





El problema de  
complementariedad  
**No lineal**  
**Teoría, aplicaciones y nuevos  
algoritmos para su solución**



Colección Ciencias Naturales y Exactas  
Investigación

El problema de complementariedad no lineal : teoría, aplicaciones y nuevos algoritmos para su solución / Rosana Pérez Mera [y otros]. -- Cali : Programa Editorial Universidad del Valle, 2019.

140 páginas : ilustraciones ; 24 cm. -- (Colección ciencias naturales y exactas. Investigación)

Incluye bibliografía.

1. Programación no-lineal - Investigaciones 2. Algoritmos 3. Funciones algebraicas 4. Métodos numéricos I. Pérez Mera, Rosana, autora I. Serie.

519.76 cd 22 ed.

A1645958

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

## Universidad del Valle

### Programa Editorial

Título: El problema de complementariedad no lineal.  
Teoría, aplicaciones y nuevos algoritmos para su solución  
Autores: Rosana Pérez Mera, Favián Enrique Arenas A.,  
Héctor Jairo Martínez R., Carlos Andrés Arias T.  
ISBN: ~~978-958-5509-17-8~~  
ISBN PDF: ~~978-958-5509-18-5~~  
DOI: 10.25100/peu.365  
Colección: Ciencias Naturales y Exactas-Investigación

### Primera edición

Rector de la Universidad del Valle: Édgar Varela Barrios  
Vicerrector de Investigaciones: Jaime R. Cantera Kintz  
Director del Programa Editorial: Omar J. Díaz Saldaña

© Universidad del Valle

© Rosana Pérez, Favián E. Arenas, Héctor J. Martínez, Carlos A. Arias

Diseño de carátula: Danny Stivenz Pacheco Bravo

Este libro, o parte de él, no puede ser reproducido por ningún medio sin autorización escrita de la Universidad del Valle.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad del Valle, ni genera responsabilidad frente a terceros. El autor es el responsable del respeto a los derechos de autor y del material contenido en la publicación, razón por la cual la Universidad no puede asumir ninguna responsabilidad en caso de omisiones o errores.

Cali, Colombia, septiembre de 2019

Rosana Pérez Mera • Favián Enrique Arenas A.  
Héctor Jairo Martínez R. • Carlos Andrés Arias T.

El problema de  
complementariedad  
**No lineal**  
**Teoría, aplicaciones y nuevos  
algoritmos para su solución**



Colección Ciencias Naturales y Exactas  
Investigación



## PREFACIO

El llamado problema de complementariedad no lineal, *grosso modo*, un conjunto de igualdades y desigualdades, que en algunos contextos es sinónimo de sistema en equilibrio, ha despertado el interés de muchos investigadores en las últimas cinco décadas por sus numerosas aplicaciones en variados campos de la Ciencia, Ingeniería y Economía. Los desarrollos teóricos sobre este problema que demuestran que es posible reformularlo como un *sistema de ecuaciones no lineales* o como un *problema de minimización* abrieron un camino muy promisorio para nuevas investigaciones y para el diseño de métodos computacionales para su solución; esta técnica llamada de *reformulación* ha sido muy popular, sobre todo en las dos últimas décadas.

En nuestro Grupo de Optimización, no hemos estado ajenos a la importancia de este problema y a la necesidad de nuevas propuestas algorítmicas para su solución. Vale la pena mencionar que gran parte de nuestro trabajo de investigación ha estado centrado en el tema de complementariedad no lineal, el cual ha dado como fruto la propuesta de algoritmos tipo cuasi *Newton* tanto locales como globales para su solución, los cuales han resultado competitivos frente a métodos tipo *Newton* tradicionalmente usados con el mismo fin. A la par de estas propuestas algorítmicas, hemos realizado su análisis de convergencia y un estudio numérico de su desempeño.

Motivados por la importancia del problema, por los aportes mencionados en el párrafo anterior y, principalmente, por motivar a estudiantes e investigadores que quieran incursionar en el estudio de la complementariedad no lineal, reunimos los principales resultados de nuestra investigación en este libro.

Desglosamos el contenido del texto en siete capítulos. El primero, introduce el problema, su importancia y la técnica de *reformulación*, quizá, la más popular para su solución. El segundo, establece condiciones de existencia y unicidad de soluciones. El tercero, analiza teóricamente una familia uniparamétrica de funciones que juega un papel fundamental en la reformulación del problema. El cuarto, reformula el problema como un sistema de ecuaciones no lineales. El quinto, presenta cuatro aplicaciones de complementariedad no lineal. El sexto y séptimo, constituyen por así decirlo,

el corazón de nuestros aportes: contienen los algoritmos cuasi *Newton* propuestos tanto local como global, respectivamente; sus resultados de convergencia y pruebas numéricas.

Concientes de la gran responsabilidad que implica la escritura de un libro de investigación, no solo porque los resultados deben ser novedosos y de utilidad para futuras investigaciones, sino por cómo estos deben ser presentados para lograr llegar a un público diverso, presentamos el contenido de cada capítulo acompañando los resultados teóricos con ejemplos, gráficos, comentarios y en algunos casos con interpretaciones geométricas, sin descuidar el rigor matemático que consideramos, debe caracterizar la presentación de los conceptos. Al final de cada capítulo, incluimos una pequeña sección de ejercicios sobre el contenido del mismo para motivar al lector a poner a prueba su comprensión sobre los resultados expuestos.

Finalmente, mencionamos que para nosotros fue un placer escribir este libro, en primer lugar, porque trata de un tema que consideramos de gran importancia y, en segundo lugar, porque nos impuso un reto de escribir en forma amigable, conceptos y resultados que para nosotros, por su manejo cotidiano son familiares, pero que para un público general, no lo son. Por ello, esperamos que el contenido del libro sirva para que el lector quiera profundizar aún más en el tema y quizá, hacer sus nuevas propuestas.

## CONTENIDO

<b>1. El problema de complementariedad no lineal</b>	<b>15</b>
1.1. Tipos de complementariedad . . . . .	16
1.2. Reformulación del problema . . . . .	18
1.3. Breve reseña histórica . . . . .	25
1.4. Ejercicios . . . . .	27
<b>2. Existencia de soluciones</b>	<b>29</b>
2.1. Dos casos particulares . . . . .	29
2.2. Caso general . . . . .	34
2.3. Ejercicios . . . . .	40
<b>3. Familia de funciones de complementariedad</b>	<b>41</b>
3.1. Una familia bien definida . . . . .	41
3.2. La función $G_\lambda$ y algunas propiedades . . . . .	43
3.3. Algunas propiedades de la familia $\varphi_\lambda$ . . . . .	47
3.4. Ejercicios . . . . .	52
<b>4. Reformulación del problema</b>	<b>53</b>
4.1. Reformulación . . . . .	54
4.2. Construcción de un subconjunto de matrices en $\partial\Phi_\lambda(x)$ . . . . .	54
4.3. Ejercicios . . . . .	62
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>63</b>
5.1. Problema de equilibrio de tráfico . . . . .	63
5.2. Problema de obstáculo con frontera libre . . . . .	65
5.3. Problema de contacto entre cuerpos rígidos . . . . .	68
5.4. Problema de valor de capital invariante . . . . .	71
5.5. Ejercicios . . . . .	74
<b>6. Algoritmo local, convergencia y pruebas numéricas</b>	<b>77</b>
6.1. Algoritmo cuasi-Newton local . . . . .	78
6.2. Resultados de convergencia . . . . .	79

6.3. Métodos secantes de cambio mínimo . . . . .	87
6.4. Resultados adicionales de convergencia . . . . .	91
6.5. Pruebas numéricas . . . . .	95
6.6. Ejercicios . . . . .	103
<b>7. Algoritmo global, convergencia y pruebas numéricas</b>	<b>105</b>
7.1. Algoritmo cuasi-Newton global . . . . .	109
7.2. Resultados de convergencia . . . . .	112
7.3. Pruebas Numéricas . . . . .	118
7.4. Búsqueda lineal no monótona . . . . .	121
7.5. Ejercicios . . . . .	126
<b>Bibliografía</b>	<b>127</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>135</b>

## ÍNDICE DE TABLAS

6.1.	<b>Comportamiento local de los Algoritmos 6.3 y 6.4.</b>	102
7.1.	<b>Resultados numéricos para los Algoritmos 7.5 y 7.6.</b>	121
7.2.	<b>Algoritmo 7.7 con búsqueda lineal no monótona.</b>	123
7.3.	<b>Resultados numéricos al variar el parámetro <math>M</math>.</b>	124
7.4.	<b>Desempeño del Algoritmo 7.7 con <math>M = 10</math>.</b>	125



## ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	<i>Gráficas de <math>F_1(x, y) = 0</math> y <math>F_2(x, y) = 0</math>.</i>	16
1.2.	<i>Función mínimo y función de Fischer.</i>	19
1.3.	<i>Diagrama de reformulación del PCNL(F).</i>	24
2.1.	<i>Existencia de soluciones para <math>F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math>.</i>	30
2.2.	<i>Existe una única solución al PCNL(F).</i>	30
2.3.	<i>Existen infinitas soluciones al PCNL(F).</i>	31
2.4.	<i>El PCNL(F) no tiene solución.</i>	31
2.5.	<i>El PCNL(F) tiene solución.</i>	32
2.6.	<i><math>P</math> y <math>Q</math> son soluciones del PCNL(F).</i>	33
2.7.	<i>El punto <math>D</math> es una solución degenerada del PCNL(F).</i>	33
2.8.	<i>Función <math>F(x) = x^3</math>.</i>	35
3.1.	<i>Función de <math>\varphi_\lambda</math>, para algunos valores de <math>\lambda</math>.</i>	42
3.2.	<i>Función <math>\alpha_{\min}</math>.</i>	46
3.3.	<i>Desigualdad triangular.</i>	47
4.1.	<i>Reformulación.</i>	53
4.2.	<i>Gráfica de <math>\Phi_\lambda(x, y) = (0, 0)</math>.</i>	55
5.1.	<i>Red vial en un solo sentido.</i>	64
5.2.	<i>Cuerda elástica sobre un obstáculo.</i>	66
5.3.	<i>Fuerzas de contacto.</i>	69
6.1.	<i>Métodos locales para el PCNL(F).</i>	77
6.2.	<i>Convergencia del Algoritmo 6.2.</i>	90
6.3.	<i>Carácter local del Algoritmo 6.2.</i>	90
6.4.	<i>Problema Kojima-Shindo.</i>	100
6.5.	<i>Problema Kojima-Josephy.</i>	100
6.6.	<i>Problema Sistema Trigonométrico.</i>	101
7.1.	<i>Carácter global del Algoritmo 7.5.</i>	111
7.2.	<i>Convergencia del Algoritmo 7.5 desde <math>x_0 = 5</math>.</i>	112
7.3.	<i>Divergencia del Algoritmo 6.2 desde <math>x_0 = 5</math>.</i>	112

