d'expérience usuels	153
5.2.3	Inversion de la matrice des moments d'un plan usuel	154
5.2.4	Estimations et prédictions	155
5.2.5	Isovariance par transformations orthogonales	156
5.2.6	Graphes des variances extrêmes	158

5.3	Plans composites centrés	161
5.3.1	Définition	161
5.3.2	Propriétés	162
5.3.3	Intérêt des réplifications centrales	166
5.3.4	Plans composites centrés de petite taille	168
5.3.5	Taille des plans composites centrés	169
5.4	Plans de Box et Behnken	170
5.4.1	Définition	170
5.4.2	Propriétés	172
5.5	Plans simplexes augmentés	173
5.5.1	Définition	173
5.5.2	Propriétés	175
5.6	Plans hybrides	176
5.6.1	Définition	176
5.6.2	Propriétés	178
5.7	Exemple d'application	180
5.8	Résumé	188
5.9	(Compléments) Résultats théoriques	193
5.9.1	Quelques résultats de calcul matriciel	193
5.10	(Compléments) Démonstrations	194
6	Plans d'expérience en blocs	203
6.1	Introduction	203
6.2	Généralités	204
6.2.1	Modèle utilisé	204
6.2.2	Plans d'expérience usuels	206
6.2.3	Inversion de la matrice des moments généralisée	208
6.2.4	Estimations et prédictions	208
6.2.5	Comparaison des effets de blocs	211
6.3	Plans bloqués orthogonalement	212
6.3.1	Définition	212
6.3.2	Reconstruction de l'information	213
6.3.3	Isovariance par transformations orthogonales	214
6.3.4	Une méthode universelle de blocage orthogonal	216
6.4	Exemples de constructions	217
6.4.1	Plans composites centrés	217
6.4.2	Plans de Box et Benkhen	221
6.4.3	Plans hybrides	223
6.5	Exemple d'application	224
6.6	Résumé	232
6.7	(Compléments) Démonstrations	239

7	Plans d'expérience pour mélanges	249
7.1	Introduction	249
7.2	Généralités	250
7.2.1	Hypothèses fondamentales	250
7.2.2	Représentation graphique d'un mélange	250
7.2.3	Notation standard des réponses	253
7.3	Modèles pour mélanges	254
7.3.1	Modèle d'ordre un	254
7.3.2	Modèle d'ordre deux	255
7.3.3	Modèle d'ordre trois complet	257
7.3.4	Modèle synergique d'ordre trois	258
7.3.5	Modèle synergique d'ordre quelconque	260
7.3.6	Résumé	261
7.3.7	Analyse de la variance	262
7.4	Réseaux de Scheffé	263
7.4.1	Définition	263
7.4.2	Ajustement de divers modèles	264
7.5	Réseaux de Scheffé centrés	267
7.5.1	Définition	267
7.5.2	Ajustement d'un modèle synergique	269
7.6	Autres plans pour mélanges	270
7.6.1	Réseaux de Scheffé déséquilibrés	270
7.6.2	Autres types de plans d'expérience	271
7.7	Introduction d'effets de blocs	272
7.7.1	Modèle à effets de blocs	272
7.7.2	Singularité liée au modèle	273
7.7.3	Plans bloqués orthogonalement	274
7.7.4	Estimation des effets de blocs	275
7.8	Exemple d'application	276
7.9	Résumé	284
7.10	(Compléments) Résultats théoriques	287
7.10.1	Ajustement d'un modèle synergique	287
7.11	(Compléments) Démonstrations	289

Partie III Plans d'expérience pour facteurs qualitatifs

8	Plans d'expérience pour facteurs qualitatifs	303
8.1	Introduction	303
8.2	Généralités	304
8.2.1	Codage des facteurs qualitatifs	304
8.2.2	Notation standard des réponses	305
8.2.3	Matrice d'incidence	306
8.2.4	Modèle additif	308
8.2.5	Contraintes d'identification	309

8.2.6	Application au modèle additif	310
8.2.7	Plan d'expérience orthogonal	311
8.2.8	Propriétés des plans orthogonaux	312
8.2.9	Analyse de la variance	313
8.3	Plans factoriels complets	314
8.3.1	Définition	314
8.3.2	Propriétés	315
8.4	Fractions régulières de plans factoriels	316
8.4.1	Cas particulier des facteurs à deux modalités	317
8.4.2	Cas général	319
8.4.3	Générateurs d'une fraction régulière	321
8.4.4	Fractions régulières de résolution III	323
8.5	Autres types de plans fractionnaires	324
8.5.1	Existence de plans orthogonaux de petite taille	324
8.5.2	Fractions pour nombre de modalités non premier	326
8.5.3	Fractions asymétriques	328
8.6	Plans en carrés latins	330
8.6.1	Utilisation de carrés latins	330
8.6.2	Utilisation de carrés gréco-latins	332
8.6.3	Utilisation de carrés hyper-gréco-latins	335
8.7	Autres types de plans d'expérience	336
8.7.1	Tables de Taguchi	336
8.7.2	Transformations conservant l'orthogonalité	337
8.7.3	Plans produit	339
8.7.4	Tableaux orthogonaux	340
8.7.5	Plans obtenus numériquement	341
8.8	Introduction d'effets d'interaction	342
8.9	Exemple d'application	345
8.10	Résumé	351
8.11	(Compléments) Démonstrations	355
9	Plans d'expérience en blocs pour facteurs qualitatifs	363
9.1	Introduction	363
9.2	Généralités	364
9.2.1	Modèle pour plans en blocs	364
9.2.2	Matrices et valeurs remarquables	365
9.2.3	Contraintes d'identification	367
9.2.4	Equations normales	367
9.3	Plans en blocs complets	371
9.3.1	Définition et propriétés	371
9.3.2	Estimation des divers effets	372
9.4	Plans en blocs incomplets équilibrés	374
9.4.1	Définition et propriétés	374
9.4.2	Estimation des divers effets	376
9.4.3	Construction des BIBD	378

9.5	Plans en blocs partiellement équilibrés	380
9.5.1	Définition et propriétés	380
9.5.2	Estimation des divers effets	382
9.5.3	Construction des GDD	385
9.5.4	Généralisations	386
9.6	Plans cycliques	388
9.6.1	Définition	388
9.6.2	Propriétés	389
9.7	Exemple d'application	390
9.8	Résumé	394
9.9	(Compléments) Résultats théoriques	399
9.9.1	Analyse d'un plan cyclique	399
9.10	(Compléments) Démonstrations	402

Partie IV Optimalité des plans d'expérience

10	Critères d'optimalité	417
10.1	Introduction	417
10.2	Rappels et compléments	418
10.2.1	Ensembles ordonnés	418
10.2.2	Ordres sur les vecteurs	418
10.2.3	Matrice d'information	421
10.2.4	Complément d'analyse spectrale	426
10.3	Optimalité uniforme	427
10.3.1	Exemple introductif	427
10.3.2	Extension au cas vectoriel	428
10.3.3	Propriétés	429
10.3.4	Généralisation	431
10.4	Critères d'efficacité	433
10.4.1	Généralités et hypothèses	433
10.4.2	Le critère de A-efficacité	434
10.4.3	Le critère de D-efficacité	435
10.4.4	Le critère de E-efficacité	436
10.4.5	Le critère général de Φ_q -efficacité	437
10.4.6	Propriétés	438
10.4.7	Caractérisation des plans d'expérience Φ_q -optimaux	440
10.4.8	Plans Φ_q -optimaux obtenus numériquement	443
10.5	Optimalité universelle	445
10.5.1	Définition	445
10.5.2	Propriétés	447
10.6	Exemples d'applications	448
10.6.1	Plans optimaux pour modèles d'ordre un	449
10.6.2	Plans optimaux pour modèles avec interactions	450
10.6.3	Plans optimaux pour surfaces de réponse	451

10.6.4	Plans optimaux pour modèles à effets de blocs	456
10.6.5	Plans optimaux pour modèles à facteurs qualitatifs	457
10.7	Résumé	460
10.8	(Compléments) Démonstrations	465

Partie V Annexes

A	Plans factoriels et représentation linéaire des groupes	485
A.1	Représentation linéaire des groupes finis	485
A.2	Application aux plans à deux niveaux	488
A.2.1	Cas des plans factoriels complets	488
A.2.2	Cas des fractions régulières	492
A.3	Généralisation	495
A.3.1	Cas des plans factoriels complets	496
A.3.2	Cas des fractions régulières	500
B	Plans d'expérience classiques	507
B.1	Plans factoriels complets	507
B.2	Fractions régulières de plans complets	508
B.3	Plans simplexes	508
B.4	Plans de Plackett et Burman	509
B.5	Plans composites centrés	509
B.6	Plans de Box et Behnken	510
B.7	Plans simplexes augmentés	510
B.8	Plans hybrides	511
B.9	Réseaux de Scheffé	512
B.10	Réseaux de Scheffé centrés	512
B.11	Plans factoriels complets pour facteurs qualitatifs	513
B.12	Fractions régulières de plans complets pour facteurs qualitatifs	513
B.13	Plans en carrés latins	514
B.14	Tables de Taguchi	515
B.15	Plans en blocs complets	516
B.16	Plans en blocs incomplets équilibrés	516
B.17	Plans en blocs partiellement équilibrés	516
C	Notations utilisées	519
	Bibliographie	523
	Index	531

Préface

Les plans d'expérience sont de plus en plus utilisés dans l'industrie et dans les laboratoires de recherche. Ils permettent en effet de modéliser au mieux un phénomène aléatoire, le plus souvent complexe, à l'aide d'un minimum d'essais. Ils s'incrivent donc dans la démarche constante d'amélioration de la qualité ou de la productivité.

Cet ouvrage a pour but de présenter les bases théoriques de la méthode des plans d'expérience. Il se positionne entre les ouvrages pratiques pour ingénieurs (très riches en exemples mais masquant le plus souvent la théorie) et les ouvrages pour mathématiciens (de lecture parfois trop ardue pour les non-spécialistes). Il est structuré autour d'une vision globale des techniques de planification en abordant les grands thèmes suivants :

- plans d'expérience pour facteurs quantitatifs,
- plans d'expérience pour facteurs qualitatifs,
- plans d'expérience en blocs,
- plans d'expérience pour mélanges,
- plans d'expérience optimaux.

Ces diverses techniques sont illustrées à l'aide d'une multitude d'exemples pratiques. La plupart des résultats mathématiques sont aussi démontrés dans des annexes, ceci permet au lecteur d'avoir divers niveaux de lecture de l'ouvrage.

Il s'adresse à un public varié : étudiants de second cycle universitaire ou d'école d'ingénieurs, chercheurs souhaitant approfondir certaines connaissances théoriques sur les plans d'expérience, ingénieurs voulant mieux maîtriser et comprendre les fondements de la planification des expériences ou encore étudiants de cycles techniques scientifiques de type BTS, IUT ou licences professionnelles (en omettant dans ce cas les annexes théoriques).

Ce livre a été initialement développé sur la base de notes de cours rédigées pour un enseignement en Master 2ème année MSID (Méthodes Stochastiques)

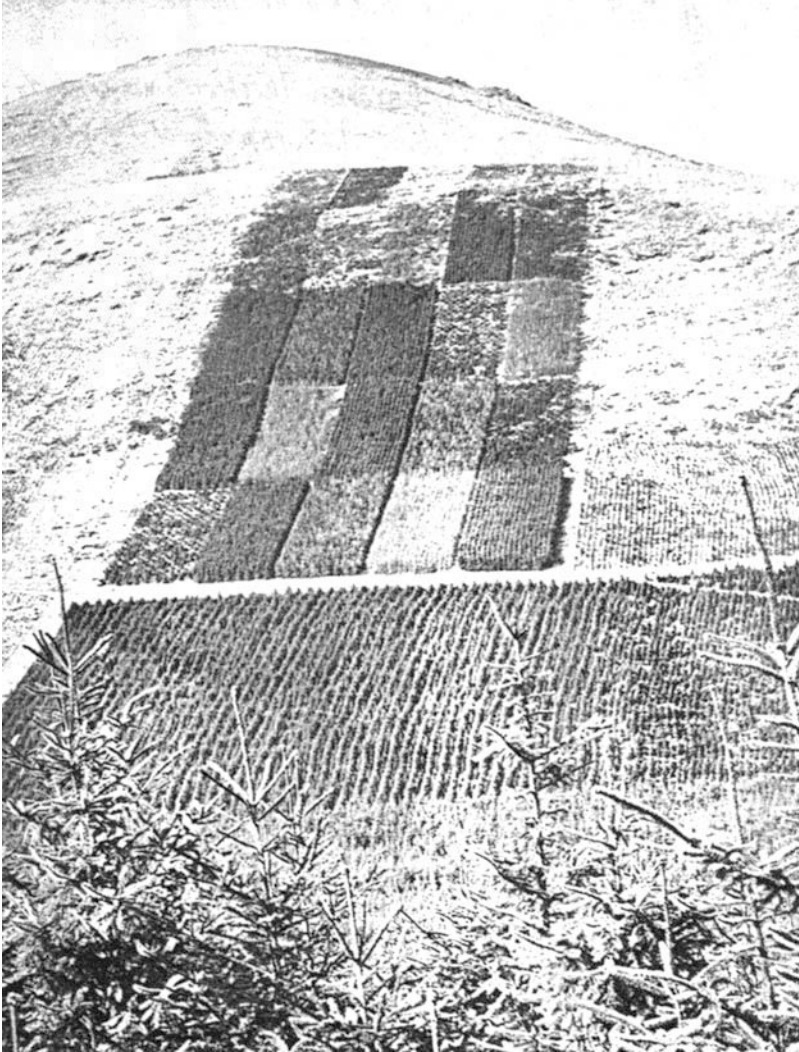
et Informatiques pour la Décision) de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour ainsi que pour un enseignement à l'école ingénieurs ENSGTI basée aussi à Pau.

Je tiens enfin à remercier tout particulièrement mes collègues Bénédicte Puig, Astrid Jourdan et Christian Paroissin pour leur lecture minutieuse des premières versions du manuscrit.

Que soit aussi remerciée mon épouse, Natacha, pour ses encouragements et sa patience.

PAU, Octobre 2009

Walter TINSSON



Exemple de culture de diverses essences d'arbres en milieu montagnard selon un carré latin 5×5 (Beddgelert Forest en 1929).

Source :

J.F. Box, R.A. Fisher: The Life of a Scientist, New York: Wiley 1978.

Partie I

Généralités

La notion de plan d'expérience

1.1 Introduction

Ce premier chapitre aborde la notion générale de planification expérimentale en utilisant peu de notions mathématiques. Il est principalement destiné aux lecteurs novices ayant besoin, dans un premier temps, de bien cerner la problématique et les objectifs de cette méthode.

Le chapitre débute par une présentation très générale de la démarche de planification expérimentale ainsi que du vocabulaire de base (facteurs, réponse, domaine expérimental, *etc...*). Les principaux écueils à éviter en pratique (réaliser trop d'expériences, méthode "un facteur à la fois", réalisation des expériences sans stratégie fiable, *etc...*) sont présentés. Cette première partie est suivie par un bref historique des plans d'expérience. La structure de l'ouvrage est ensuite présentée en précisant clairement quels sont les sujets abordés et ceux qui ne le sont pas. Une présentation des logiciels scientifiques pouvant être utilisés dans le cadre des plans d'expérience (SAS, Nemrod, R, *etc...*) figure aussi afin de faciliter le choix du lecteur souhaitant réaliser de tels traitements informatiques.

Un exemple d'étude classique menée à l'aide d'un plan d'expérience est proposé pour terminer le chapitre. Cette étude, réalisée à l'aide du logiciel Nemrod, permet au lecteur d'avoir une première idée des techniques utilisées lors de la mise en oeuvre pratique d'un plan d'expérience. Des références sont de plus données tout au long de cet exemple afin de pouvoir se reporter aux divers chapitres correspondants.

Le lecteur souhaitant une introduction plus orientée vers les aspects industriels de la méthode des plans d'expérience pourra consulter aussi les premiers chapitres des ouvrages de Goupy [45] ou [46], de Pillet [72] ainsi que Sado et Sado [82].

1.2 La démarche de planification expérimentale

1.2.1 Objectifs

A l'époque actuelle bon nombre de procédés de fabrication ou d'expériences en laboratoire deviennent de plus en plus complexes car ils dépendent d'un grand nombre de variables difficiles à régler intuitivement. Ceci concerne, par exemple :

le problème de la mise au point de moteurs atmosphériques dépendant d'un nombre croissant de réglages électroniques,

le pilotage optimal de machines-outil,

la détermination des proportions d'un mélange chimique,

la recherche des conditions environnementales optimales pour la production agricole, *etc...*

Seule la réalisation d'expériences va permettre d'appréhender et de modéliser de tels phénomènes complexes. Si ces expériences sont effectuées sans une méthodologie rigoureuse il est fort probable qu'elles vont soit conduire à des impasses (modèle impossible à ajuster, résultats incohérents, *etc...*) soit à des résultats de qualité décevante. C'est pourquoi la **méthode des plans d'expérience** est préconisée afin d'optimiser ce type de démarche. L'objectif principal de cette méthode peut être résumé par la devise :

**"obtenir un maximum d'information
en un minimum d'expériences"**

Une autre vision du problème est la recherche de variations simultanées pour toutes les variables contrôlées afin, une nouvelle fois, d'extraire un maximum d'information en un minimum d'essais. Une telle problématique est primordiale dans le milieu industriel où minimiser le nombre d'expériences à réaliser est synonyme de gain de temps et de productivité. Réaliser des productions de la meilleure qualité possible au coût le plus bas est de plus une quête universelle pour tous les fabricants.

1.2.2 Réponse

On qualifie de **réponse** la grandeur qui est observée pour chaque expérience réalisée. On supposera toujours ici que cette grandeur est numérique et qu'une seule réponse à la fois est observée (des techniques de planification multiréponses existent aussi voir, par exemple, le chapitre 7 de Khuri et Cornell [56]). Il appartient aux spécialistes du phénomène étudié de cerner au mieux ce qui les intéresse et de fournir le type de réponse étudié ainsi que l'objectif souhaité vis-à-vis de celle-ci. Cet objectif est dans la plupart des cas une recherche d'extremum.

Citons quelques exemples. Pour l'étude de l'acidité d'un jus de fruit il est possible de mesurer son pH afin de quantifier ce problème. L'objectif souhaité est alors la minimisation de la réponse. Pour le cas d'une production agricole la réponse est, par exemple, le rendement à l'hectare et l'objectif est de maximiser cette réponse.

1.2.3 Facteurs

On qualifie de **facteur** toute variable, obligatoirement **contrôlable**, susceptible d'influer sur la réponse observée. La différence fondamentale entre la notion classique de variable et celle de facteur tient donc dans le fait que tout facteur doit pouvoir être modifié sans difficulté. Cette hypothèse est obligatoire pour les plans d'expérience puisque nous allons par la suite proposer une liste des expériences à réaliser. Il est donc impératif que l'expérimentateur puisse s'y tenir en adaptant les facteurs aux diverses valeurs données. A titre d'exemple lorsqu'une réaction chimique dépend de la pression ambiante, il s'agit alors d'un facteur si l'expérience est menée dans un local où la pression peut être modifiée ou bien d'une variable si le local n'est pas équipé d'un tel dispositif (la pression est alors la pression atmosphérique que l'on peut mesurer mais qu'il est impossible de faire varier).

Remarquons que les facteurs peuvent être **quantitatifs** lorsqu'ils sont naturellement exprimés à l'aide de valeurs numériques (pression, température, durée, *etc...*) ou bien **qualitatifs** dans le cas contraire (couleur, type de matériau, sexe, *etc...*). Il est classique de transformer des facteurs qualitatifs en facteurs quantitatifs à l'aide d'un codage approprié (par exemple en affectant la valeur 0 pour "Homme" et la valeur 1 pour "Femme" dans le cas du sexe), tout ceci sera détaillé dans la suite.

Lorsqu'un facteur varie on dit qu'il change de **niveau**. La connaissance de l'ensemble de tous les niveaux utilisés par chaque facteur est nécessaire pour la réalisation des expériences. Supposons que le facteur quantitatif "température" peut prendre les valeurs suivantes :

Température	20°C	30°C	40°C	50°C
-------------	------	------	------	------

Ce facteur est alors à 4 niveaux. On qualifie souvent de **niveau bas** la température minimale de 20°C et de **niveau haut** la température maximale de 50°C. Considérons cette fois le facteur qualitatif "couleur" ayant les modalités suivantes :

Couleur	<i>bleu</i>	<i>vert</i>	<i>rouge</i>
---------	-------------	-------------	--------------

Ce facteur est à 3 niveaux. Dans ce cas on ne parlera pas de niveau bas et de niveau haut puisqu'il est impossible d'ordonner naturellement ces diverses modalités.

1.2.4 Domaine expérimental

Considérons un ensemble de m facteurs quantitatifs utilisés afin d'expliquer au mieux un phénomène complexe. Le i -ème facteur (pour $1 \leq i \leq m$) est alors le plus souvent à valeurs dans un intervalle de la forme $[a_i, b_i]$ où a_i et b_i sont respectivement ses niveaux bas et haut. En pratique cet intervalle est simplement la plage de variations autorisée pour le facteur. Il appartient aux spécialistes du phénomène étudié de fournir ces informations préalables. Cela peut être, par exemple, une vitesse de rotation comprise dans l'intervalle $[500, 800]$ (en tours/minute) d'après les caractéristiques d'une machine-outil ou bien une quantité de fertilisant comprise dans l'intervalle $[10, 90]$ (en mg/unité de surface) d'après l'expertise des ingénieurs agronomes. Remarquons que, d'après ce qui vient d'être vu dans la section précédente, les niveaux sélectionnés pour le facteur i doivent alors obligatoirement être des éléments de l'intervalle $[a_i, b_i]$.

Puisque m facteurs sont considérés une **expérience** est donc entièrement définie par la donnée d'un vecteur de \mathbb{R}^m contenant tous les niveaux des différents facteurs. On appelle **domaine expérimental** tout sous-ensemble de \mathbb{R}^m (noté \mathcal{E} par la suite) dans lequel il est possible de réaliser les expériences. Une méthode élémentaire afin d'obtenir un tel domaine consiste simplement à croiser les diverses plages de variations. On obtient par produit cartésien :

$$\mathcal{E} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m].$$

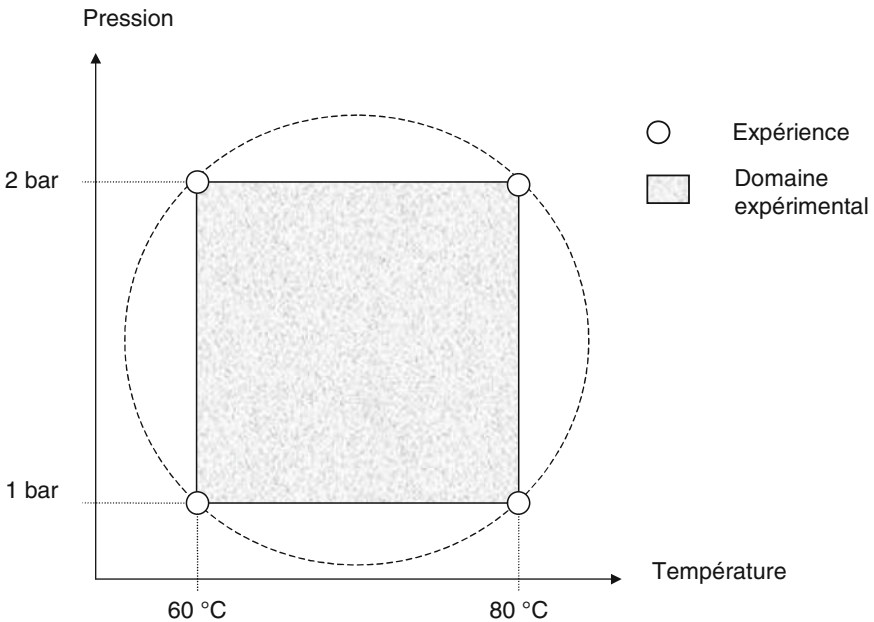


Fig. 1.1. Plan d'expérience et domaine expérimental.

La figure 1.1 est un exemple lorsque les $m = 2$ facteurs "température" et "pression" sont considérés. Le domaine expérimental obtenu par cette méthode est alors le rectangle grisé. Toute expérience est donc naturellement associée à un point de ce rectangle. Si seulement 4 expériences sont réalisées un choix optimal consiste à placer ces expériences aux sommets de ce rectangle. L'ensemble des expériences proposées constitue un **plan d'expérience** (appelé plan factoriel complet ici).

On considèrera souvent par la suite des domaines expérimentaux sphériques car ils permettent d'obtenir des propriétés mathématiques plus faciles à manier. Dans le cadre de cet exemple le domaine considéré peut être, par exemple, limité par le cercle représenté en pointillés (sous réserve, bien entendu, qu'il soit réellement possible de mener des expériences dans tout ce nouveau domaine).

Remarquons enfin que lorsque les différents facteurs sont qualitatifs la notion de domaine expérimental est cette fois plus simple puisqu'on peut alors l'obtenir en croisant les ensembles des diverses modalités possibles pour chacun des facteurs (une représentation graphique a donc moins d'intérêt dans ce cas).

1.2.5 Réalisation des expériences

Présentons ici sous forme d'un exemple la problématique de la réalisation des expériences. Considérons une entreprise produisant une colle industrielle qui a la fâcheuse tendance de se solidifier durant le processus de fabrication. Afin de s'opposer à cette tendance trois additifs sont introduits durant le procédé industriel et les débits injectés sont contrôlables à l'aide de trois vannes prenant les niveaux suivants :

Faible / Moyen / Fort.

Utilisons dans la suite les codages 0, 1 et 2 afin de désigner plus facilement ces trois niveaux respectifs. La réponse mesurée en sortie est ici une mesure de la fluidité du produit mis au point. L'objectif est de maximiser cette quantité. Supposons maintenant que cette fluidité obéit au modèle mathématique additif donné ci-dessous (où Y désigne la réponse observée et i_1, i_2, i_3 sont les niveaux des trois facteurs c'est-à-dire les positions des diverses vannes) :

$$Y = Y(i_1, i_2, i_3) = \beta_0 + \beta_1^{[i_1]} + \beta_2^{[i_2]} + \beta_3^{[i_3]} + \beta_{12}^{[i_1 i_2]}$$

avec les différents effets tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = +120, \\ \beta_1^{[0]} = 0, \quad \beta_1^{[1]} = +10, \quad \beta_1^{[2]} = -20, \\ \beta_2^{[0]} = 0, \quad \beta_2^{[1]} = -20, \quad \beta_2^{[2]} = +10, \\ \beta_3^{[0]} = 0, \quad \beta_3^{[1]} = -10, \quad \beta_3^{[2]} = -30, \\ \beta_{12}^{[22]} = +60, \beta_{12}^{[i_1 i_2]} = 0 \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Le fait de ramener systématiquement les divers niveaux bas à 0 est une technique classique avec ce type de modèle où lorsqu'un facteur est à h modalités il suffit alors d'en estimer les $(h - 1)$ effets (voir le chapitre 8 pour plus de détails). En d'autres termes on suppose donc ici à l'aide du modèle postulé que :

i) il existe un "effet moyen général" d'une valeur de 120 (traduisant le fait que si tous les débits sont au niveau faible alors la fluidité est de 120),

ii) les trois facteurs présentent divers "effets simples" influençant directement la réponse mesurée (par exemple l'additif 3 seul semble avoir un effet néfaste sur la fluidité lorsqu'il est utilisé en grande quantité puisque plus son débit est grand plus la fluidité diminue),

iii) il existe un "effet d'interaction" entre les additifs 1 et 2 car s'ils sont utilisés simultanément avec un débit élevé alors une nette augmentation de la fluidité apparaît (+60). Ceci peut être dû, par exemple, à une réaction chimique se produisant uniquement lorsque les quantités de ces deux additifs sont assez élevées.

Remarquons qu'un tel exemple est présenté uniquement à titre pédagogique et deux grandes hypothèses simplificatrices ont été utilisées. Premièrement il est bien entendu évident que dans la réalité le modèle mathématique expliquant le phénomène étudié est généralement inconnu. Deuxièmement on a supposé ici que le modèle mathématique est déterministe (*i.e.* si deux expériences identiques sont réalisées alors les réponses observées sont les mêmes). Là aussi c'est rarement le cas dans la réalité car répéter une expérience conduit généralement à des résultats différents à cause de diverses sources de variations externes (erreurs humaines, facteurs non-contrôlés, erreurs dues aux appareils de mesure, *etc...*). Des modèles plus complexes, dits **modèles statistiques**, seront étudiés et utilisés dans la suite de l'ouvrage (voir le chapitre 2).

Supposons maintenant que les valeurs des différents paramètres du modèle sont inconnues et qu'un utilisateur cherche à les retrouver par le biais de l'expérimentation. Voici diverses façons classiques pour réaliser des expériences afin de collecter des informations sur le phénomène étudié.

1) Utilisation de toutes les expériences

La méthode la "plus sûre" afin d'étudier le phénomène consiste à réaliser la totalité des expériences possibles. Ceci conduit donc (puisque'il y a ici 3 modalités par facteur) à la réalisation exhaustive des 27 expériences présentées dans la table 1.1 (où la notation DV1 désigne le débit fixé pour la vanne 1, *etc...*).

Table 1.1. Réalisation de toutes les expériences.

Exp.	DV1	DV2	DV3	Rep.
1	Faible	Faible	Faible	120
2	Moyen	Faible	Faible	130
3	Fort	Faible	Faible	100
4	Faible	Moyen	Faible	100
5	Moyen	Moyen	Faible	110
6	Fort	Moyen	Faible	80
7	Faible	Fort	Faible	130
8	Moyen	Fort	Faible	140
9	Fort	Fort	Faible	170
10	Faible	Faible	Moyen	110
11	Moyen	Faible	Moyen	120
12	Fort	Faible	Moyen	90
13	Faible	Moyen	Moyen	90
14	Moyen	Moyen	Moyen	100
15	Fort	Moyen	Moyen	70
16	Faible	Fort	Moyen	120
17	Moyen	Fort	Moyen	130
18	Fort	Fort	Moyen	160
19	Faible	Faible	Fort	90
20	Moyen	Faible	Fort	100
21	Fort	Faible	Fort	70
22	Faible	Moyen	Fort	70
23	Moyen	Moyen	Fort	80
24	Fort	Moyen	Fort	50
25	Faible	Fort	Fort	100
26	Moyen	Fort	Fort	110
27	Fort	Fort	Fort	140

Les 8 paramètres non-nuls du modèle ($\beta_0, \beta_1^{[1]}, \beta_1^{[2]}, \beta_2^{[1]}, \beta_2^{[2]}, \beta_3^{[1]}, \beta_3^{[2]}$ et $\beta_{12}^{[22]}$) vont pouvoir facilement être déterminés puisque les expériences réalisées permettent d'établir un système linéaire de 27 équations. Les équations obtenues, par exemple, à l'aide des trois premières expériences réalisées sont :

$$\begin{aligned}\beta_0 &= 120 \\ \beta_0 + \beta_1^{[1]} &= 130 \\ \beta_0 + \beta_1^{[2]} &= 100\end{aligned}$$

Puisque aucune expérience n'a été omise, il est donc possible de déterminer les réglages optimaux en sélectionnant tout simplement l'expérience qui conduit à maximiser la réponse. Il s'agit ici de l'expérience 9 associée aux débits ci-dessous :

Débit 1 : Fort / Débit 2 : Fort / Débit 3 : Faible.

Une telle démarche pose cependant le problème du **nombre d'expériences** à réaliser qui peut devenir rapidement trop important. On peut en effet supposer ici que chaque expérience est longue et coûteuse à mettre en oeuvre. Il est alors beaucoup trop lourd de réaliser concrètement 27 expériences alors que seulement 8 paramètres sont à déterminer. Remarquons de plus que le problème est ici assez simple car seulement 3 facteurs à 3 modalités interviennent. Pour 5 facteurs à 6 modalités le nombre total d'expériences est cette fois de $6^5 = 7776$. Lorsque les facteurs sont quantitatifs continus (pression, température, ...) il devient impossible de réaliser toutes les expériences disjointes puisqu'il en existe une infinité.

2) Utilisation de la technique "un facteur à la fois"

L'expérimentateur devant faire face à une situation où la réalisation de toutes les expériences est beaucoup trop lourde se rabat souvent sur ce type de technique. Comme son nom l'indique elle consiste à faire varier chacun des facteurs, l'un après l'autre, en lui affectant toutes les modalités possibles. Puisqu'ici chaque facteur est à 3 modalités ceci conduit donc à la réalisation d'un total de 9 expériences données dans la table 1.2.

Table 1.2. Technique "un facteur à la fois".

Exp.	DV1	DV2	DV3	Rep.
13	Faible	Moyen	Moyen	90
14	Moyen	Moyen	Moyen	100
15	Fort	Moyen	Moyen	70
11	Moyen	Faible	Moyen	120
14	Moyen	Moyen	Moyen	100
17	Moyen	Fort	Moyen	130
5	Moyen	Moyen	Faible	110
14	Moyen	Moyen	Moyen	100
23	Moyen	Moyen	Fort	80

La démarche suivie consiste ici à fixer systématiquement au niveau moyen les deux facteurs ne variant pas. L'expérience numéro 14 a ainsi été répétée à trois reprises. Dans un contexte déterministe cela n'a aucun intérêt (puisque la réponse mesurée est trois fois la même) mais une telle démarche n'est pas

inutile dans un contexte statistique afin de quantifier l'importance des sources de variations externes non-controlées. Les expériences se traduisent par les 7 équations linéaires :

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_2^{[1]} + \beta_3^{[1]} = 90 \\ \beta_0 + \beta_1^{[1]} + \beta_2^{[1]} + \beta_3^{[1]} = 100 \\ \beta_0 + \beta_1^{[2]} + \beta_2^{[1]} + \beta_3^{[1]} = 70 \\ \beta_0 + \beta_1^{[1]} + \beta_3^{[1]} = 120 \\ \beta_0 + \beta_1^{[1]} + \beta_2^{[2]} + \beta_3^{[1]} = 130 \\ \beta_0 + \beta_1^{[1]} + \beta_2^{[1]} = 110 \\ \beta_0 + \beta_1^{[1]} + \beta_2^{[1]} + \beta_3^{[2]} = 80 \end{cases}$$

On vérifie sans peine que ce système d'équations permet de retrouver les valeurs exactes de l'effet moyen général ainsi que des divers effets linéaires. Par contre l'effet d'interaction ne peut être déterminé (ce qui est logique puisque aucune expérience ne fait intervenir simultanément les débits forts pour les additifs 1 et 2). Remarquons que même si le niveau des deux facteurs fixés à chaque expérience avait été "fort" au lieu de "moyen" alors l'estimation de cet effet d'interaction aurait encore été impossible car 7 équations distinctes ne permettent pas de déterminer les 8 paramètres inconnus. Ceci est le principal défaut de ce type de technique. De manière générale les inconvénients associés à cette technique sont les suivants :

- i) faire varier les facteurs un par un masque les éventuels effets d'interactions entre plusieurs facteurs,
- ii) le choix du niveau pour les facteurs ne variant pas ("moyen" ici) n'est pas évident et peut avoir un effet sur la qualité des résultats obtenus,
- iii) le plan d'expérience obtenu présente le problème d'être déséquilibré dans le sens où ici le niveau "moyen" est sur-représenté au détriment des deux autres niveaux.

Remarquons enfin que l'utilisation de la table 1.2 conduit à une mauvaise modélisation du phénomène étudié puisque, l'effet d'interaction étant omis, la plus grande réponse théorique prédite par le modèle vaut 140 pour la situation suivante :

Débit 1 : Moyen / Débit 2 : Fort / Débit 3 : Faible.

D'après la totalité des expériences de la table 1.1 il est clair que ce résultat est faux puisqu'il ne s'agit pas du meilleur choix possible.

3) Utilisation d'un sous-ensemble quelconque d'expériences

L'utilisateur n'ayant pas réalisé toutes les expériences pour des raisons de coût et n'étant pas satisfait des résultats donnés par la méthode "un facteur à la fois" se trouve souvent désemparé et s'oriente la plupart du temps vers le choix d'un sous-ensemble d'expériences. Ce choix est bien souvent réalisé de manière empirique : des expériences peuvent être rajoutées à celles de la technique "un facteur à la fois" dans le but d'améliorer les résultats, un sous-ensemble d'expérience peut être déterminé de manière aléatoire, *etc...* Généralement, tout choix d'un sous ensemble d'expériences qui n'est pas guidé par une méthodologie rigoureuse peut entraîner les problèmes suivants :

i) un tel choix peut conduire à sélectionner des expériences qui ne permettront pas d'estimer tous les paramètres inconnus du modèle étudié,

ii) même si tous les paramètres inconnus du modèle étudié peuvent être estimés la qualité des résultats obtenus ne sera généralement pas optimale.

Illustrons ceci à l'aide des 9 expériences présentées dans la table 1.3. Ce choix peut paraître, à priori, plus judicieux que celui de la table 1.2 dans le sens où la configuration présentée ici est équilibrée puisque chacun des niveaux des facteurs apparaît le même nombre de fois. Déterminons maintenant les divers paramètres du modèle. L'expérience 1 permet immédiatement de retrouver la valeur $\beta_0 = 120$ pour l'effet moyen général. De même les expériences 10 et 19 conduisent aux divers effets de l'additif 3 puisque :

$$\beta_3^{[1]} = -10 \text{ et } \beta_3^{[2]} = -30.$$

Table 1.3. Utilisation d'un sous-ensemble d'expériences.

Exp.	DV1	DV2	DV3	Rep.
1	Faible	Faible	Faible	120
10	Faible	Faible	Moyen	110
19	Faible	Faible	Fort	90
8	Moyen	Fort	Faible	140
17	Moyen	Fort	Moyen	130
26	Moyen	Fort	Fort	110
6	Fort	Moyen	Faible	80
15	Fort	Moyen	Moyen	70
24	Fort	Moyen	Fort	50

Les 6 autres expériences conduisent à seulement deux équations distinctes supplémentaires données par :

$$\begin{cases} \beta_1^{[1]} + \beta_2^{[2]} = 20 \\ \beta_1^{[2]} + \beta_2^{[1]} = -40 \end{cases}$$

On constate donc que les 9 expériences sélectionnées ici ne permettent pas d'estimer tous les paramètres du modèle. Ceci est dû au fait que dans la table 1.3 les facteurs 1 et 2 sont "liés" car ils changent de niveau en même temps ce qui rend impossible l'estimation de leurs effets respectifs (on montrera plus tard que les expériences sélectionnées forment une fraction du plan complet ayant une résolution trop basse pour permettre ce type d'estimation). Il serait en pratique possible de rajouter des expériences afin de résoudre ce type de problème mais ce serait en contradiction avec l'objectif principal qui est d'avoir peu d'expériences à réaliser.

4) Utilisation d'un plan d'expérience

Toutes les démarches vues précédemment présentent systématiquement un certain nombre d'inconvénients, il est alors fortement recommandé d'utiliser un protocole expérimental "optimal" donné par un plan d'expérience tel que celui présenté dans la table 1.4. Les expériences proposées ici sont choisies selon la technique des fractions régulières (on a en fait la fraction régulière du plan complet définie par la relation $\mathbb{I} = 123$). Il en résulte un petit nombre d'expériences (9) permettant de réaliser l'estimation de tous les paramètres inconnus du modèle (effet d'interaction compris). La qualité de ce plan d'expérience réside à la fois dans le fait qu'il est équilibré pour les traitements (*i.e.* chaque traitement est utilisé 3 fois pour chaque facteur) mais aussi pour les couples de traitements (*i.e.* chaque couple de traitements est testé une fois pour chaque couple de facteurs). C'est cette dernière propriété (qualifiée généralement d'orthogonalité) qui assure que, contrairement aux tables 1.2 et 1.3, il existe bien ici une expérience faisant intervenir les niveaux hauts des facteurs 1 et 2 et permet ainsi de détecter l'effet d'interaction qui leur est associé.

Table 1.4. Utilisation d'un plan d'expérience.

Exp.	DV1	DV2	DV3	Rep.
1	Faible	Faible	Faible	120
6	Fort	Moyen	Faible	80
8	Moyen	Fort	Faible	140
12	Fort	Faible	Moyen	90
14	Moyen	Moyen	Moyen	100
16	Faible	Fort	Moyen	120
20	Moyen	Faible	Fort	100
22	Faible	Moyen	Fort	70
27	Fort	Fort	Fort	140

Un plan d'expérience consiste donc aussi à proposer peu d'expériences tout en faisant varier tous les facteurs **simultanément** afin d'obtenir un maximum d'informations (cette démarche est diamétralement opposée à celle de la technique "un facteur à la fois"). Enfin, la détermination de tous les paramètres inconnus du modèle permet ici de retrouver de manière purement théorique

que la valeur maximale de la réponse devrait être de 170 lorsque les différents réglages suivants sont effectués :

Débit 1 : Fort / Débit 2 : Fort / Débit 3 : Faible.

Il est donc possible de déterminer les conditions optimales de fonctionnement sans même avoir réalisé l'expérience correspondante.

1.3 Historique

Réaliser des expériences afin d'étudier et de comprendre un phénomène est une démarche qui remonte à la nuit des temps. Dès le moyen-âge Nicolas Oresme (1325-1382) aborde cette question dans ses écrits. Inspirateur de Descartes et Leibnitz, Francis Bacon (1561-1626) est un des précurseur de la méthode expérimentale. En 1627 il fait, par exemple, macérer des grains de blé dans neuf concoctions différentes afin d'étudier leur effet sur la rapidité de germination. Arthur Young (1746-1820) cherche ensuite à systématiser le procédé et aborde la notion de répétabilité des expériences afin de prendre en compte leur variabilité. Ses travaux concernent surtout l'agronomie et la mise en œuvre de méthodes "modernes" de culture, basées plus sur l'expérimentation que sur des préjugés ou l'habitude. Citons aussi les travaux de Cretté de Palluel (1741-1798) qui publie en 1788 un "*Mémoire sur les avantages et l'économie que procurent les racines employées à l'engrais des moutons à l'étable*". L'auteur propose un protocole expérimental destiné à comparer les mérites des pommes de terre, des turneps, de la betterave et de la chicorée dans l'engrais des moutons de l'étable. C'est ensuite principalement au 19^{ème} siècle que les méthodes expérimentales se démocratisent. Citons à titre d'exemple les expériences médicales menées par Claude Bernard (1813-1878) ainsi que son ouvrage "*Principes de médecine expérimentale*".

Les méthodes rigoureuses d'expérimentation, basées sur l'utilisation des plans d'expérience, sont dues aux travaux de Sir Ronald Fisher (1890-1962). Ce brillant mathématicien, très productif dans le domaine de la Statistique, a été amené à s'intéresser aux techniques d'expérimentation suite à son emploi, en 1919, à la "Rothamsted Experimental Station", centre de recherche agronomique situé au nord de Londres. Il cherche alors à augmenter les rendements agricoles en combinant divers types d'engrais, de variétés végétales, de méthodes de cultures, de types de sols, *etc...* Face à l'impossibilité de réaliser la totalité des expériences ceci l'amène à proposer des configurations expérimentales basées sur des modèles statistiques rigoureux (tels que les carrés latins). Ceci constitue le point de départ de la méthode théorique des plans d'expérience. Un célèbre ouvrage sur le sujet a été publié en 1935 [41]. Une synthèse des travaux de Fisher dans le domaine des plans d'expérience a été réalisée par D. A. Preece [74].

Divers chercheurs ont par la suite marché dans les traces de Fisher afin de promouvoir et développer l'utilisation des techniques de planification expérimentales dans d'autres domaines que l'agronomie. Dès les années 50 les travaux de Box et de ses collaborateurs (principalement sur les surfaces de réponse) ont entraîné bon nombre d'applications pratiques. Mais ce sont certainement les travaux de G. Taguchi qui ont permis une vaste diffusion des plans d'expérience, notamment dans le milieu industriel. Travaillant, entre autre, comme consultant pour de multiples entreprises japonaises G. Taguchi a eu l'idée de réaliser des tables de configurations expérimentales de référence facilement utilisables par des non-spécialistes. Il a de plus inclus l'expérimentation au sein d'une démarche plus large de "qualité totale" amenant à la conception de produits fiables et de bonne qualité. Ses idées ont été mises en œuvre dans bon nombre d'industries japonaises dès les années 70.

De nombreux chercheurs contemporains ont continué le développement de cette branche de la Statistique dans des voies diverses et variées : adaptation des plans d'expérience pour les problèmes de mélanges, introduction d'effets de blocs, utilisation de modèles non-linéaires, utilisation de modèles contenant des effets de voisinage, plans d'expérience pour expériences simulées, *etc ...*

Voici une liste, non-exhaustive, d'ouvrages ayant fait avancer l'état de l'art dans ce domaine lors des dernières années (ces références, ainsi que d'autres, seront rappelées par la suite dans les divers chapitres correspondants) : Benoist et *al.* [3], Collombier [19], Cox [24], Cox et Reid [25], Cornell [22], Dagnelie [27], Dodge [29], Federer et King [39], John [52], Khuri et Cornell [56], Phan-Tan-Luu et Mathieu [71], Pukelsheim [75], Saporta et *al.* [84], *etc...*

1.4 Guide de lecture de l'ouvrage

1.4.1 Positionnement

Cet ouvrage a pour objectif de présenter une vision très générale de la méthode des plans d'expérience. Pour cela un grand nombre de configurations sont étudiées (plans pour criblage, plans à effets d'interactions, plans pour surfaces de réponse, plans en blocs, plans pour mélanges, plans pour facteurs qualitatifs, plans pour facteurs qualitatifs en blocs, *etc ...*) ainsi qu'un grand nombre de notions mathématiques (estimation, prédiction, fractions régulières, iso-variance, efficacité ...). Cette approche est originale car beaucoup d'ouvrages actuels sur ce sujet se cantonnent bien souvent à un thème précis (les surfaces de réponse par exemple) et séparent souvent le cas des facteurs quantitatifs du cas des facteurs qualitatifs. Une synthèse des méthodes de planification est ici proposée dans ces divers contextes en essayant de les unifier au maximum (notion de "plans usuels" par exemple).