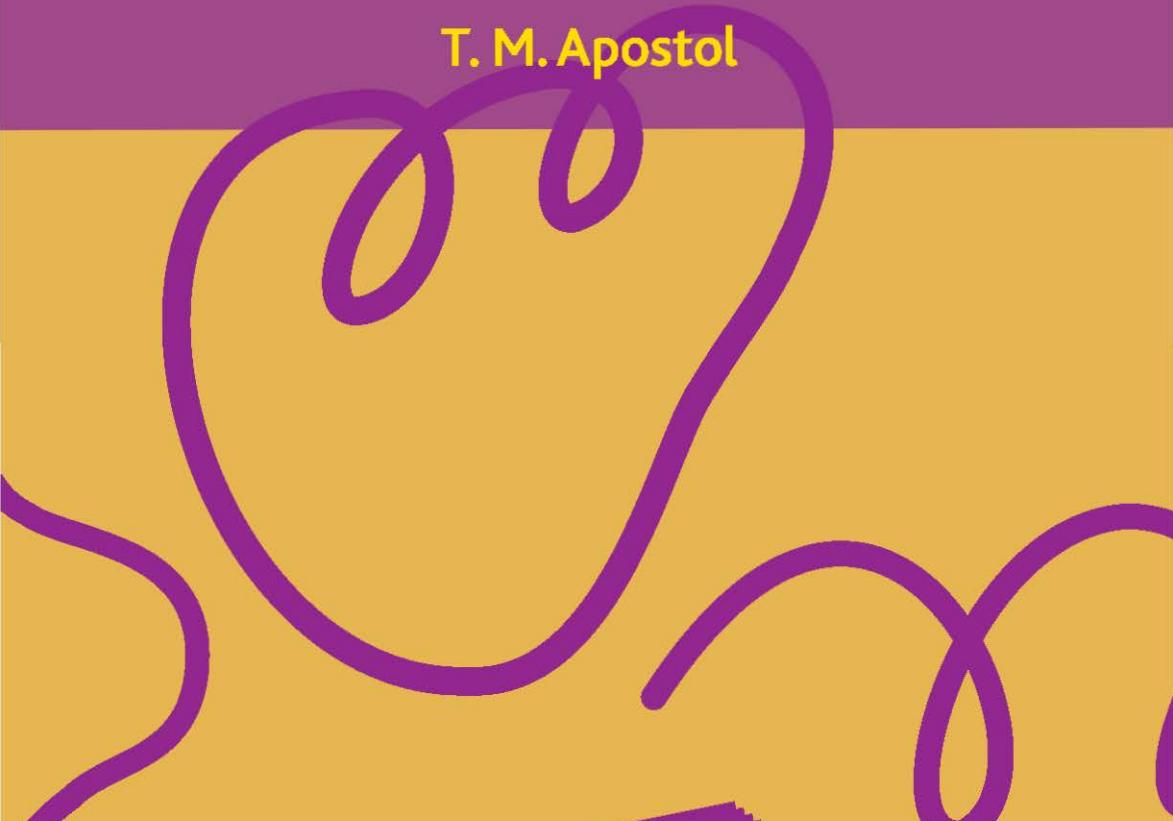


# Análisis Matemático

Segunda edición

T. M. Apostol



EDITORIAL REVERTÉ



# Análisis Matemático

Segunda edición

Tom M. Apostol

*California Institute of Technology*



EDITORIAL  
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

*Título de la obra original:*

**Mathematical Analysis**

*Versión original publicada en lengua inglesa por:*

**Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, U. S. A.**

Copyright © by Addison-Wesley Publishing Company. *All Rights Reserved*

Edición en papel:

© Editorial Reverté, S. A., 1976

ISBN: 978-84-291-5004-9

Edición e-book (PDF):

© Editorial Reverté, S. A., 2020

ISBN: 978-84-291-9448-7

*Versión española por:*

**Dr. José Pla Carrera**

Doctor en Matemáticas

Profesor de la Facultad de Matemáticas en la Universidad de Barcelona

*Revisada por:*

**Dr. Enrique Linés Escardó**

Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

**Propiedad de:**

**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**

Loreto, 13-15. Local B

08029 Barcelona. ESPAÑA

Tel: (34) 93 419 33 36

[reverte@reverte.com](mailto:reverte@reverte.com)

[www.reverte.com](http://www.reverte.com)

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

*A mis padres*



# Prólogo

*Una ojeada al índice analítico pondrá de manifiesto que este libro de texto trata temas de análisis a nivel de «Cálculo superior». La pretensión ha sido proporcionar un desarrollo de la materia que sea honesto, eficaz, puesto al día y, al mismo tiempo, que no resulте pedante. El libro constituye una transición del Cálculo elemental a cursos más avanzados de la teoría de las funciones real y compleja e introduce al lector un poco en el pensamiento abstracto que ocupa el análisis moderno.*

*La segunda edición difiere de la primera en muchos aspectos. La topología en conjuntos de puntos se explica al establecer los espacios métricos generales, así como el espacio euclídeo  $n$ -dimensional, y se han añadido dos nuevos capítulos sobre la integración de Lebesgue. Se ha suprimido lo referente a integrales lineales, análisis vectorial e integrales de superficie. Se ha cambiado el orden de algunos capítulos, se han escrito totalmente nuevos algunos apartados y se han añadido ejercicios nuevos.*

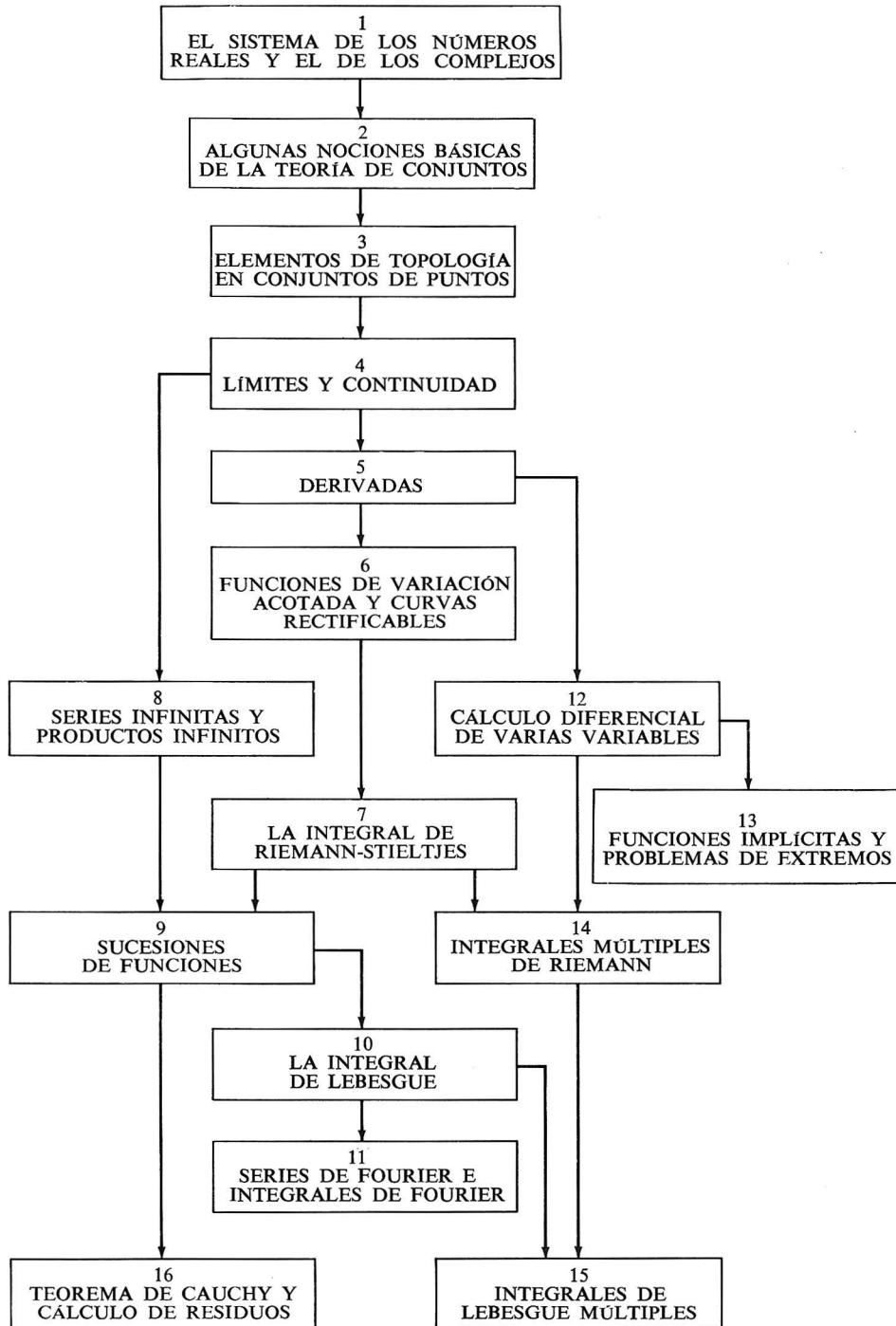
*El desarrollo de la integración de Lebesgue se deduce de la propuesta de Riesz-Nagy que se enfoca directamente a las funciones y sus integrales y no depende de la teoría de la medida. El tratamiento aquí está simplificado, puesto a la vista y un tanto reordenado para estudiantes de cursos inferiores.*

*La primera edición se ha seguido en cursos de matemáticas de distintos niveles, desde el primer curso de estudiantes no graduados al primero de graduados, tanto como libro de texto, como de referencia suplementaria. La segunda edición conserva esa flexibilidad: por ejemplo, los capítulos 1 al 5, 12 y 13 son un curso de cálculo diferencial de funciones con una o más variables; los capítulos 6 al 11, 14 y 15, un curso de teoría de la integración. Son posibles muchas otras combinaciones: cada profesor puede elegir los temas que se acomoden a sus necesidades consultando el diagrama de la página siguiente, que expone la interdependencia lógica de los capítulos.*

*Quisiera expresar mi gratitud a muchas personas que se tomaron la molestia de escribirme sobre la primera edición. Sus comentarios y sugerencias influyeron en la preparación de la segunda. Debo dar las gracias especialmente al doctor Charalambos Aliprantis, que leyó detenidamente todo el manuscrito de la obra e hizo numerosas observaciones oportunas, además de proporcionarme algunos de los nuevos ejercicios. Por último, quisiera hacer patente mi agradecimiento a los estudiantes de Caltech, cuyo entusiasmo por las matemáticas fue el primer incentivo para esta obra.*

T. M. A.

## INTERDEPENDENCIA LÓGICA DE LOS CAPÍTULOS



# Indice analítico

<b>Capítulo 1 El sistema de los números reales y el de los complejos</b>	
1.1 Introducción	1
1.2 Los axiomas de cuerpo	2
1.3 Los axiomas de orden	2
1.4 Representación geométrica de los números reales	4
1.5 Intervalos	4
1.6 Los enteros	5
1.7 Teorema de descomposición única para enteros	6
1.8 Los números racionales	8
1.9 Los números irracionales	8
1.10 Cotas superiores; elemento máximo, cota superior mínima (supremo)	10
1.11 El axioma de completitud	11
1.12 Algunas propiedades del supremo	12
1.13 Propiedades de los enteros deducidas del axioma de completitud	13
1.14 La propiedad arquimediana del sistema de los números reales	13
1.15 Los números racionales con representación decimal finita	13
1.16 Aproximaciones decimales finitas de los números reales	14
1.17 Representaciones decimales infinitas de los números reales	15
1.18 Valor absoluto y desigualdad triangular	16
1.19 La desigualdad de Cauchy-Schwarz	17
1.20 Más y menos infinito y la extensión $\mathbf{R}^*$ del sistema de los números reales	18
1.21 Los números complejos	19
1.22 Representación geométrica de los números complejos	21
1.23 La unidad imaginaria	22
1.24 Valor absoluto de un número complejo	22
1.25 Imposibilidad de ordenar los números complejos	23
1.26 Exponenciales complejas	24
1.27 Otras propiedades de las exponenciales complejas	25
1.28 El argumento de un número complejo	25
1.29 Potencias enteras y raíces de números complejos	26
1.30 Los logaritmos complejos	28
1.31 Potencias complejas	29
1.32 Senos y cosenos complejos	30
1.33 Infinito y el plano complejo ampliado $\mathbf{C}^*$	30
Ejercicios	31

<b>Capítulo 2 Algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos</b>	39
2.1 Introducción	39
2.2 Notaciones	39
2.3 Pares ordenados	40
2.4 Producto cartesiano de dos conjuntos	41
2.5 Relaciones y funciones	41
2.6 Más terminología referente a funciones	42
2.7 Funciones uno a uno e inversas	43
2.8 Funciones compuestas	45
2.9 Sucesiones	45
2.10 Conjuntos coordinables (equipotentes)	46
2.11 Conjuntos finitos e infinitos	46
2.12 Conjuntos numerables y no numerables	47
2.13 El conjunto de los números reales no es numerable	48
2.14 Álgebra de conjuntos	49
2.15 Colecciones numerables de conjuntos numerables	51
Ejercicios	52
<b>Capítulo 3 Elementos de topología en conjuntos de puntos</b>	57
3.1 Introducción	57
3.2 El espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$	57
3.3 Bolas abiertas y conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$	60
3.4 La estructura de los conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^1$	61
3.5 Conjuntos cerrados	63
3.6 Puntos adherentes. Puntos de acumulación	63
3.7 Conjuntos cerrados y puntos adherentes	65
3.8 Teorema de Bolzano-Weierstrass	66
3.9 Teorema de encaje de Cantor	68
3.10 Teorema del recubrimiento de Lindelöf	68
3.11 Teorema del recubrimiento de Heine-Borel	70
3.12 Compacidad en $\mathbf{R}^n$	71
3.13 Espacios métricos	73
3.14 Topología en espacios métricos	74
3.15 Subconjuntos compactos de un espacio métrico	77
3.16 Frontera de un conjunto	78
Ejercicios	78
<b>Capítulo 4 Límites y continuidad</b>	85
4.1 Introducción	85
4.2 Sucesiones convergentes en un espacio métrico	86
4.3 Sucesiones de Cauchy	88
4.4 Espacios métricos completos	90
4.5 Límite de una función	90
4.6 Límites de funciones con valores complejos	92
4.7 Límites de funciones con valores vectoriales	93
4.8 Funciones continuas	95

4.9	La continuidad de las funciones compuestas	96
4.10	Funciones complejas y funciones vectoriales continuas	97
4.11	Ejemplos de funciones continuas	97
4.12	Continuidad y antiimágenes de conjuntos abiertos y cerrados	98
4.13	Funciones continuas sobre conjuntos compactos	100
4.14	Aplicaciones topológicas (homeomorfismos)	102
4.15	Teorema de Bolzano	102
4.16	Conección	104
4.17	Componentes de un espacio métrico	106
4.18	Conección por arcos	107
4.19	Continuidad uniforme	109
4.20	Continuidad uniforme y conjuntos compactos	110
4.21	Teorema del punto fijo para contracciones	111
4.22	Discontinuidades de las funciones reales	113
4.23	Funciones monótonas	115
	Ejercicios	116
<b>Capítulo 5</b>	<b>Derivadas</b>	125
5.1	Introducción	125
5.2	Definición de derivada	125
5.3	Derivadas y continuidad	126
5.4	Álgebra de derivadas	127
5.5	La regla de la cadena	128
5.6	Derivadas laterales y derivadas infinitas	129
5.7	Funciones con derivada no nula	130
5.8	Derivadas cero y extremos locales	131
5.9	Teorema de Rolle	132
5.10	Teorema del valor medio para derivadas	132
5.11	Teorema del valor intermedio para las derivadas	134
5.12	Fórmula de Taylor con resto	136
5.13	Derivadas de funciones vectoriales	137
5.14	Derivadas parciales	138
5.15	Diferenciación de funciones de una variable compleja	140
5.16	Ecuaciones de Cauchy-Riemann	142
	Ejercicios	146
<b>Capítulo 6</b>	<b>Funciones de variación acotada y curvas rectificables</b>	153
6.1	Introducción	153
6.2	Propiedades de las funciones monótonas	153
6.3	Funciones de variación acotada	154
6.4	Variación total	156
6.5	Propiedad aditiva de la variación total	157
6.6	La variación total $[a, x]$ , como función de $x$	158
6.7	Funciones de variación acotada expresadas como diferencia de dos funciones crecientes	159
6.8	Funciones continuas de variación acotada	159
6.9	Curvas y caminos	161

6.10	Caminos rectificables y longitud de un arco	161
6.11	Propiedades de aditividad y de continuidad de la longitud de arco	163
6.12	Caminos equivalentes. Cambios de parámetros	164
	Ejercicios	165
<b>Capítulo 7</b>	<b>La integral de Riemann-Stieltjes</b>	169
7.1	Introducción	169
7.2	Notación	170
7.3	La definición de la integral de Riemann-Stieltjes	171
7.4	Propiedades lineales	171
7.5	Integración por partes	174
7.6	Cambio de variable en una integral de Riemann-Stieltjes	175
7.7	Reducción de una integral de Riemann	176
7.8	Funciones escalonadas como integradores	177
7.9	Reducción de una integral de Riemann-Stieltjes a una suma finita	179
7.10	Fórmula de sumación de Euler	181
7.11	Integradores monótonos crecientes. Integrales superior e inferior	181
7.12	Propiedades aditiva y lineal de las integrales superior e inferior	185
7.13	Condición de Riemann	186
7.14	Teoremas de comparación	187
7.15	Integradores de variación acotada	189
7.16	Condiciones suficientes para la existencia de las integrales de Riemann-Stieltjes	193
7.17	Condiciones necesarias para la existencia de las integrales de Riemann-Stieltjes	194
7.18	Teoremas del valor medio para las integrales de Riemann-Stieltjes	195
7.19	La integral como función del intervalo	196
7.20	El segundo teorema fundamental del Cálculo integral	197
7.21	Cambio de variable en una integral de Riemann	199
7.22	Segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann	200
7.23	Integrales de Riemann-Stieltjes dependientes de un parámetro	201
7.24	Derivación bajo el signo integral	203
7.25	Intercambio en el orden de integración	203
7.26	Criterio de Lebesgue para la existencia de las integrales de Riemann	205
7.27	Integrales complejas de Riemann-Stieltjes	211
	Ejercicios	212
<b>Capítulo 8</b>	<b>Series infinitas y productos infinitos</b>	223
8.1	Introducción	223
8.2	Sucesiones convergentes y divergentes de números complejos	223
8.3	Límite superior y límite inferior de una sucesión real	224
8.4	Sucesiones monótonas de números reales	225
8.5	Series infinitas	226
8.6	Introducción y supresión de paréntesis	227
8.7	Series alternadas	229
8.8	Convergencia absoluta y condicional	230

8.9	Parte real y parte imaginaria de una serie compleja	231
8.10	Criterios de convergencia para las series de términos positivos	231
8.11	La serie geométrica	232
8.12	El criterio de la integral	232
8.13	Las notaciones O grande y o pequeña	234
8.14	El criterio del cociente y el criterio de la raíz	235
8.15	Criterios de Dirichlet y de Abel	236
8.16	Sumas parciales de la serie geométrica $\Sigma z^n$ sobre el círculo unidad $ z =1$	237
8.17	Reordenación de series	238
8.18	Teorema de Riemann para series condicionalmente convergentes	240
8.19	Series parciales	241
8.20	Sucesiones dobles	243
8.21	Series dobles	244
8.22	Teorema de reordenación para series dobles	245
8.23	Una condición suficiente para la igualdad de series reiteradas	247
8.24	Multiplicación de series	248
8.25	Sumabilidad de Césaro	250
8.26	Productos infinitos	252
8.27	Producto de Euler para la función zeta de Riemann	255
	Ejercicios	256
<b>Capítulo 9</b>	<b>Sucesiones de funciones</b>	265
9.1	Convergencia puntual de sucesiones de funciones	265
9.2	Ejemplos de sucesiones de funciones reales	266
9.3	Definición de convergencia uniforme	268
9.4	Convergencia uniforme y continuidad	269
9.5	La condición de Cauchy para la convergencia uniforme	270
9.6	Convergencia uniforme de series infinitas de funciones	271
9.7	Una curva que llena todo el espacio	272
9.8	Convergencia uniforme e integración de Riemann-Stieltjes	274
9.9	Sucesiones convergentes con convergencia no uniforme que pueden ser integradas término a término	275
9.10	Convergencia uniforme y diferenciación	278
9.11	Condiciones suficientes para la convergencia uniforme de series	280
9.12	Convergencia uniforme y sucesiones dobles	281
9.13	Convergencia en media	282
9.14	Serie de potencias	284
9.15	Multiplicación de series de potencias	289
9.16	El teorema de sustitución	290
9.17	Recíproca de una serie de potencias	291
9.18	Series reales de potencias	292
9.19	Serie de Taylor generada por una función	293
9.20	Teorema de Bernstein	294
9.21	La serie binómica	297
9.22	Teorema del límite de Abel	298
9.23	Teorema de Tauber	300
	Ejercicios	301

<b>Capítulo 10</b>	<b>La integral de Lebesgue</b>	307
10.1	Introducción	307
10.2	Integral de una función escalonada	308
10.3	Sucesiones monótonas de funciones escalonadas	309
10.4	Funciones superiores y sus integrales	312
10.5	Las funciones integrales de Riemann como ejemplo de las funciones superiores	316
10.6	La clase de las funciones integrables de Lebesgue en un intervalo general	318
10.7	Propiedades básicas de la integral de Lebesgue	319
10.8	Integración de Lebesgue y conjuntos de medida cero	323
10.9	Teoremas de convergencia monótona de Levi	323
10.10	Teorema de convergencia dominada de Lebesgue	330
10.11	Aplicaciones del teorema de convergencia dominada de Lebesgue	333
10.12	Integrales de Lebesgue sobre intervalos no acotados como límite de integrales sobre intervalos acotados	335
10.13	Integrales de Riemann impropias	337
10.14	Funciones medibles	340
10.15	Continuidad de funciones definidas por medio de integrales de Lebesgue	342
10.16	Diferenciación bajo signo integral	345
10.17	Intercambio en el orden de integración	349
10.18	Conjuntos medibles de la recta real	352
10.19	La integral de Lebesgue en subconjuntos arbitrarios de $\mathbf{R}$	355
10.20	Integrales de Lebesgue de funciones complejas	356
10.21	Productos interiores y normas	357
10.22	El conjunto $L^2(I)$ de las funciones de cuadrado integrable	358
10.23	El conjunto $L^2(I)$ como espacio semimétrico	360
10.24	Un teorema de convergencia para series de funciones de $L^2(I)$	360
10.25	Teorema de Riesz-Fischer	362
	Ejercicios	363
<b>Capítulo 11</b>	<b>Series de Fourier e integrales de Fourier</b>	373
11.1	Introducción	373
11.2	Sistemas ortogonales de funciones	373
11.3	El teorema de óptima aproximación	374
11.4	Serie de Fourier de una función relativa a un sistema ortogonal	376
11.5	Propiedades de los coeficientes de Fourier	377
11.6	Teorema de Riesz-Fischer	378
11.7	Los problemas de convergencia y representación para series trigonométricas	380
11.8	Lema de Riemann-Lebesgue	381
11.9	Integrales de Dirichlet	383
11.10	Una representación integral para las sumas parciales de una serie de Fourier	386
11.11	Teorema de localización de Riemann	387

11.12	Condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier en un punto particular	388
11.13	Sumabilidad de Cesáro para series de Fourier	389
11.14	Consecuencias del teorema de Fejer	391
11.15	Teorema de aproximación de Weierstrass	392
11.16	Otras formas de series de Fourier	393
11.17	Teorema de la integral de Fourier	394
11.18	Forma exponencial del teorema de la integral de Fourier	396
11.19	Transformadas integrales	397
11.20	Convoluciones	399
11.21	Teorema de convolución para transformadas de Fourier	401
11.22	Fórmula de sumación de Poisson	403
	Ejercicios	407
<b>Capítulo 12</b>	<b>Cálculo diferencial de varias variables</b>	417
12.1	Introducción	417
12.2	La derivada direccional	417
12.3	Derivadas direccionales y continuidad	418
12.4	La derivada total	419
12.5	La derivada total expresada por medio de las derivadas parciales	421
12.6	Aplicación a las funciones complejas	422
12.7	La matriz de una función lineal	423
12.8	La matriz jacobiana	425
12.9	Regla de la cadena	427
12.10	Forma matricial de la regla de la cadena	428
12.11	Teorema del valor medio para funciones diferenciables	430
12.12	Una condición suficiente de diferenciabilidad	432
12.13	Una condición suficiente para la igualdad de las derivadas parciales cruzadas	434
12.14	Fórmula de Taylor para funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^1$	437
	Ejercicios	439
<b>Capítulo 13</b>	<b>Funciones implícitas y problemas de extremos</b>	445
13.1	Introducción	445
13.2	Funciones con determinante jacobiano no nulo	447
13.3	El teorema de la función inversa	451
13.4	El teorema de la función implícita	453
13.5	Extremos de funciones reales de una variable	455
13.6	Extremos de funciones reales de varias variables	456
13.7	Problemas de extremos condicionados	460
	Ejercicios	466
<b>Capítulo 14</b>	<b>Integrales múltiples de Riemann</b>	471
14.1	Introducción	471
14.2	Medida de un intervalo acotado de $\mathbf{R}^n$	471

14.3	Integral de Riemann de una función acotada definida en un intervalo compacto de $\mathbf{R}^n$	472
14.4	Conjuntos de medida cero y criterio de Lebesgue para la existencia de una integral múltiple de Riemann	475
14.5	Cálculo de una integral múltiple por integración reiterada	475
14.6	Conjuntos medibles Jordan en $\mathbf{R}^n$	480
14.7	Integración múltiple sobre conjuntos medibles Jordan	482
14.8	El contenido de Jordan expresado como integral de Riemann	483
14.9	Propiedad aditiva de la integral de Riemann	484
14.10	Teorema del valor medio para integrales múltiples	486
	Ejercicios	488
<b>Capítulo 15</b>	<b>Integrales de Lebesgue múltiples</b>	491
15.1	Introducción	491
15.2	Funciones escalonadas y sus integrales	492
15.3	Funciones superiores y funciones integrales Lebesgue	493
15.4	Funciones medibles y conjuntos medibles de $\mathbf{R}^n$	494
15.5	Teorema de Fubini para la reducción de la integral doble de una función escalonada	497
15.6	Algunas propiedades de los conjuntos de medida cero	499
15.7	Teorema de Fubini para la reducción de integrales dobles	501
15.8	Criterio de Tonelli-Hobson de integrabilidad	504
15.9	Cambios de coordenadas	505
15.10	Fórmula de cambio de variables en integrales múltiples	511
15.11	Demostración de la fórmula de cambio de variables para transformaciones lineales de coordenadas	511
15.12	Demostración de la fórmula de cambio de variables para la función característica de un cubo compacto	514
15.13	Complemento de la demostración de la fórmula de cambio de variables	521
	Ejercicios	523
<b>Capítulo 16</b>	<b>Teorema de Cauchy y cálculo de residuos</b>	527
16.1	Funciones analíticas	527
16.2	Caminos y curvas en el plano complejo	528
16.3	Integrales de contorno	529
16.4	La integral a lo largo de caminos circulares expresada en función del radio	532
16.5	El teorema de la integral de Cauchy para un círculo	533
16.6	Curvas homotópicas	534
16.7	Invariancia de las integrales de contorno en las homotopías	536
16.8	Forma general del teorema de la integral de Cauchy	538
16.9	Fórmula de la integral de Cauchy	539
16.10	Número de giros de un circuito con respecto a un punto	540
16.11	La no acotación del conjunto de puntos con número de giros igual a cero	542
16.12	Funciones analíticas definidas por integrales de contorno	544

16.13	Desarrollo en serie de potencias de las funciones analíticas	546
16.14	Desigualdades de Cauchy. Teorema de Liouville	548
16.15	Separación de los ceros de una función analítica	549
16.16	El teorema de identidad para funciones analíticas	551
16.17	Módulos máximo y mínimo de una función analítica	551
16.18	El teorema de la aplicación abierta	553
16.19	Desarrolllos de Laurent para funciones analíticas en un anillo	554
16.20	Singularidades aisladas	557
16.21	Residuo de una función en un punto singular aislado	559
16.22	Teorema de Cauchy del residuo	560
16.23	Números de ceros y de polos en una región	561
16.24	Cálculo de integrales reales por medio de residuos	562
16.25	Cálculo de la suma de Gauss por el método de los residuos	565
16.26	Aplicación del teorema del residuo a la fórmula de inversión para transformadas de Laplace	570
16.27	Aplicaciones conformes	572
	Ejercicios	575
	<b>Índice de símbolos especiales</b>	585
	<b>Índice alfabético</b>	589



# Análisis matemático



## CAPÍTULO 1

# El sistema de los números reales y el de los complejos

### 1.1 INTRODUCCIÓN

El Análisis matemático estudia conceptos relacionados de alguna manera con los números reales; por ello empezaremos nuestro estudio del Análisis con una discusión del sistema de los números reales.

Existen diversos métodos para introducir los números reales. Uno de ellos parte de los enteros positivos 1, 2, 3, ..., que considera conceptos no definidos, utilizándolos para construir un sistema más amplio, los *números racionales* positivos (cocientes de enteros positivos), los negativos y el cero. Los números racionales son utilizados, a su vez, para construir los *números irracionales*, números reales como  $\sqrt{2}$  y  $\pi$ , que no son racionales. El sistema de los números reales lo constituye la reunión de los números racionales e irracionales.

A pesar de que estas cuestiones constituyen una parte importante de los fundamentos de la Matemática, no las describiremos aquí con detalle. Es un hecho que, en la mayor parte del Análisis, nos interesarán solamente las *propiedades* de los números reales antes que los métodos utilizados para construirlos. Por lo tanto, consideraremos los números reales mismos como objetos no definidos, sometidos a ciertos axiomas de los que extraeremos ulteriores propiedades. Dado que el lector está, probablemente, familiarizado con la mayoría de las propiedades de los números reales que consideraremos en las páginas que siguen, la exposición será más bien breve. Su propósito es examinar las características más importantes y persuadir al lector de que, de ser necesario, todas las propiedades se podrían deducir a partir de los axiomas. Tratamientos más detallados podrán hallarse en las referencias del final de este capítulo.

Por conveniencia usaremos la notación y la terminología de la teoría de conjuntos elemental. Supongamos que  $S$  designa un conjunto (una colección de objetos). La notación  $x \in S$  significa que  $x$  está en el conjunto  $S$ , escribiendo  $x \notin S$  para indicar que  $x$  no está en  $S$ .

Un conjunto  $S$  es un *subconjunto* de  $T$  si cada elemento de  $S$  está también en  $T$ . Lo indicaremos escribiendo  $S \subseteq T$ . Un conjunto es *no vacío* si contiene, por lo menos, un elemento.

Suponemos que existe un conjunto no vacío  $\mathbf{R}$  de elementos, llamados números reales, que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación. Los axiomas se clasifican de manera natural en tres grupos a los que nos referiremos como *axiomas de cuerpo*, *axiomas de orden* y *axioma de completitud* (llamado también *axioma del supremo* o *axioma de continuidad*).

## 1.2 LOS AXIOMAS DE CUERPO

Junto con el conjunto  $\mathbf{R}$  de los números reales admitimos la existencia de dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación*, tales que, para cada par de números reales  $x$  e  $y$ , la *suma*  $x + y$  y el *producto*  $xy$  son números reales determinados únicamente por  $x$  e  $y$ , satisfaciendo los siguientes axiomas. (En los axiomas que a continuación se exponen,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  representan números reales arbitrarios en tanto no se precise lo contrario.)

**Axioma 1.**  $x + y = y + x$ ,  $xy = yx$  *(leyes conmutativas)*.

**Axioma 2.**  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,  $x(yz) = (xy)z$  *(leyes asociativas)*.

**Axioma 3.**  $x(y + z) = xy + xz$  *(ley distributiva)*.

**Axioma 4.** Dados dos números reales cualesquiera  $x$  e  $y$ , existe un número real  $z$  tal que  $x + z = y$ . Dicho número  $z$  se designará por  $y - x$ ; el número  $x - x$  se designará por 0. (Se puede demostrar que 0 es independiente de  $x$ .) Escribiremos  $-x$  en vez de  $0 - x$  y al número  $-x$  lo llamaremos opuesto de  $x$ .

**Axioma 5.** Existe, por lo menos, un número real  $x \neq 0$ . Si  $x$  e  $y$  son dos números reales con  $x \neq 0$ , entonces existe un número  $z$  tal que  $xz = y$ . Dicho número  $z$  se designará por  $y/x$ ; el número  $x/x$  se designará por 1 y puede demostrarse que es independiente de  $x$ . Escribiremos  $x^{-1}$  en vez de  $1/x$  si  $x \neq 0$  y a  $x^{-1}$  lo llamaremos recíproco o inverso de  $x$ .

De estos axiomas pueden deducirse todas las leyes usuales de la Aritmética; por ejemplo,  $-(-x) = x$ ,  $(x^{-1})^{-1} = x$ ,  $-(x - y) = y - x$ ,  $x - y = x + (-y)$ , etc. (Para un desarrollo más detallado, ver Referencia 1.1.)

## 1.3 LOS AXIOMAS DE ORDEN

Suponemos también la existencia de una relación  $<$  que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los axiomas siguientes:

**Axioma 6.** Se verifica una y sólo una de las relaciones  $x = y$ ,  $x < y$ ,  $x > y$ .

NOTA.  $x > y$  significa lo mismo que  $y < x$ .

**Axioma 7.** Si  $x < y$ , entonces, para cada  $z$ , es  $x + z < y + z$ .

**Axioma 8.** Si  $x > 0$  e  $y > 0$ , entonces  $xy > 0$ .

**Axioma 9.** Si  $x > y$  e  $y > z$ , entonces  $x > z$ .

NOTA. Un número real  $x$  se llama *positivo* si  $x > 0$  y *negativo* si  $x < 0$ . Designaremos por  $\mathbf{R}^+$  el conjunto de todos los números reales positivos y por  $\mathbf{R}^-$  el conjunto de todos los números reales negativos.

De estos axiomas pueden deducirse las reglas usuales que rigen las operaciones con desigualdades. Por ejemplo, si tenemos que  $x < y$ , entonces  $xz < yz$  si  $z$  es positivo, mientras que  $xz > yz$  si  $z$  es negativo. Además, si  $x > y$  y  $z > w$  con  $y$  y  $w$  positivos, entonces  $xz > yw$ . (Para una discusión más detallada de estas reglas ver Referencia 1.1.)

NOTA. El simbolismo  $x \leq y$  se utiliza para abreviar la afirmación:

$$\text{"}x < y \quad \text{o} \quad x = y\text{"}$$

Resulta, pues, que  $2 \leq 3$  ya que  $2 < 3$ ; y  $2 \leq 2$  ya que  $2 = 2$ . El símbolo  $\geq$  se utiliza de forma análoga. Un número real  $x$  se llama *no negativo* si  $x \geq 0$ . Un par simultáneo de desigualdades tales como  $x < y$ ,  $y < z$  se abrevia por medio de la expresión  $x < y < z$ .

El teorema que sigue, que no es más que una consecuencia inmediata de los axiomas precedentes, se utiliza a menudo en las demostraciones del Análisis.

**Teorema 1.1.** Sean  $a$  y  $b$  números reales tales que

$$a \leq b + \varepsilon \text{ para cada } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Entonces  $a \leq b$ .

**Demostración.** Si  $b < a$ , entonces la desigualdad (1) no se satisface para  $\varepsilon = (a - b)/2$  puesto que

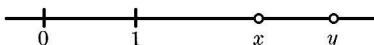
$$b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a.$$

Por lo tanto, por el axioma 6, resulta que  $a \leq b$ .

El axioma 10, axioma de completitud, será enunciado en la sección 1.11.

#### **1.4. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES**

Los números reales son, a menudo, representados geométricamente como puntos de una recta (denominada *recta real* o *eje real*). Se elige un punto para que represente el 0 y otro a la derecha del 0 para que represente el 1, como muestra la Fig. 1.1. Esta elección determina la escala. Con un conjunto apropiado de axiomas para la Geometría euclídea a cada punto de la recta real corresponde un número real y uno sólo y, recíprocamente, cada número real está representado por un punto de la recta real y uno solo. Es usual referirse al *punto x* en vez de referirse al punto correspondiente al número real  $x$ .



**Figura 1.1**

La relación de orden admite una interpretación geométrica simple. Si  $x < y$ , el punto  $x$  está a la izquierda del punto  $y$ , como muestra la figura 1.1. Los números positivos están a la derecha del 0 y los números negativos están a la izquierda del 0. Si  $a < b$ , un punto  $x$  satisface las desigualdades  $a < x < b$  si, y sólo si, 'x' está entre  $a$  y  $b$ .

#### **1.5 INTERVALOS**

El conjunto de todos los puntos comprendidos entre  $a$  y  $b$  se denomina *intervalo*. A menudo es importante distinguir entre los intervalos que incluyen sus extremos y los intervalos que no los incluyen.

**NOTACIÓN.** La notación  $\{x : x \text{ verifica } P\}$  designa el conjunto de todos los números reales  $x$  tales que satisfacen la propiedad  $P$ .

**Definición 1.2.** *Supongamos  $a < b$ . El intervalo abierto  $(a, b)$  se define por*

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}.$$

*El intervalo cerrado  $[a, b]$  es el conjunto  $\{x : a \leq x \leq b\}$ . Los intervalos semi-abiertos  $(a, b]$  y  $[a, b)$  se definen análogamente utilizando, respectivamente, las desigualdades  $a < x \leq b$  y  $a \leq x < b$ . Los intervalos infinitos se definen como sigue:*

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x : x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x : x < a\}, \quad (-\infty, a] = \{x : x \leq a\}.$$

Se utiliza a veces el intervalo  $(-\infty, +\infty)$  para designar la recta real **R**. Un solo punto es considerado como un intervalo cerrado «degenerado».

**NOTA.** Los símbolos  $+\infty$  y  $-\infty$  se utilizan aquí tan sólo por conveniencias de notación y no deben ser considerados como números reales. Más adelante extenderemos el sistema de los números reales incluyendo estos dos símbolos, pero, mientras no lo hagamos, el lector deberá entender que todos los números reales son «finitos».

## 1.6 LOS ENTEROS

En esta sección se describen los *enteros* como un subconjunto especial de **R**. Antes de definir los enteros conviene introducir la noción de *conjunto inductivo*.

**Definición 1.3.** *Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las dos propiedades siguientes:*

- a) *El número 1 está en el conjunto.*
- b) *Para cada  $x$  del conjunto, el número  $x + 1$  está también en el conjunto.*

Por ejemplo, **R** es un conjunto inductivo. También lo es **R**<sup>+</sup>. Definiremos los enteros positivos como aquellos números reales que pertenecen a todos los conjuntos inductivos.

**Definición 1.4.** *Un número real se denomina entero positivo si pertenece a cada uno de los conjuntos inductivos. El conjunto de los enteros positivos se designa por **Z**<sup>+</sup>.*

El conjunto **Z**<sup>+</sup> es, a su vez, inductivo. Contiene al número 1, al número  $1 + 1$  (designado por 2), al número  $2 + 1$  (designado por 3), y así sucesivamente. Como **Z**<sup>+</sup> es subconjunto de cada uno de los conjuntos inductivos consideraremos a **Z**<sup>+</sup> como el *menor* conjunto inductivo. Esta propiedad de **Z**<sup>+</sup> se denomina, a menudo, *principio de inducción*. Suponemos al lector familiarizado con las demostraciones por inducción que se basan en este principio. (Ver Referencia 1.1.) Ejemplos de tales demostraciones se dan en la sección siguiente.

Los opuestos de los enteros positivos se llaman *enteros negativos*. Los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0 (cero), forman un conjunto **Z** que llamaremos, simplemente, *conjunto de los enteros*.

## 1.7 TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ÚNICA PARA ENTEROS

Si  $n$  y  $d$  son enteros y si  $n = cd$  para algún entero  $c$ , diremos que  $d$  es un divisor de  $n$ , o que  $n$  es un múltiplo de  $d$ , y escribiremos  $d|n$  (se lee:  $d$  divide a  $n$ ). Un entero  $n$  es primo si  $n > 1$  y si los únicos divisores positivos de  $n$  son 1 y  $n$ . Si  $n > 1$  y  $n$  no es primo, entonces  $n$  es compuesto. El entero 1 no es ni primo ni compuesto.

Esta sección expone algunos resultados elementales acerca de la descomposición de enteros, culminando con el teorema de descomposición única, llamado también el teorema fundamental de la Aritmética.

El teorema fundamental establece que (1) cada entero  $n > 1$  puede ser representado como producto de factores primos y que (2) esta descomposición es única, salvo en el orden de los factores. Es fácil probar la parte (1).

**Teorema 1.5.** *Cada entero  $n > 1$  es primo o producto de primos.*

**Demostración.** Utilizaremos la inducción sobre  $n$ . El teorema se verifica trivialmente para  $n = 2$ . Supongamos que es cierto para cada entero  $k$  con  $1 < k < n$ . Si  $n$  no es primo, admite un divisor  $d$  con  $1 < d < n$ . Por lo tanto,  $n = cd$ , con  $1 < c < n$ . Puesto que tanto  $c$  como  $d$  son <  $n$ , cada uno es primo o es producto de primos; luego  $n$  es un producto de primos.

Antes de probar la parte (2), la unicidad de la descomposición, introduciremos otros conceptos.

Si  $d|a$  y  $d|b$ , diremos que  $d$  es un divisor común de  $a$  y  $b$ . El teorema que sigue demuestra que cada par de enteros  $a$  y  $b$  posee un divisor común que es combinación lineal de  $a$  y de  $b$ .

**Teorema 1.6.** *Cada par de enteros  $a$  y  $b$  admite un divisor común  $d$  de la forma*

$$d = ax + by$$

donde  $x$  e  $y$  son enteros. Además, cada divisor común de  $a$  y  $b$  divide a  $d$ .

**Demostración.** Supongamos primeramente que  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$  y procedamos por inducción sobre  $n = a + b$ . Si  $n = 0$ , entonces  $a = b = 0$  y podemos tomar  $d = 0$  con  $x = y = 0$ . Supongamos entonces que el teorema ha sido probado para 0, 1, 2, ...,  $n - 1$ . Por simetría podemos suponer  $a \geq b$ . Si  $b = 0$ , entonces  $d = a$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ . Si  $b \geq 1$  podemos aplicar la hipótesis de inducción a  $a - b$  y a  $b$ , ya que su suma es  $a = n - b \leq n - 1$ . Por lo tanto existe un divisor común  $d$  de  $a - b$  y  $b$  de la forma  $d = (a - b)x + by$ . Este entero  $d$

divide también a  $(a - b) + b = a$ , luego  $d$  es un divisor común de  $a$  y de  $b$  y tenemos que  $d = ax + (y - x)b$ , es combinación lineal de  $a$  y  $b$ . Para completar la demostración debemos probar que cada divisor común divide a  $d$ . Como un divisor común divide a  $a$  y a  $b$ , dividirá también a la combinación lineal  $ax + (y - x)b = d$ . Esto completa la demostración si  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$ . Si uno de ellos o ambos fuesen negativos, aplicaríamos el resultado que acabamos de demostrar a  $|a|$  y  $|b|$ .

**NOTA.** Si  $d$  es un divisor común de  $a$  y  $b$  de la forma  $d = ax + by$ , entonces  $-d$  es también un divisor común de la misma forma,  $-d = a(-x) + b(-y)$ . De estos dos divisores comunes sólo el no negativo se denomina el *máximo común divisor* de  $a$  y  $b$  y se designa por  $\text{mcd}(a, b)$  o, simplemente, por  $(a, b)$ . Si  $(a, b) = 1$ , se dice que  $a$  y  $b$  son *primos entre sí*.

**Teorema 1.7 (Lema de Euclides).** Si  $a|bc$  y  $(a, b) = 1$ , entonces  $a|c$ .

**Demostración.** Como  $(a, b) = 1$ , podemos escribir  $1 = ax + by$ . Por lo tanto,  $c = acx + bcy$ . Pero  $a|acx$  y  $a|bcy$ , luego  $a|c$ .

**Teorema 1.8.** Si un número primo  $p$  divide a  $ab$ , entonces  $p|a$  o  $p|b$ . En general, si un número primo  $p$  divide al producto  $a_1 \dots a_k$ , entonces  $p$  divide a uno de los factores por lo menos.

**Demostración.** Supongamos que  $p|ab$  y que  $p$  no divida a  $a$ . Si probamos que  $(p, a) = 1$ , el lema de Euclides implica que  $p|b$ . Sea  $d = (p, a)$ . Entonces  $d|p$ , luego  $d = 1$  o  $d = p$ . No puede ser que  $d = p$  ya que  $d|a$ , pero  $p$  no divide a  $a$ . Por lo tanto,  $d = 1$ . Para demostrar la afirmación más general se procede por inducción sobre el número  $k$  de factores. Los detalles se dejan al lector.

**Teorema 1.9 (Teorema de descomposición única).** Cada entero  $n > 1$  puede ser representado como producto de factores primos, y si se prescinde del orden de los factores la representación es única.

**Demostración.** Procederemos por inducción sobre  $n$ . El teorema es cierto para  $n = 2$ . Supongamos, entonces, que es cierto para todos los enteros mayores que 1 y menores que  $n$ . Si  $n$  es primo, no hay nada que demostrar. Supongamos, por lo tanto, que  $n$  es compuesto y que admite dos descomposiciones en factores primos; a saber

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t. \quad (2)$$

Deseamos probar que  $s = t$  y que cada  $p$  es igual a algún  $q$ . Dado que  $p_1$  divide a  $q_1 q_2 \cdots q_t$ , divide por lo menos a uno de los factores. Cambiando los

índices de las  $q$ , si es necesario, se puede suponer  $p_1/q_1$ . Por lo tanto,  $p_1 = q_1$  ya que tanto  $p_1$  como  $q_1$  son primos. En (2) simplificamos  $p_1$  en ambos miembros y obtenemos

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_t.$$

Como  $n$  es compuesto,  $1 < n/p_1 < n$ ; luego por la hipótesis de inducción las dos descomposiciones de  $n/p_1$  son idénticas, si se prescinde del orden de los factores. Por lo tanto, lo mismo es cierto para (2) y la demostración está terminada.

## 1.8 LOS NÚMEROS RACIONALES

Los cocientes de enteros  $a/b$  (donde  $b \neq 0$ ) se llamarán *números racionales*. Por ejemplo,  $1/2$ ,  $-7/5$ , y  $6$  son números racionales. El conjunto de los números racionales, que designaremos por  $\mathbf{Q}$ , contiene a  $\mathbf{Z}$  como subconjunto. Observe el lector que todos los axiomas de cuerpo y todos los axiomas de orden se verifican en  $\mathbf{Q}$ .

Suponemos que el lector está familiarizado con ciertas propiedades elementales de los números racionales. Por ejemplo, si  $a$  y  $b$  son racionales, su media  $(a + b)/2$  también lo es y está comprendida entre  $a$  y  $b$ . Así pues, entre dos números racionales hay una infinidad de números racionales, lo cual implica que, dado un número racional cualquiera, no sea posible hablar del número racional «inmediato superior».

## 1.9 LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales*. Por ejemplo, los números  $\sqrt{2}$ ,  $e$ ,  $\pi$  y  $e^\pi$  son irracionales.

En general no es fácil probar que un cierto número particular es irracional. No existe ninguna demostración simple de la irracionalidad de  $e^\pi$ , por ejemplo. Sin embargo, la irracionalidad de números tales como  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  no es excesivamente difícil de establecer y, de hecho, probaremos fácilmente el siguiente:

**Teorema 1.10.** *Si  $n$  es un entero positivo que no sea un cuadrado perfecto, entonces  $\sqrt{n}$  es irracional.*

*Demostración.* Suponemos en primer lugar que  $n$  no admite ningún divisor  $> 1$  que sea cuadrado perfecto. Si admitimos que  $\sqrt{n}$  es racional, llegamos a contradicción. Supongamos que  $\sqrt{n} = a/b$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros sin divisores comunes. Entonces  $nb^2 = a^2$  y, dado que el primer miembro de esta

igualdad es un múltiplo de  $n$ , también lo será  $a^2$ . Sin embargo, si  $a^2$  es múltiplo de  $n$ ,  $a$  deberá serlo ya que  $n$  no admite divisores  $> 1$  que sean cuadrados perfectos. (Esto se ve fácilmente examinando la descomposición de  $a$  en factores primos.) Todo ello significa que  $a = cn$ , donde  $c$  es un entero. Entonces la ecuación  $nb^2 = a^2$  se transforma en  $nb^2 = c^2n^2$ , o  $b^2 = nc^2$ . El mismo argumento prueba que  $b$  debe ser asimismo múltiplo de  $n$ . Entonces  $a$  y  $b$  serían ambos múltiplos de  $n$ , lo cual contradice el hecho de que  $a$  y  $b$  carecen de divisores comunes. Esto finaliza la demostración en el caso de que  $n$  no admita un divisor  $> 1$  que sea cuadrado perfecto.

Si  $n$  admite un factor que sea cuadrado perfecto, podremos escribir  $n = m^2k$ , donde  $k > 1$  y  $k$  no admite divisores  $> 1$  que sean cuadrados perfectos. Por lo tanto  $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$ ; y si  $\sqrt{n}$  fuese racional, el número  $\sqrt{k}$  sería también racional, contradiciendo lo que acabamos de demostrar.

Un tipo distinto de argumentación es preciso para probar que el número  $e$  es irracional. (Suponemos cierta familiaridad con la exponencial  $e^x$  del Cálculo elemental y su representación como serie infinita.)

**Teorema 1.11.** Si  $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n! + \dots$ , entonces el número  $e$  es irracional.

*Demuestra*cción. Probaremos que  $e^{-1}$  es irracional. La serie  $e^{-1}$  es una serie alternada con términos que decrecen constantemente en valor absoluto. En tales series el error cometido al cortar la serie por el  $n$ -ésimo término tiene el signo algebraico del primer término que se desprecia y, en valor absoluto, es menor que el del primer término que se desprecia. Por lo tanto, si  $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k/k!$ , tenemos la desigualdad

$$0 < e^{-1} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!},$$

de la que se obtiene

$$0 < (2k-1)! (e^{-1} - s_{2k-1}) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}, \quad (3)$$

para todo entero  $k \geq 1$ . Ahora bien  $(2k-1)!s_{2k-1}$  es siempre un entero. Si  $e^{-1}$  fuese racional, entonces podríamos elegir  $k$  suficientemente grande para que  $(2k-1)!e^{-1}$  fuese también un entero. A causa de (3) la diferencia entre ambos enteros debería ser un número comprendido entre 0 y  $\frac{1}{2}$ , lo cual es imposible. Luego  $e^{-1}$  no es racional y, por tanto,  $e$  tampoco lo es.

NOTA. Para una demostración de la irracionalidad de  $\pi$ , ver Ejercicio 7.33.

Los antiguos griegos sabían de la existencia de los números irracionales allá por el año 500 a.C. Sin embargo, una teoría satisfactoria de tales números

no sería desarrollada hasta finales del siglo diecinueve en que tres teorías distintas son introducidas al mismo tiempo por Cantor, Dedekind y Weierstrass. En la Referencia 1.6 puede hallarse información acerca de las teorías de Dedekind y Cantor y sus equivalencias.

### **1.10 COTAS SUPERIORES; ELEMENTO MÁXIMO, COTA SUPERIOR MÍNIMA (SUPREMO)**

Los números irracionales aparecen en Álgebra cuando se pretenden resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea un número real  $x$  tal que  $x^2 = 2$ . De los nueve axiomas enumerados anteriormente no puede deducirse si en  $\mathbf{R}$  existe o no un número  $x$ , puesto que  $\mathbf{Q}$  satisface también estos nueve axiomas y hemos probado que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. El axioma de completitud nos permitirá introducir los números irracionales en el sistema de los números reales y proporcionar al sistema de los números reales una propiedad de continuidad que es fundamental en muchos de los teoremas de Análisis.

Antes de describir el axioma de completitud, es conveniente introducir una terminología y una notación adicionales.

**Definición 1.12.** *Sea  $S$  un conjunto de números reales. Si existe un número real  $b$  tal que  $x \leq b$  para todo  $x$  de  $S$ , diremos que  $b$  es una cota superior de  $S$  y que  $S$  está acotado superiormente por  $b$ .*

Decimos *una* cota superior ya que cada número mayor que  $b$  también es una cota superior. Si una cota superior  $b$  es, además, un elemento de  $S$ ,  $b$  se denomina *último elemento* o *elemento máximo* de  $S$ . A lo sumo habrá uno de tales  $b$ . Si existe tal número  $b$ , escribiremos

$$b = \max S.$$

Un conjunto carente de cotas superiores se denomina *no acotado superiormente*.

Las definiciones de los términos *cota inferior*, *acotado inferiormente*, *primer elemento* (o *elemento mínimo*) pueden formularse análogamente. Si  $S$  tiene un elemento mínimo, designaremos a dicho mínimo por  $\min S$ .

#### **Ejemplos.**

1. El conjunto  $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$  es un conjunto no acotado superiormente. No posee ni cotas superiores ni elemento máximo. Está acotado inferiormente por 0, pero no posee elemento mínimo.
2. El intervalo cerrado  $S = [0, 1]$  está acotado superiormente por 1 e inferiormente por 0. De hecho,  $\max S = 1$  y  $\min S = 0$ .