essentials

Karl-Heinz Zimmermann

Berechenbarkeit

Berechnungsmodelle und Unentscheidbarkeit

Springer Spektrum

essentials

essentials liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art" in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. *essentials* informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Expertenwissen von Springer-Fachautoren kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet. *essentials:* Wissensbausteine aus den Wirtschafts-, Sozial- und Geisteswissenschaften, aus Technik und Naturwissenschaften sowie aus Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen. Von renommierten Autoren aller Springer-Verlagsmarken.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/13088

Karl-Heinz Zimmermann

Berechenbarkeit

Berechnungsmodelle und Unentscheidbarkeit

Springer Spektrum

Karl-Heinz Zimmermann
Institut für Eingebettete Systeme
TU Hamburg
Hamburg, Deutschland

ISSN 2197-6708 ISSN 2197-6716 (electronic)
essentials
ISBN 978-3-658-31738-6 ISBN 978-3-658-31739-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-31739-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Was Sie in diesem *essential* finden können

Kurz ausgedrückt, eine Einführung in die wesentlichen Konzepte der Berechenbarkeitstheorie. Dabei geht es vor allem um zwei fundamentale Aspekte. Zum einen steht die mathematische Formalisierung und Präzisierung des Begriffs der Berechenbarkeit im Mittelpunkt. Es gibt mehrere Ansätze, wie URM- und GOTO-Berechenbarkeit sowie Berechenbarkeit mittels partiell-rekursiver Funktionen, um formal Rechenvorschriften zu beschreiben. All diese Ansätze erweisen sich letztlich als gleichwertig, wodurch sich die Church-Turing-These begründet: Jede intuitiv berechenbare Funktion ist partiell-rekursiv.

Zum anderen erfolgt eine Auslotung der Grenzen der Berechenbarkeit. Es gibt Entscheidungsprobleme, also Probleme mit Ja-Nein-Antworten, die algorithmisch nicht lösbar sind. Das prominenteste Beispiel aus der Informatik ist das Halteproblem, das auf einen Entscheidungsalgorithmus abzielt, der die Frage, ob ein Programm mit einer Eingabe hält oder nicht, beantwortet. Um die Nichtexistenz einer Entscheidungsprozedur zu beweisen, muss eine Argumentation über *alle* Rechenvorschriften erfolgen. Die Berechenbarkeitstheorie stellt Methoden und Verfahren zur Verfügung, um derartige Nichtexistenzfragen zu behandeln.

Vorwort

Dieses *essential* handelt von den Grenzen der Algorithmik, der algorithmischen Beschreibung von Problemen. Zentral ist dabei einerseits die Frage nach der Formalisierung des Begriffs der Berechenbarkeit und andererseits die Verortung der Grenzen der Berechenbarkeit.

Jeder hat eine gewisse Vorstellung davon, was intuitiv berechenbar ist. Präzisiert wird dieser Begriff in der Berechenbarkeitstheorie anhand verschiedener Modelle, die teils ganz unterschiedliche Ausprägungen in punkto Abstraktion besitzen und so verschiedenartige Zugänge zur Berechenbarkeitstheorie ermöglichen.

Die Berechenbarkeitstheorie beschäftigt sich mit der Existenz von algorithmischen Problemen, nicht jedoch mit der Effizienz, mit der Lösungen gefunden werden können. Letztere Problematik gehört in den Bereich der Komplexitätstheorie, einem eigenständigen Teilgebiet der theoretischen Informatik. Die Grenzen der Berechenbarkeit lassen sich durch sogenannte unentscheidbare Probleme ausloten – Probleme, die auf algorithmische Weise nicht lösbar sind.

Die ersten Untersuchungen auf dem Gebiet der Berechenbarkeit wurden u.a. von Alonzo Church, Kurt Gödel, Stephen C. Kleene, Rózsa Péter, Emil Post und Alan Turing in den 1930er Jahren durchgeführt. Damit wurde die Berechenbarkeit als ein Zweig der theoretischen Informatik zu einer Zeit etabliert, als es den Begriff Informatik – entstanden aus dem Französischen „informatique" in den frühen 1960ern – noch gar nicht gab. Die fundamentalen Ergebnisse insbesondere von Alonso Church und Alan Turing führten zur allgemein akzeptierten Church-Turing-These, nach der jede intuitiv berechenbare Funktion partiell rekursiv ist.

Die Ergebnisse der Berechenbarkeit tangieren die Grenzen der Informatik, Logik und Mathematik. Die beiden Unvollständigkeitssätze von Kurt Gödel zeigen, dass nicht alle wahren Aussagen über natürliche Zahlen beweisbar sind und dass ein hinreichend reichhaltiges Axiomensystem mitsamt den Umformungsregeln nicht ausreicht, um formal seine Widerspruchsfreiheit zu entscheiden. Gödels unkonventionelle Herangehensweise ließ sich ohne Weiteres auf Rechenverfahren übertragen und bildete den Ausgangspunkt für die Berechenbarkeitstheorie. Erweiterungen seiner Ideen führten Alan Turing zur Unentscheidbarkeit des Halteproblems – der Frage, ob ein Computerprogramm mit beliebiger Eingabe jemals anhalten und eine Ausgabe liefern oder in einer endlosen Schleife stecken bleiben wird.

In diesem *essential* wird aufgezeigt, dass sich der Begriff der Berechenbarkeit mithilfe einfacher abstrakter Berechnungsmodelle etablieren lässt. Darauf aufbauend werden zentrale Konzepte der Berechenbarkeitstheorie sowie fundamentale unentscheidbare Probleme behandelt.

Dieses *essential* entstand aus einer zweistündigen Vorlesung über Berechenbarkeitstheorie, die der Autor für Informatik- und Mathematik-Studierende des zweiten Studienjahres an der Technischen Universität Hamburg in den letzten Jahren gehalten hat. Der Text wurde inmitten der Corona-Pandemie im Homeoffice angefertigt.

Karl-Heinz Zimmermann