orell füssli

DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission

Geometrie 2

Kommentierte Lösungen

Inklusive E-Book

DMK | Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte)

Geometrie 2

Kommentierte Lösungen

orell füssli Verlag

Herausgeberin: DMK Deutschschweizerische Mathematikkommission des VSMP
(Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte), http://dmk.vsmp.ch

Autoren: Michael Graf, Heinz Klemenz
Gesamtleitung: Franz Meier

1. Auflage 2019
ISBN 978-3-280-03936-6 (E-Book)

Titelbild: basierend auf Entwürfen von Tobias Berger, Elgg

Orell Füssli Verlag, www.ofv.ch

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter www.dnb.de abrufbar.

Zusätzliches Material steht als PDF zum Download auf allen Geräten zur Verfügung.

Die Reihe umfasst folgende Werkbestandteile:
Geometrie 2 – Aufgaben, 978-3-280-04137-6
Geometrie 1 – Aufgaben, 978-3-280-04135-2
Geometrie 1 – Kommentierte Lösungen, 978-3-280-04136-9

Orell Füssli Verlag Lernmedien
lernmedien@ofv.ch
www.ofv.ch/lernmedien

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zu besonderen Markierungen

- 🗋 Zu dieser Aufgabe ist ein Arbeitsblatt mit Dispositionen verfügbar. Die Arbeitsblätter können im Impressum dieses E-Books als PDF-Datei heruntergeladen werden.
- ☞ ist ein Verweis innerhalb dieses E-Books oder zu einer URL
- ➝ verweist auf die entsprechende Seite im Aufgabenbuch
- 💡 beschreibt eine grundlegende Idee zur Lösung der Aufgabe
- ■ markiert das Ende eines Beweises

7 Ähnlichkeit

Vorkenntnisse

Grundlagen der Geometrie (insbesondere Kongruenz, Satz von Pythagoras, Winkelsätze am Kreis), Lösen von linearen Gleichungen

Inhalte

Verhältnisse und Proportionen (7.1)

Begriffe:

- Ein **Verhältnis** ist ein nicht ausgerechneter Quotient. $a : b$
- Eine **Proportion** ist eine Verhältnisgleichung. $a : b = c : d$
  a und d heissen **Aussenglieder**, b und c heissen **Innenglieder**.
- Zwei veränderliche Grössen a und b sind **proportional**, wenn ihr Verhältnis konstant ist. $a : b = c, \quad c$ konst.

Eigenschaften:

Das Produkt der Aussenglieder ist gleich dem Produkt der Innenglieder. (Produktsatz)

Sowohl die Innenglieder als auch die Aussenglieder dürfen vertauscht werden.

Ähnliche Figuren (7.2)

Umgangssprachlich:	Zwei Figuren sind **ähnlich** (Kurzzeichen: $\sim$), wenn sie dieselbe Form haben.
Definition 1:	Zwei Vielecke sind **ähnlich**, wenn sie gleiche Winkel und gleiche Seitenverhältnisse haben.
Definition 2:	Zwei Figuren sind **ähnlich**, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung (Verknüpfung von zentrischer Streckung und Kongruenzabbildung) gibt, die die beiden Figuren aufeinander abbildet. (☞ Kap. 7.4, S. 16)

Für Vielecke sind die beiden Definitionen äquivalent.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn sie

1. in allen Verhältnissen entsprechender Seiten übereinstimmen (**S:S:S**).
2. in zwei (und damit in drei) Winkeln übereinstimmen (**W:W**).
3. im Verhältnis zweier Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel übereinstimmen (**S:W:S**).
4. im Verhältnis zweier Seiten und dem der grösseren Seite gegenüber liegenden Winkel übereinstimmen (**S:s:W**).

In diesem Kapitel wird vorwiegend folgender Satz benutzt (Hinweis ☞ S. 5):

«**WW-Satz**»

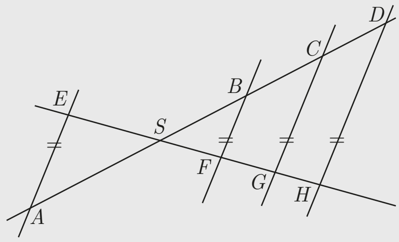
Zwei Dreiecke sind genau dann winkelgleich, wenn sie gleiche Seitenverhältnisse haben.

Strahlensätze (7.3)

Jeweils die zweite Proportion ist eine andere Lesart der Strahlensätze (Vertauschung der Innenglieder).

Erster Strahlensatz

Werden zwei sich in S schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die Abschnitte auf der anderen Geraden.



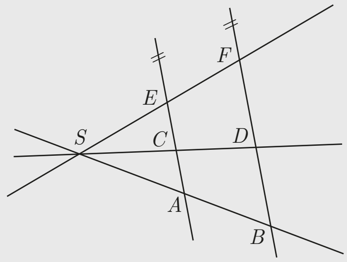
Beispiele: $\overline{AS} : \overline{SB} = \overline{ES} : \overline{SF}$, $\overline{SF} : \overline{SB} = \overline{GH} : \overline{CD}$

Zweiter Strahlensatz

Werden zwei sich in S schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von S aus gemessenen Abschnitte auf den Geraden.

Beispiele: $\overline{BF} : \overline{CG} = \overline{SF} : \overline{SG}$, $\overline{EA} : \overline{ES} = \overline{HD} : \overline{HS}$

Dritter Strahlensatz (kommt nur in ☞ Aufg. 46, S. 14 vor)



Werden drei sich in einem Punkt schneidende Geraden von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Parallelen wie die Abschnitte auf der anderen Parallelen.

Beispiele: $\overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{BF}$, $\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{CE} : \overline{DF}$

Kehrsatz des ersten Strahlensatzes

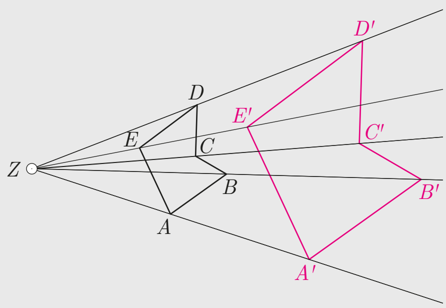
Werden zwei sich in S schneidende Geraden g und h von weiteren Geraden i und j geschnitten und verhalten sich die Abschnitte auf g wie auf h, so sind i und j parallel.

Der Kehrsatz des zweiten Strahlensatzes gilt nicht.

Zentrische Streckung (7.4)

Definition:

Eine **zentrische Streckung** mit Streckzentrum Z und Streckfaktor $k \neq 0$ ist eine geometrische Abbildung, die jedem Punkt P einen Bildpunkt P' zuordnet, so dass



- P' auf der Geraden ZP liegt.
- $\overline{P'Z} = |k| \cdot \overline{PZ}$.

Ist $k > 1$, liegt P zwischen Z und P'.

Ist $0 < k < 1$, liegt P' zwischen Z und P.

Ist $k < 0$, liegt Z zwischen P und P'.

Sprechweise: «Das Urbild wird an Z mit Streckfaktor k gestreckt.»

Eigenschaften:

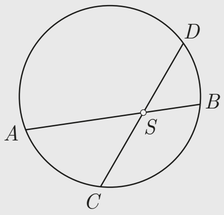
- Die zentrische Streckung ist geraden-, kreis-, parallelen- und winkeltreu, jedoch nicht längentreu.
- Alle Bildstrecken sind $|k|$-mal so lang wie die Urbildstrecken.
- Urbild und Bild sind ähnlich.
- Für $k = -1$ ist die zentrische Streckung eine Punktspiegelung an Z.
- Einziger Fixpunkt ist Z.
- Längen werden mit Faktor $|k|$ gestreckt, Flächen mit Faktor k^2, Volumina mit Faktor $|k|^3$.

Anwendungen (7.5)

Sehnensatz

Bei zwei sich im Punkt S schneidenden Sehnen ist das Produkt der jeweiligen Sehnenabschnitte konstant. Das heisst:

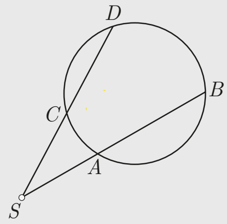
$\boxed{\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}}$



Sekantensatz

Sei S ein Punkt ausserhalb eines Kreises. Das Produkt der beiden Sekantenabschnitte von S bis zur Kreislinie ist für alle Sekanten konstant. Das heisst:

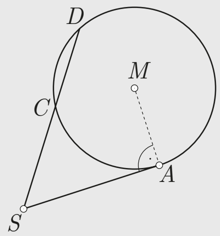
$\boxed{\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}}$



Sekantentangentensatz

Sei S ein Punkt ausserhalb eines Kreises. Das Produkt der Sekantenabschnitte von S bis zur Kreislinie ist gleich dem Quadrat des Tangentenabschnitts. Das heisst:

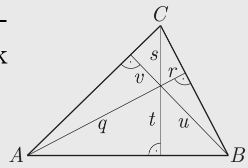
$\boxed{\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SA}^2}$



Höhenabschnittssatz

Das Produkt der Höhenabschnitte in einem Dreieck ist konstant.
Das heisst:

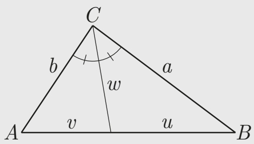
$\boxed{q \cdot r = s \cdot t = u \cdot v}$



Satz über Winkelhalbierende

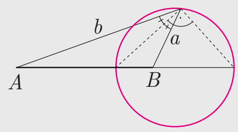
Im Dreieck teilt die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Das heisst: $\boxed{u : v = a : b}$



Apolloniuskreis

Die Menge aller Punkte, die von zwei gegebenen Punkten A und B ein festes Abstandsverhältnis $b\!:\!a$ haben, bilden einen Kreis.



Weiterführende Aufgaben (7.7)

Goldener Schnitt

- Eine Strecke AB heisst durch den Punkt T **im Verhältnis des goldenen Schnitts geteilt**, wenn folgende Proportion gilt: $\overline{AB} : \overline{AT} = \overline{AT} : \overline{TB}$.

  Die grössere Strecke AT heisst **Major**, die kürzere Strecke TB **Minor** von AB.

- Der Quotient von Major und Minor ist $\boxed{\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618}$

  Der Quotient von Minor und Major ist $\boxed{\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\Phi} = 1 - \Phi \approx 0.618}$

Logik

- Eine **Aussage** ist ein Satz, der wahrheitsfähig ist.
- Die **Wenn-Dann-Form** eines Satzes lautet $A \Rightarrow B$, wobei die Aussage A **Voraussetzung** und die Aussage B **Folgerung** heisst. Sie bedeutet «immer wenn A, dann auch B».
- Der Satz $B \Rightarrow A$ heisst **Kehrsatz** des Satzes $A \Rightarrow B$. Vom Wahrheitswert des Satzes kann i. A. nicht auf den Wahrheitswert des Kehrsatzes geschlossen werden.
- Die Verneinung einer Aussage A heisst **Negation**. Schreibweise: $\neg A$.
- Die **Kontraposition** des Satzes $A \Rightarrow B$ ist $\neg B \Rightarrow \neg A$. Sie ist äquivalent zum Ursprungssatz.

7.1 Verhältnisse und Proportionen

Die Aufgaben 1 bis 12 dieses Abschnitts dienen als Vorbereitung für die weiteren Abschnitte. Einerseits soll das Verständnis von Verhältnissen und Proportionen vertieft werden und andererseits sollen die algebraischen Fertigkeiten, die hierzu benötigt werden, geübt werden.

1. a) Es gilt $x : 4.5\,\text{m} = 18\,\text{cm} : 15\,\text{cm}$, wobei x die Länge des gezeichneten Mammuts ist. Folglich ist $x = 5.4\,\text{m}$.
   b) Der Waldflächenanteil des ersten Landstücks ist $\frac{3.4}{8.5} = \frac{2}{5} = 0.4$, derjenige des zweiten $\frac{2.4}{5.6} = \frac{3}{7} \approx 0.43$. Das zweite Landstück hat im Verhältnis also mehr Wald.
   c) Ersetzt man bei den drei Auflösungen das «×» durch ein «:», erhält man die drei Seitenverhältnisse. Um diese vergleichen zu können, kürzen wir sie bzw. rechnen den Quotienten aus:
   A: $2048 : 1536 = 4 : 3 \approx 1.3$, B: $2560 : 1600 = 8 : 5 = 1.6$ und C: $1920 : 1080 = 16 : 9 \approx 1.8$
   Somit ist Modell C im Verhältnis am breitesten.
   d) Sei x die Breite des gedruckten Bildes. Es gilt $x : 10\,\text{cm} = 4 : 3$. Somit ist $x = \frac{40}{3}\,\text{cm} = 13.\overline{3}\,\text{cm}$. Der unbedruckte Balken ist also $1.\overline{6}\,\text{cm}$ breit.

2. $\overline{IJ} : \overline{IJ} = \overline{GH} : \overline{GH} = \overline{KL} : \overline{KL} = 1 : 1$ $\quad$ $\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{KL} : \overline{CD} = 2 : 3$
   $\overline{AB} : \overline{IJ} = \overline{EF} : \overline{GH} = 1 : 3$ $\quad$ $\overline{KL} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{EF} = 4 : 1$

3. a) $r = 35$ $\quad$ b) $s = \frac{27}{4}$ $\quad$ c) $p = \frac{1}{8}$ $\quad$ d) $q = \frac{22}{3}$

4. a) $x = 1$ $\quad$ b) $x = 4$ $\quad$ c) $x = \frac{10}{3}$ $\quad$ d) $x = \pm 6$

5. a) Schreibt man die Verhältnisse als Brüche und multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner, also mit bd, so erhält man $ad = bc$. ■
   Die Anwendung des Produktsatzes erleichtert den Umgang mit Proportionen massgeblich.
   b) Der Produktsatz liefert $ad = bc$. Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch cd, erhält man $a : c = b : d$, also dasselbe, wie wenn man die Innenglieder vertauscht hätte.
   Dividiert man stattdessen beide Seiten durch ab, erhält man $d : b = c : a$, also dasselbe, wie wenn man die Aussenglieder vertauscht hätte. ■

6. a) $x : 8 = 40 : 64$ Produktsatz: $64x = 320 \Rightarrow x = 5$
   b) $x : 4 = 15 : 20$ Produktsatz: $20x = 60 \Rightarrow x = 3$
   c) $8 : x = 5.6 : 7$ Produktsatz: $5.6x = 56 \Rightarrow x = 10$
   d) $5 : 9 = 6 : x$ Produktsatz: $5x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{5} = 10.8$

7. a) Der Produktsatz liefert $x + 5 = 4(x + 1)$ und folglich ist $x = \frac{1}{3}$.
   b) Der Produktsatz liefert $2(y + 4) = 5(y - 3)$ und folglich ist $y = \frac{23}{3}$.
   c) Der Produktsatz liefert $(z + 6)(z + 9) = (z - 8)(z - 7)$ und folglich ist $z = \frac{1}{15}$.

8. $\frac{6}{13} \cdot 91\,\text{cm} = 42\,\text{cm}$, $\frac{7}{13} \cdot 91\,\text{cm} = 49\,\text{cm}$

9. $6.2\,\text{cm} \cdot 50\,000 = 310\,000\,\text{cm} = 3.1\,\text{km}$

10. Der Massstab $1 : 400\,000$ bedeutet, dass die Kartenlänge und -breite $400\,000$ mal kürzer sind als in Wirklichkeit. Somit braucht man in beiden Fällen für die Länge und Breite je $400\,000$ Karten, also insgesamt $400\,000^2 = 1.6 \cdot 10^{11} = 160$ Milliarden Karten. Die Grösse des Landes spielt also keine Rolle, die beiden Zahlen sind gleich gross.

11. Herr Bieri wurde nicht betrogen. Der Massstab bezieht sich auf den Längenvergleich. Länge, Breite und Höhe sind je im Massstab 1 : 100 verkleinert, d. h. das Volumen beträgt nur $\frac{1}{100^3}$ = ein Millionstel des ursprünglichen Volumens.

    Das Modell hat also ein Fassungsvermögen von $4718\,\text{Liter} : 10^6 = 4\,718\,000\,\text{ml} : 10^6 = 4.718\,\text{ml}$.

12. a) Im Quadrat gilt $d = s \cdot \sqrt{2}$, d. h. $d : s = \sqrt{2}$, sie sind also proportional.
    b) Da alle Banknoten gleich breit, aber unterschiedlich lang sind, sind sie nicht proportional.
    c) In allen gleichseitigen Dreiecken gilt $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$, d.h. $h : s = \sqrt{3} : 2$, sie sind also proportional.
    d) Seite und Höhe sind nicht proportional, da $2 \cdot 10 = 20$ auf vielerlei Arten in zwei Faktoren zerlegt werden kann: $10 = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{10 \cdot 2}{2} = \ldots$
    e) Die Länge der Höhe im gleichschenkligen Dreieck ist unabhängig von der Länge der Basis, sie sind also nicht proportional.
    f) In allen Kreisen gilt $u = 2\pi r$, d.h. $r : u = 1 : 2\pi$, sie sind also proportional.
    g) In allen Kreisen gilt $A = \pi r^2$, d.h. $r : A = 1 : \pi r$. Das Verhältnis ist also nicht konstant und folglich sind sie nicht proportional.

Die drei Abschnitte «7.2 Ähnliche Figuren», «7.3 Strahlensätze» und «7.4 Zentrische Streckung» sind unabhängig und können in beliebiger Reihenfolge behandelt werden.
Als Grundlage eignet sich der WW-Satz, der mit den Aufgaben 13 und 14 auf den Arbeitsblättern erlernt werden kann.

Die Lösungen dieser beiden Aufgaben folgen auf der nächsten und übernächsten Seite.

Hinweis:

Die Namensgebung WW-Satz entspricht nicht dem üblichen Gebrauch. Meist unterscheidet man die beiden Ähnlichkeitssätze S:S:S und W:W. In diesem Kapitel steht der WW-Satz für eine Kombination der beiden: «Zwei Dreiecke sind genau dann winkelgleich, wenn sie gleiche Seitenverhältnisse haben.» Mit Hilfe des Ähnlichkeitsbegriffes erhält man dann die Aussagen der beiden üblichen Sätze S:S:S und W:W.

Der WW-Satz ist der einzige Ähnlichkeitssatz (bzw. es sind die einzigen beiden), der hergeleitet und bewiesen wird. Einerseits ist er weitaus der wichtigste und andererseits dient er v. a. auch dazu, direkt mit dem Abschnitt «7.2 Ähnliche Figuren» beginnen zu können. Die weiteren Abschnitte «7.3 Strahlensätze» und «7.4 Zentrische Streckung» können dann mehrheitlich daraus abgeleitet werden. Wie im Kasten oben erwähnt, ist jedoch auch eine andere Reihenfolge möglich.

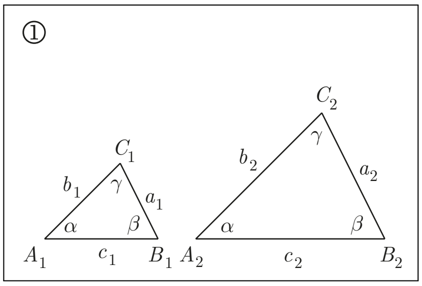
Die anderen Ähnlichkeitssätze kommen explizit nur in der Aufgabe ☞ Aufg. 22, S. 9 vor.

Die nächste Aufgabe eignet sich zur Festigung des WW-Satzes:

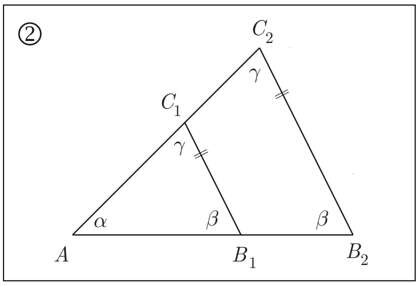
15.

		α	β	γ	a	b	c
a)	$\triangle_1$	30°	61°	89°	4 cm	7 cm	8 cm
	$\triangle_2$	30°	61°	89°	6 cm	10.5 cm	12 cm
b)	$\triangle_1$	50.5°	59°	70.5°	9 cm	10 cm	11 cm
	$\triangle_2$	70.5°	50.5°	59°	22 cm	18 cm	20 cm
c)	$\triangle_1$	62.5°	82.5°	35°	42.5 cm	47.5 cm	27.5 cm
	$\triangle_2$	82.5°	35°	62.5°	19 cm	11 cm	17 cm

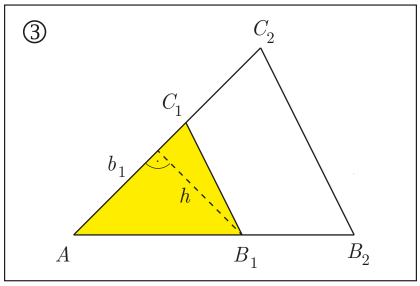
13. Diese Aufgabe dient der Herleitung, dass winkelgleiche Dreiecke gleiche Seitenverhältnisse haben.



Gegeben sind zwei Dreiecke mit gleichen Winkeln.

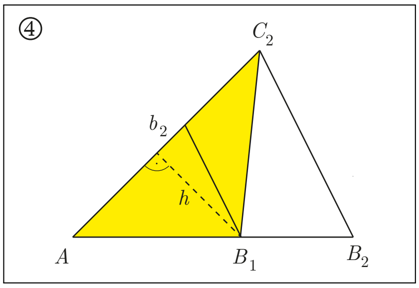


Die beiden Dreiecke werden aufeinandergelegt. Begründe.
$B_1C_1 \parallel B_2C_2$, weil β und γ je Stufenwinkel sind.

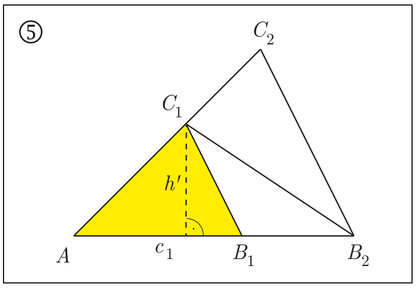


Die Flächenformel des gelben Dreiecks lautet:

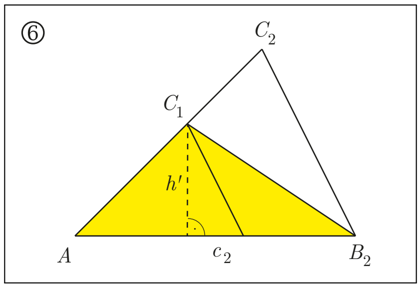
$A_{\triangle AB_1C_1} = \frac{1}{2}b_1h$



$A_{\triangle AB_1C_2} = \frac{1}{2}b_2h$



$A_{\triangle AB_1C_1} = \frac{1}{2}c_1h'$



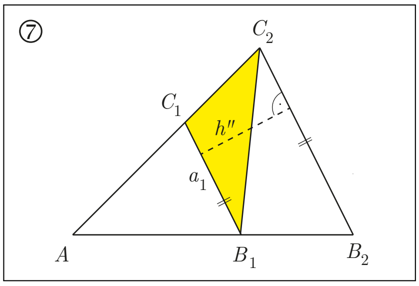
$A_{\triangle AB_2C_1} = \frac{1}{2}c_2h'$

Aus ③ und ④ folgt:

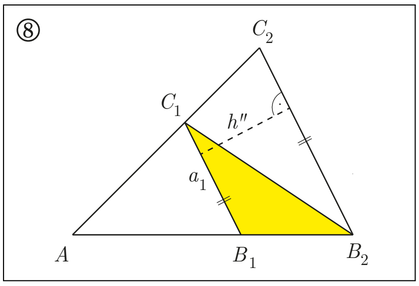
$$\frac{A_{\triangle AB_1C_2}}{A_{\triangle AB_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}b_2h}{\frac{1}{2}b_1h} = \frac{b_2}{b_1} \qquad (1)$$

Aus ⑤ und ⑥ folgt:

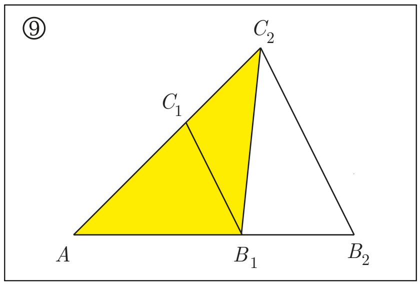
$$\frac{A_{\triangle AB_2C_1}}{A_{\triangle AB_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}c_2h'}{\frac{1}{2}c_1h'} = \frac{c_2}{c_1} \qquad (2)$$



$A_{\triangle C_1B_1C_2} = \frac{1}{2}a_1h''$



$A_{\triangle C_1B_1B_2} = \frac{1}{2}a_1h''$



Folgerung aus ⑦ und ⑧:
Die beiden Dreiecke $\triangle AB_2C_1$ (⑥) und $\triangle AB_1C_2$ (⑨) sind flächengleich. (3)

Folgerung aus (1), (2) und (3):

$\frac{b_2}{b_1} \overset{(1)}{=} \frac{A_{\triangle AB_1C_2}}{A_{\triangle AB_1C_1}} \overset{(3)}{=} \frac{A_{\triangle AB_2C_1}}{A_{\triangle AB_1C_1}} \overset{(2)}{=} \frac{c_2}{c_1}$ und als Proportion geschrieben: $b_2 : b_1 = c_2 : c_1$.

Wie müsste man vorgehen, um eine Beziehung zw. a_1, a_2, b_1 und b_2 bzw. a_1, a_2, c_1 und c_2 zu erhalten?
Legt man statt α β übereinander, erhält man $a_2 : a_1 = c_2 : c_1$ und im Falle von γ: $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$.

Somit erhalten wir drei Proportionen, die folgendermassen zusammengefasst werden können:
$a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$ bzw. $a_1 : b_1 : c_1 = a_2 : b_2 : c_2$

Du hast also den Satz bewiesen:

Stimmen zwei Dreiecke in zwei (und damit in allen) Winkeln überein, so haben sie gleiche Seitenverhältnisse.

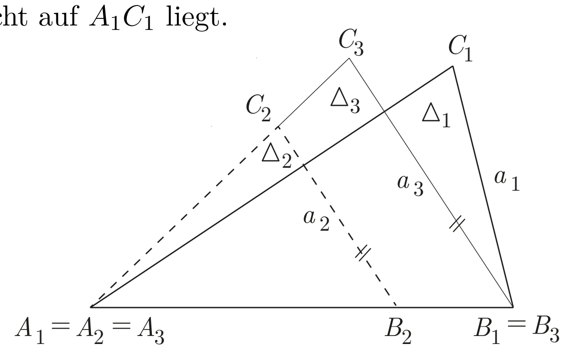
14. Hier folgt der Kehrsatz des vorangegangen Satzes.

Behauptung: Zwei Dreiecke mit gleichen Seitenverhältnissen haben gleiche Winkel.

Beweis:

Gegeben sind die beiden Dreiecke $\triangle_1 = A_1B_1C_1$ und $\triangle_2 = A_2B_2C_2$ mit je gleichen Seitenverhältnissen, d. h. mit $a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2$.

Da zum jetzigen Zeitpunkt davon ausgegangen werden muss, dass die Winkel der beiden Dreiecke nicht übereinstimmen, wurde im Bild das Dreieck $\triangle_2$ so positioniert, dass $A_1 = A_2$ und B_2 auf A_1B_1 liegt. Vom Punkt C_2 muss also angenommen werden, dass er nicht auf A_1C_1 liegt.



Wir definieren ein neues Dreieck $\triangle_3 = A_3B_3C_3$ mit

- $\alpha_3 = \alpha_2$, $\beta_3 = \beta_2$, $\gamma_3 = \gamma_2$ (d. h. winkelgleich wie $\triangle_2$)
- $c_3 = c_1$ (d. h. gleiche Grundseite wie $\triangle_1$)

Ein solches Dreieck erhalten wir, indem wir die Seite a_2 parallel durch B_1 verschieben (ausgehend von der speziellen Lage rechts).

Die beiden Dreiecke $\triangle_2$ und $\triangle_3$ sind winkelgleich. Folglich haben sie gleiche Seitenverhältnisse.

Die Beweisidee besteht nun darin, das neue Dreieck $\triangle_3$ mit dem Dreieck $\triangle_1$ zu vergleichen und zu zeigen, dass die beiden kongruent und daher winkelgleich sind.

Vervollständige die Begründungen der einzelnen Beweisschritte.

(1) $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$ Voraussetzung

(2) $a_1 : c_1 = a_2 : c_2$ Vertauschung der Innenglieder

(3) $a_2 : c_2 = a_3 : c_3$ $\triangle_2$ und $\triangle_3$ haben gleiche Seitenverhältnisse.

(4) $a_2 : c_2 = a_3 : c_1$ Bei der Proportion in (3) kann c_3 durch c_1 ersetzt werden.

(5) $a_1 : c_1 = a_3 : c_1$ Die Proportionen (2) und (4) können gleichgesetzt werden.

(6) $a_1 : a_3 = c_1 : c_1$ Vertauschung der Innenglieder

(7) $a_1 = a_3$ Da bei (6) die Variablen rechts gleich sind, sind es auch die linken.

Führen wir denselben Beweis mit b anstatt mit a durch, erhalten wir $b_1 = b_3$. Somit sind die Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_3$ kongruent wegen des Kongruenzsatzes SSS, haben also dieselben Winkel. Da aber das Dreieck $\triangle_3$ winkelgleich zum Dreieck $\triangle_2$ ist, folgt daraus, dass auch die beiden Dreiecke $\triangle_1$ und $\triangle_2$ winkelgleich sind. Somit hat sich herausgestellt, dass die Ecke C_2 im Bild oben auf A_1C_1 liegen sollte. ■

Somit können wir die beiden Sätze der Aufgaben 13 und 14 zu einem zusammenfassen.

WW-Satz
Zwei Dreiecke sind genau dann winkelgleich, wenn sie gleiche Seitenverhältnisse haben.

Ist der Ähnlichkeitsbegriff bekannt, so folgt also unmittelbar daraus:

Sind zwei Dreiecke winkelgleich, so sind sie ähnlich.

Sowie

Haben zwei Dreiecke gleiche Seitenverhältnisse, so sind sie ähnlich.

7.2 Ähnliche Figuren

16. a) Die ersten beiden Figuren sind z. B. nicht ähnlich. Sie sind zwar etwa gleich breit, der erste ist jedoch fast doppelt so hoch wie der zweite. Ihre Form ist deshalb unterschiedlich.
Hingegen sind die erste und dritte ähnlich. Der Verkleinerungsfaktor ist hier konstant ca. $\frac{1}{2}$. Die Spiegelung und Drehung haben keinen Einfluss, sie verändern die Form nicht.

b) Die Figuren 1, 3, 9, die Figuren 2, 6, 10 sowie die Figuren 4 und 7. (5 und 8 sind quasi single.)

c) i. Zum Beispiel zwei Quadrate
ii. Zum Beispiel zwei mit unterschiedlichen Winkeln
iii. Zum Beispiel zwei mit gleicher Breite und unterschiedlicher Länge
iv. Zum Beispiel ein Quadrat und ein Rhombus
v. Ja, wenn beide ähnliche Rhomben sind.

d) Ähnlich sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ sowie $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$ sowie $\mathcal{F}$, $\mathcal{J}$. Sie sind ähnlich, weil es jeweils einen konstanten Verkleinerungs- bzw. Vergrösserungsfaktor gibt. Die gleichschenkligen Dreiecke $\mathcal{E}$ und $\mathcal{G}$ sind single.

e) Rechtwinklig sind die Dreiecke $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$.
Gleichschenklig sind die Dreiecke $\mathcal{E}$ und $\mathcal{G}$.

f) Es gibt jeweils keinen gemeinsamen Streckfaktor.
Anschauliche Begründung: Das gleichschenklige Dreieck $\mathcal{E}$ ist fast gleichseitig, das gleichschenklige Dreieck $\mathcal{G}$ ist ganz schmal, sie sind also sicherlich nicht ähnlich.
Dreieck $\mathcal{F}$ ist spitzer als Dreieck $\mathcal{B}$, die beiden rechtwinkligen Dreiecke sind folglich nicht ähnlich.

g) Sie müssen dieselben Seitenverhältnisse und dieselben Winkel haben.

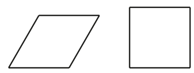
Die Definition hier ist äquivalent dazu, dass zwei Vielecke ähnlich sind, wenn es eine Ähnlichkeitsabbildung (Verknüpfung von zentrischer Streckung und Kongruenzabbildung) gibt, die die beiden Figuren aufeinander abbildet. Für Figuren, die keine Vielecke sind, wie z. B. den Kreis, ist erstere Definition teilweise nicht anwendbar.

17. a) Zwei Kreise sind ähnlich, da sie dieselbe Form haben (siehe auch obige Bemerkung).

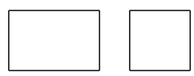
b) Zwei gleichseitige Dreiecke sind ähnlich, da sie dieselbe Form haben resp. da alle Winkel 60° betragen und das Seitenverhältnis immer $1:1:1$ beträgt.

c) Zwei gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, da sie dieselbe Form haben resp. da die Winkel bei allen 45°, 45° und 90° betragen und das Seitenverhältnis immer $1:1:\sqrt{2}$ beträgt.

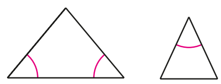
d) Zwei Rhomben müssen nicht ähnlich sein, da die Winkel unterschiedlich sein können. Gegenbeispiel: schiefwinklige Raute und das Quadrat



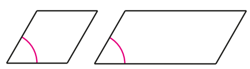
e) Zwei Rechtecke müssen nicht ähnlich sein, da die Seitenverhältnisse unterschiedlich sein können. Gegenbeispiel: ungleichseitiges Rechteck und das Quadrat



f) Zwei gleichschenklige Dreiecke mit einem 50°-Winkel müssen nicht ähnlich sein, da der 50°-Winkel ein Basiswinkel oder der Winkel an der Spitze sein kann.



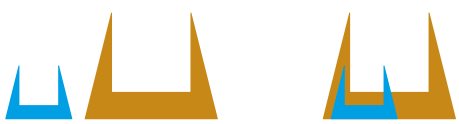
g) Zwei Parallelogramme mit einem 60°-Winkel müssen nicht ähnlich sein, da die Seitenverhältnisse unterschiedlich sein können.



h) Zwei Quadrate sind ähnlich, da sie dieselbe Form haben resp. da alle Winkel 90° betragen und das Seitenverhältnis immer $1:1:1:1$ beträgt.

i) Zwei Strecken im geometrischen Sinne sind ähnlich, da ihre Breite null ist.

18. Die Sechsecke müssen konkav sein.



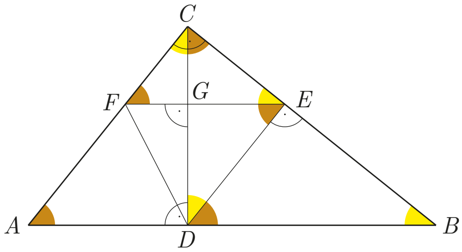
19. a) 6 b) 12 c) 10 d) 3.75

e) $6, 9$ oder $4, 4$ f) $20, 36$ oder $43.2, 28.8$ oder $13.\overline{3}, 16$ g) 8 oder 27

h) Fehlende Seite im ersten Dreieck: $x \in]1, 3[$ (Dreiecksungleichung)
Fehlende Seite im zweiten Dreieck: $2x$

20. Alle ähnlichen Teildreiecke besitzen einen rechten sowie einen gelben und braunen Winkel.

Das heisst die acht Dreiecke ACD, CBD, FEC, FCG, DBE, CDE, EDG und CEG sind ähnlich zum Dreieck ABC.



21. a)

b)

c)

d)

e)

f)

22. a) Sie sind ähnlich. (S:W:S, Streckfaktor $k = 1.5$)

b) Sie sind ähnlich. (S:S:S, Streckfaktor $k = 2$)

c) Sie sind ähnlich. (WW, beide Dreiecke haben die Winkel 28°, 73° und 79°.)

d) Unbestimmt (S:S:W, der Winkel liegt der kleineren Seite gegenüber.)

e) Sie sind ähnlich. (Z. B. S:S:S, sie sind ähnlich zum rechtwinkligen Dreieck 3-4-5, Streckfaktor $k = \frac{2}{3}$.)

f) Unbestimmt (ABC ist gleichseitig, $A'B'C'$ kann, muss aber nicht gleichseitig sein.)

g) Sie sind ähnlich. (WW, ABC ist gleichschenklig $\Rightarrow \alpha = \beta = 72°$.)

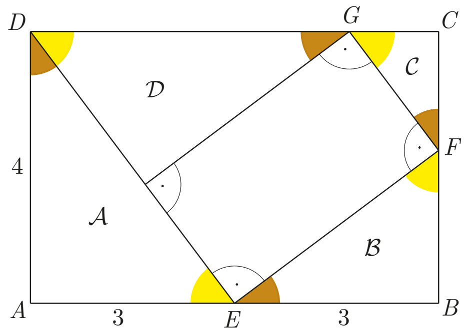
h) Sie sind nicht ähnlich. (ABC ist gleichschenklig-rechtwinklig, d. h. hat Winkel 45°, 45° und 90°.)

23. Der Umfang u beträgt 22 cm. Der Streckfaktor ist $\frac{3}{2}$. Also: $a' = 12\,\text{cm}$, $b' = 9\,\text{cm}$, $c' = 4.5\,\text{cm}$, $d' = 7.5\,\text{cm}$.

24. a) WW: Alle vier Dreiecke sind rechtwinklig und bestehen aus einem gelben und braunen Winkel, da sich der gelbe und braune Winkel auf 90° ergänzen.

b) $\overline{BF} = \frac{9}{4}$, $\overline{FC} = \frac{7}{4}$, $\overline{CG} = \frac{21}{16}$ und $\overline{GD} = \frac{75}{16}$

c) $\overline{EF} = \frac{15}{4}$, $\overline{FG} = \frac{35}{16}$ $\Rightarrow$ Das Seitenverhältnis des kleinen Rechtecks ist 7 : 12, das Seitenverhältnis des grossen Rechtecks ist 4 : 6
$\Rightarrow$ sie sind nicht ähnlich.



25. a) $\alpha = 45°$ (Winkelsumme im $\triangle ABC$) $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$ und $\delta = 90°$ ($\triangle ABC \sim \triangle BCD$) $\Rightarrow$ $\varepsilon = 90°$ (Nebenwinkel von δ) $\Rightarrow$ $\psi = 45°$ (Winkelsumme im $\triangle ADC$)
$\overline{BC} = 4$ und $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ und $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$ (Alle (Teil-)Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig.)

b) $\gamma = 40°$ (Winkelsumme im $\triangle ABC$); $\delta = 100°$ ($\triangle ABC \sim \triangle ADB$) $\Rightarrow$ $\varepsilon = 80°$ (Nebenwinkel von δ)

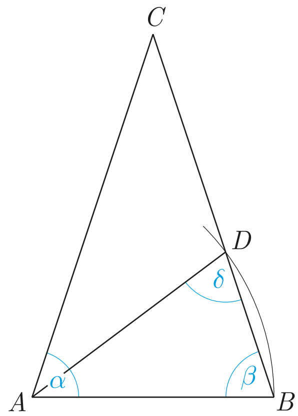
$\overline{BD} = r$ ($\triangle ABD$ ist gleichschenklig); $\overline{BC} = s$ ($\triangle ABC$ ist gleichschenklig);
$\overline{AC} = \dfrac{s^2}{r}$ ($\triangle ABC \sim \triangle ABD$) $\Rightarrow$ $\overline{CD} = \dfrac{s^2}{r} - r = \dfrac{s^2 - r^2}{r}$

c) $\gamma = 90°$ und $\varphi = 53°$ ($\triangle ABC \sim \triangle CDE$); $\beta = \delta = 37°$ (Winkelsumme im Dreieck)
$\overline{CD} = 4$ (Pythagoras) $\Rightarrow$ $\overline{DE} = \frac{16}{5}$ und $\overline{CE} = \frac{12}{5}$ ($\triangle ABC \sim \triangle CDE$)

26. a) Die drei blauen Winkel sind alle gleich gross ($\alpha = \beta$, weil ABC nach Voraussetzung gleichschenklig ist, und $\beta = \delta$, weil ABD nach Konstruktion gleichschenklig ist.). Folglich kann WW angewandt werden.

b) $\overline{BD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{BD} : 4\,\text{cm} = 4\,\text{cm} : 6\,\text{cm} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{8}{3}\,\text{cm}$
$\Rightarrow \overline{CD} = \frac{10}{3}\,\text{cm}$

c) Für gleichseitige Dreiecke ABC ist der Flächeninhalt des Dreiecks BDA gleich gross, für Dreiecke ABC mit $\gamma < 60°$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks BDA kleiner und für Dreiecke ABC mit $\gamma > 60°$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks BDA grösser.



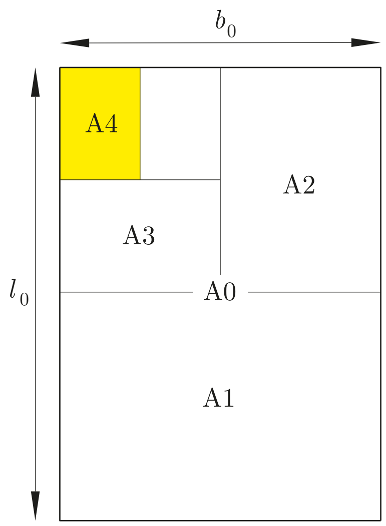
27. Sei l_0 die Länge und b_0 die Breite des A0-Blattes. Die Länge l_1 des A1-Blattes ist folglich b_0 und die Breite b_1 ist $\frac{l_0}{2}$. Da das A0- und das A1-Blatt ähnlich sind, gilt die nachstehende Beziehung.

$$l_0 : b_0 = l_1 : b_1 \Leftrightarrow l_0 : b_0 = b_0 : \frac{l_0}{2}$$

Dies führt auf die Gleichung $\boxed{l_0 = b_0 \cdot \sqrt{2}}$.

Zusammen mit $l_0 \cdot b_0 = 1\,\text{m}^2$ erhält man somit für $l_0 \approx 118.92\,\text{cm}$ und für $b_0 \approx 84.09\,\text{cm}$. Die Länge und die Breite des A4-Blattes entsprechen je einem Viertel der Länge und Breite des A0-Blattes.

Man erhält $l_4 \approx 29.73\,\text{cm}$ und $b_4 \approx 21.02\,\text{cm}$.



7.3 Strahlensätze

28\. a)

g:	$\overline{SA_1} = 1\,\text{cm}$	$\overline{SB_1} = 2\,\text{cm}$	$\overline{SC_1} = 4\,\text{cm}$	$\overline{SD_1} = 7\,\text{cm}$	$\overline{SE_1} = 9\,\text{cm}$	$\overline{SF_1} = 54\,\text{cm}$
h:	$\overline{SA_2} = 1.2\,\text{cm}$	$\overline{SB_2} = 2.4\,\text{cm}$	$\overline{SC_2} = 4.8\,\text{cm}$	$\overline{SD_2} = 8.4\,\text{cm}$	$\overline{SE_2} = 10.8\,\text{cm}$	$\overline{SF_2} = 64.8\,\text{cm}$

b) Die Abschnitte der Geraden g und h verhalten sich proportional.

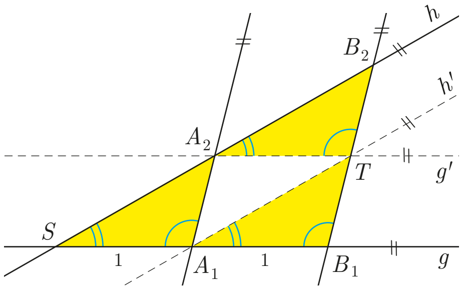
c) Siehe a)

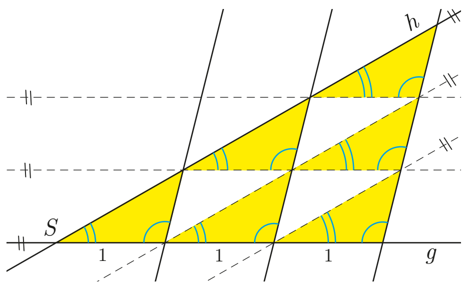
d) Werden zwei Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden wie die Abschnitte auf der anderen Geraden.

e) Diese Frage ist v. a. sinnvoll, wenn der WW-Satz (☞ Aufg. 14, S. 7) behandelt wurde oder die Lernenden schon über Kenntnisse in der zentrischen Streckung oder der Ähnlichkeit verfügen.

- Mit Hilfe des WW-Satzes oder des Ähnlichkeitsbegriffes:
  Der erste Strahlensatz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem WW-Satz. (Die Dreiecke SA_1A_2, SB_1B_2, SC_1C_2, etc. sind alle ähnlich, da sie dieselben Winkel haben (Stufenwinkel).)
- Mit Hilfe einer zentrischen Streckung:
  Da die Geraden parallel sind, können sie mit Hilfe einer zentrischen Streckung (mit Streckzentrum S, Streckfaktor $k = 1, 2, 4, \ldots$) ineinander überführt werden. Da alle Bildpunkte k-mal so weit von S entfernt sind wie die Urbildpunkte, folgt daraus der Satz.
- Ohne Vorwissen:
  Am besten gibt man den Schülerinnen und Schülern eine einfache Situation vor, an der sie exemplarisch die Plausibilität des Strahlensatzes sehen können.

  Ein Beispiel hierfür sind Parallelen mit gleichen Abständen. Mit Hilfe des Tipps, je Parallelen zu g und h zu zeichnen, entdecken die Schülerinnen und Schüler bald die entstehenden kongruenten Dreiecke. Mit diesen lassen sich dann die gewünschten Proportionen herleiten.





29\. $$\frac{\overline{SB_1}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{SB_2}}{\overline{SA_2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{SA_1} + \overline{A_1B_1}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{SA_2} + \overline{A_2B_2}}{\overline{SA_2}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_1}}}_{1} + \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{SA_1}} = \underbrace{\frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_2}}}_{1} + \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SA_2}} \Leftrightarrow \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{SA_2}}$$

Beim ersten Strahlensatz spielt es somit keine Rolle, ob die Abschnitte bei S beginnen oder nicht.

30\. a) $\overline{A_1A_2} = 0.4\,\text{cm}$, $\overline{B_1B_2} = 0.8\,\text{cm}$, $\overline{C_1C_2} = 1.6\,\text{cm}$, $\overline{D_1D_2} = 2.8\,\text{cm}$
Die Abschnittslängen auf den Parallelen sind proportional zu den Abschnittslängen auf g und h, sofern man diese von S aus misst.

b) $\overline{A_1A_2} : \overline{E_1E_2} = \overline{SA_1} : \overline{SE_1} \Leftrightarrow 0.4\,\text{cm} : 8\,\text{cm} = 1\,\text{cm} : \overline{SE_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{SE_1} = 20\,\text{cm}$
$\overline{SA_2} : \overline{SE_2} = \overline{SA_1} : \overline{SE_1} \Leftrightarrow 1.2\,\text{cm} : \overline{SE_2} = 1\,\text{cm} : 20\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \overline{SE_2} = 24\,\text{cm}$

c) Werden zwei sich in S schneidende Geraden von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die von S aus gemessenen Abschnitte auf den Geraden.

d) Diese Frage ist v. a. sinnvoll, wenn der WW-Satz behandelt wurde oder die Lernenden schon über Kenntnisse in der zentrischen Streckung oder der Ähnlichkeit verfügen.

- Mit Hilfe des WW-Satzes oder des Ähnlichkeitsbegriffes:
  Unmittelbare Folgerung, wie bei ☞ Aufg. 28 e)
- Mit Hilfe einer zentrischen Streckung:
  Ähnlich wie ☞ Aufg. 28 e) Bildstrecken sind k-mal so lang wie die Urbildstrecken.
- Ohne Vorwissen: Mit der Figur aus ☞ Aufg. 28 e) und dem ersten Strahlensatz

31. Sofern bei der vorherigen Aufgabe nicht schon deutlich darauf hingewiesen wurde, soll die Aufgabe hier den Lernenden klar machen, dass der zweite Strahlensatz nur gilt, wenn von S aus gemessen wird: Sara hat einen Fehler gemacht.

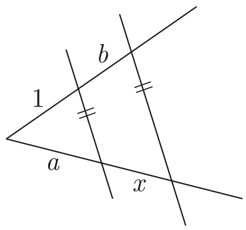
32. a) $x : 1.5 = 6 : 4.5 \quad \Rightarrow \quad x = 1.5 \cdot \frac{6}{4.5} \quad \Rightarrow \quad x = 2$

    b) $x : 4.5 = 2.4 : 3.6 \quad \Rightarrow \quad x = 4.5 \cdot \frac{2.4}{3.6} \quad \Rightarrow \quad x = 3$

    c) $x : 6 = 1.3 : 6.5 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \cdot \frac{1.3}{6.5} \quad \Rightarrow \quad x = 1.2$

    d) Zum Beispiel: $x : 1.5 = 6 : 4.5$, $1.5 : x = 4.5 : 6$, $x : 6 = 1.5 : 4.5$, $4.5 : 1.5 = 6 : x$

    e) Siehe Skizze. Es gilt $b : 1 = x : a$ und folglich $x = a \cdot b$.



33. $\overline{SE} : \overline{SF} = 6 : 9 = 2 : 3$, $\quad \overline{SD} : \overline{SE} = 8 : 6 = 4 : 3$, $\quad \overline{EF} : \overline{SD} = 3 : 8$,
    $\overline{SC} : \overline{SB} = 9 : 6 = 3 : 2$, $\quad \overline{SB} : \overline{SA} = 6 : 8 = 3 : 4$, $\quad \overline{SA} : \overline{SC} = 8 : 9$

34. a) $x : 5.6 = 4 : 6.4 \quad \Rightarrow \quad x = 5.6 \cdot \frac{4}{6.4} \quad \Rightarrow \quad x = 3.5$

    b) $x : 3 = 10 : 4 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \cdot \frac{10}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 7.5$

    c) $(x + 1.8) : 3.6 = 1.8 : 2.7 \quad \Rightarrow \quad x = 3.6 \cdot \frac{1.8}{2.7} - 1.8 \quad \Rightarrow \quad x = 0.6$

    d) Zum Beispiel: $x : 4 = 5.6 : 6.4$, $\quad x : 5.6 = 4 : 6.4$, $\quad 6.4 : 5.6 = 4 : x$, $\quad 6.4 : 4 = 5.6 : x$

35. $\frac{a}{b} \overset{1.\,SS}{=} \frac{c}{d}$, $\quad \frac{a+b}{f} \overset{2.\,SS}{=} \frac{a}{e}$, $\quad \frac{e}{f} \overset{2.\,SS}{=} \frac{a}{a+b}$ und $\frac{e}{f} \overset{2.\,SS}{=} \frac{c}{c+d}$

    $\frac{c}{c+d} \overset{1.\,SS}{=} \frac{a}{a+b}$ und $\frac{c}{c+d} \overset{2.\,SS}{=} \frac{e}{f}$, $\quad \frac{e}{c} \overset{2.\,SS}{=} \frac{f}{c+d}$, $\quad \frac{a+b}{c+d} \overset{1.\,SS}{=} \frac{a}{c} \overset{1.\,SS}{=} \frac{b}{d}$

36. Weitere Grundaufgaben zu den beiden Strahlensätzen.

	a	b	c	d	e	f
a)	2 cm	3 cm	4 cm	6 cm	2.5 cm	6.25 cm
b)	2 mm	4 mm	3 mm	6 mm	1.5 mm	4.5 mm
c)	5 dm	5 dm	7 dm	7 dm	6 dm	12 dm
d)	15 km	3 km	6 km	1.2 km	10 km	12 km
e)	4 cm	3 cm	1.6 cm	1.2 cm	3.6 cm	6.3 cm
f)	12 dm	4.8 m	80 cm	3.2 m	0.6 m	3 m
g)	p cm	$\frac{p}{3}$ cm	$3q$ cm	q cm	$\frac{3}{4}r$ cm	r cm

37. $\frac{a}{b} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ (1. SS), $\quad \frac{f}{g} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ (2. SS), $\quad \frac{g}{d} = ?$ (unbestimmt),

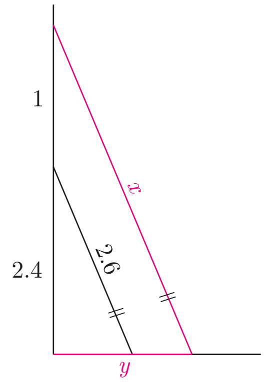
    $\frac{c+d}{d} = \frac{18+12}{12} = \frac{5}{2}$ (1. SS), $\quad \frac{e}{f} = ?$ (unbestimmt), $\quad \frac{h}{e} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ (2. SS),

    $\frac{c}{b} = ?$ (unbestimmt), $\quad \frac{e+f}{g+h} = \frac{a}{b} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ (2. und 1. SS)

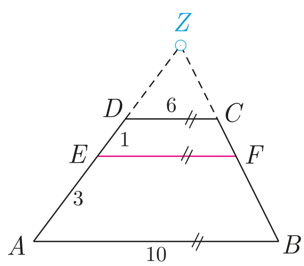
38. a) $c = 3.2\,\text{cm}$, $f = 8.4\,\text{cm}$
    b) $b = 2.5\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$, $d = 2\,\text{cm}$
    c) $a = 9\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 3\,\text{cm}$, $d = 2\,\text{cm}$ oder $a = 3\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$, $c = 9\,\text{cm}$, $d = 6\,\text{cm}$ oder $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$, $d = 4\,\text{cm}$
    Insgesamt gibt es unendlich viele Lösungen. Es muss jeweils gelten $a : b = 3 : 2$, $c : d = 3 : 2$ und $a + b + c + d = 20\,\text{cm}$. Man hat also drei Gleichungen und vier Unbekannte.

39. Jonathan kann sich so hinstellen, dass die beiden Schattenenden aufeinander liegen. Somit erhält man eine Strahlensatzfigur und dadurch die Proportion $h : 1.61 = 11.7 : 2.99$.
    Die Höhe h der Birke ist also $6.3\,\text{m}$.

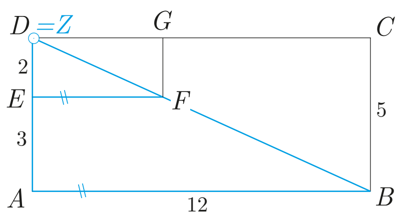
40. Der Maler verlängert die Höhe durch seine Körperlänge um $3\,\text{m} - 2.4\,\text{m} = 0.6\,\text{m}$.
    Für die $4\,\text{m}$ benötigt er daher eine Leiter, die eine Höhe von $4\,\text{m} - 0.6\,\text{m} = 3.4\,\text{m}$ erreicht.
    $x : 2.6\,\text{m} = 3.4\,\text{m} : 2.4\,\text{m} \Rightarrow x \approx 3.68\,\text{m}$
    $\Rightarrow$ Die Leiter muss mindestens $3.7\,\text{m}$ lang sein.
    $y^2 = x^2 - (3.4\,\text{m})^2 \Rightarrow y \approx 1.42\,\text{m}$
    $\Rightarrow$ Die Leiter muss $1.4\,\text{m}$ von der Wand aufgestellt werden.



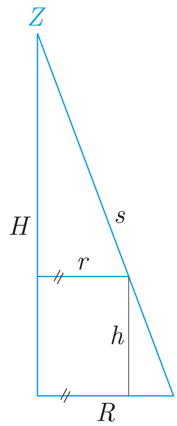
41. Die Seiten BC und AD verlängern, so dass eine Strahlensatzfigur entsteht.
    Der zweite Strahlensatz liefert $\overline{ZD} = 6\,\text{cm}$ sowie anschliessend $\overline{EF} = 7\,\text{cm}$.
    Alternativer Lösungsweg: Verschiebe BC parallel durch D. EF wird dadurch in zwei Teile unterteilt. Berechne den linken mit dem zweiten Strahlensatz.



42. Die blau hervorgehobenen Strecken bilden eine Strahlensatzfigur. Folglich gilt $\overline{EF} : 12\,\text{cm} = 2\,\text{cm} : 5\,\text{cm}$ und daher $\overline{EF} = 4.8\,\text{cm}$ und $\overline{CG} = 7.2\,\text{cm}$.
    $\overline{BD} = 13\,\text{cm}$ (Pythagoras), $\overline{BF} : 13\,\text{cm} = 3\,\text{cm} : 5\,\text{cm}$ (erster Strahlensatz) und daher $\overline{BF} = 7.8\,\text{cm}$.



43. Die Hälfte eines Querschnitts durch Kegel und Zylinder enthält eine Strahlensatzfigur. Es gilt also $(H - h) : H = r : R$.
    a) $7.5\,\text{cm} : r = 12\,\text{cm} : 4\,\text{cm} \Rightarrow r = 2.5\,\text{cm}$
    b) $(H - 6.75\,\text{cm}) : 2.5\,\text{cm} = H : 4\,\text{cm} \Rightarrow H = 18\,\text{cm}$
    c) $R = 8$ (Pythagoras) $\Rightarrow (15\,\text{cm} - h) : 2\,\text{cm} = 15\,\text{cm} : 8\,\text{cm} \Rightarrow$ $h = 11.25\,\text{cm}$



44. In der Figur kommen zwei unterschiedliche Gruppen von Geraden vor, die je untereinander parallel sind. Somit gehören die Abschnitte auf den sich schneidenden Geraden zu jeweils zwei verschiedenen Strahlensatzfiguren.

    Bemerkung: Die Teilaufgaben können auf unterschiedliche Arten gelöst werden.

    a) Einerseits: $j \parallel l \Rightarrow a : (b + c) = g : h$, andererseits: $k \parallel m \Rightarrow g : h = b : c$.
    Also $a : (b + c) = b : c$ ■

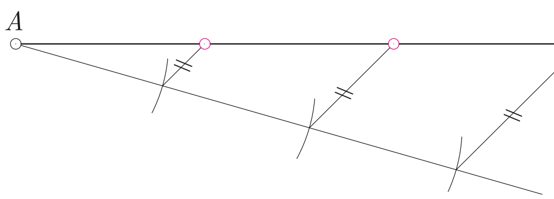
    b) Einerseits: $z \parallel k \Rightarrow z : k = (a + b + c) : (b + c)$, andererseits: $j \parallel l \Rightarrow j : l = (a + b + c) : (b + c)$
    Also $z : k = j : l$ ■

    c) Da $k \parallel p$ gilt $k : p = (b + c) : d$. Weil $l \parallel n$ gilt auch $l : n = (b + c) : d. \Rightarrow k : p = l : n$.
    Vertauscht man die Innenglieder, erhält man $k : l = p : n$.

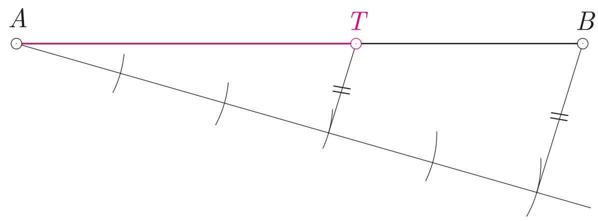
    d) $x : d = h : (b + c) \Rightarrow x : 11\,\text{cm} = 4\,\text{cm} : 5.5\,\text{cm} \Rightarrow x = 8\,\text{cm}$
    $y : l = (x + i) : h \Rightarrow y : 4.5\,\text{cm} = 16\,\text{cm} : 4\,\text{cm} \Rightarrow y = 18\,\text{cm}$
    $g : h = b : c \Rightarrow g = 4\,\text{cm}$; $a : (b + c) = g : h \Rightarrow a = 5.5\,\text{cm}$ (oder direkt mit Proportion aus a))
    $\Rightarrow z : (a + b + c) = p : d \Rightarrow z = 13\,\text{cm}$

45. a) Mit dem Zirkel wird auf einem beliebigen Strahl von A aus eine beliebige Strecke viermal abgetragen. Der Endpunkt wird mit B verbunden und anschliessend wird dreimal parallel verschoben. Auf Grund des ersten Strahlensatzes verhalten sich die Abschnitte auf AB jeweils wie $1 : 1 : 1 : 1$.

    b)



    c)

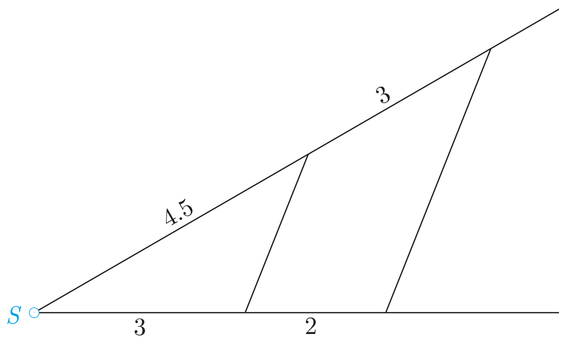


46. Zuerst werden die Innenglieder vertauscht. Dann vergleichen wir je das linke und rechte Verhältnis mit den Abschnitten auf der Geraden g. Der zweite Strahlensatz liefert dann die Identität.

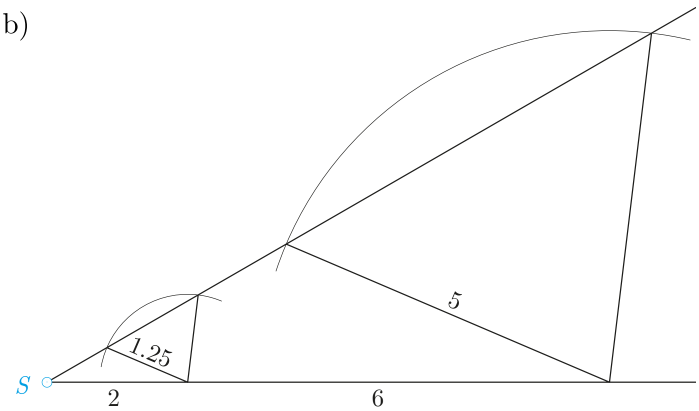
    $\overline{AB} : \overline{DE} \overset{2.\,\text{SS}}{=} \overline{SB} : \overline{SE} \overset{2.\,\text{SS}}{=} \overline{BC} : \overline{EF}$ ■

47. Die Aufgabe soll Anlass geben, den Sachverhalt zu thematisieren, dass von der Korrektheit eines Satzes nicht auf die Korrektheit des Kehrsatzes geschlossen werden kann. (Abschnitt zur Logik ☞ S. 42)

    a)



    b)



    Da der Kehrsatz des ersten Strahlensatzes gilt, folgt aus $3 : 2 = 4.5 : 3$, dass die Strecken parallel sind.

    Die zweite Figur illustriert, dass der Kehrsatz des zweiten Strahlensatzes nicht korrekt ist. Es gilt zwar $2 : 8 = 1.25 : 5$, jedoch sind die beiden Strecken nicht zwingend parallel.