Análisis Matemático

Segunda edición

T. M. Apostol

EDITORIAL REVERTÉ

Análisis Matemático

Segunda edición

Tom M. Apostol

Califormia Institute of Technology

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
Mathematical Analysis

Versión original publicada en lengua inglesa por:
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, U. S. A.

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1976
ISBN: 978-84-291-5004-9

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2020
ISBN: 978-84-291-9448-7

Versión española por:
Dr. José Pla Carrera
Doctor en Matemáticas
Profesor de la Facultad de Matemáticas en la Universidad de Barcelona

Revisada por:
Dr. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

628

A mis padres

Prólogo

Una ojeada al índice analítico pondrá de manifiesto que este libro de texto trata temas de análisis a nivel de «Cálculo superior». La pretensión ha sido proporcionar un desarrollo de la materia que sea honesto, eficaz, puesto al día y, al mismo tiempo, que no resulte pedante. El libro constituye una transición del Cálculo elemental a cursos más avanzados de la teoría de las funciones real y compleja e introduce al lector un poco en el pensamiento abstracto que ocupa el análisis moderno.

La segunda edición difiere de la primera en muchos aspectos. La topología en conjuntos de puntos se explica al establecer los espacios métricos generales, así como el espacio euclídeo n-dimensional, y se han añadido dos nuevos capítulos sobre la integración de Lebesgue. Se ha suprimido lo referente a integrales lineales, análisis vectorial e integrales de superficie. Se ha cambiado el orden de algunos capítulos, se han escrito totalmente nuevos algunos apartados y se han añadido ejercicios nuevos.

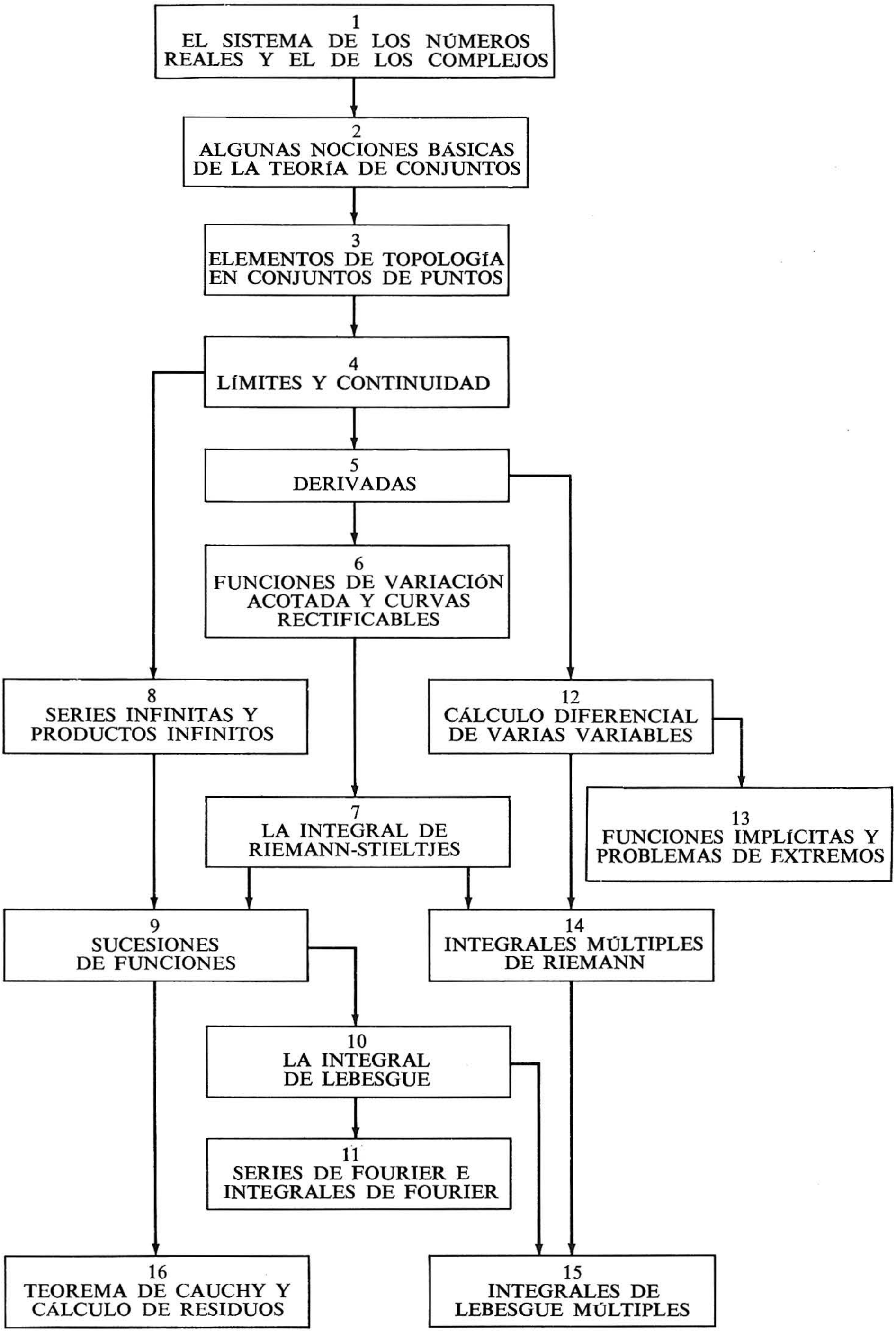
El desarrollo de la integración de Lebesgue se deduce de la propuesta de Riesz-Nagy que se enfoca directamente a las funciones y sus integrales y no depende de la teoría de la medida. El tratamiento aquí está simplificado, puesto a la vista y un tanto reordenado para estudiantes de cursos inferiores.

La primera edición se ha seguido en cursos de matemáticas de distintos niveles, desde el primer curso de estudiantes no graduados al primero de graduados, tanto como libro de texto, como de referencia suplementaria. La segunda edición conserva esa flexibilidad: por ejemplo, los capítulos 1 al 5, 12 y 13 son un curso de cálculo diferencial de funciones con una o más variables; los capítulos 6 al 11, 14 y 15, un curso de teoría de la integración. Son posibles muchas otras combinaciones: cada profesor puede elegir los temas que se acomoden a sus necesidades consultando el diagrama de la página siguiente, que expone la interdependencia lógica de los capítulos.

Quisiera expresar mi gratitud a muchas personas que se tomaron la molestia de escribirme sobre la primera edición. Sus comentarios y sugerencias influyeron en la preparación de la segunda. Debo dar las gracias especialmente al doctor Charalambos Aliprantis, que leyó detenidamente todo el manuscrito de la obra e hizo numerosas observaciones oportunas, además de proporcionarme algunos de los nuevos ejercicios. Por último, quisiera hacer patente mi agradecimiento a los estudiantes de Caltech, cuyo entusiasmo por las matemáticas fue el primer incentivo para esta obra.

T. M. A.

INTERDEPENDENCIA LÓGICA DE LOS CAPÍTULOS



Indice analítico

Análisis matemático

CAPÍTULO 1

El sistema de los números reales y el de los complejos

1.1 INTRODUCCIÓN

El Análisis matemático estudia conceptos relacionados de alguna manera con los números reales; por ello empezaremos nuestro estudio del Análisis con una discusión del sistema de los números reales.

Existen diversos métodos para introducir los números reales. Uno de ellos parte de los enteros positivos 1, 2, 3, ..., que considera conceptos no definidos, utilizándolos para construir un sistema más amplio, los *números racionales* positivos (cocientes de enteros positivos), los negativos y el cero. Los números racionales son utilizados, a su vez, para construir los *números irracionales,* números reales como $\sqrt{2}$ y π, que no son racionales. El sistema de los números reales lo constituye la reunión de los números racionales e irracionales.

A pesar de que estas cuestiones constituyen una parte importante de los fundamentos de la Matemática, no las describiremos aquí con detalle. Es un hecho que, en la mayor parte del Análisis, nos interesarán solamente las *propiedades* de los números reales antes que los métodos utilizados para construirlos. Por lo tanto, consideraremos los números reales mismos como objetos no definidos, sometidos a ciertos axiomas de los que extraeremos ulteriores propiedades. Dado que el lector está, probablemente, familiarizado con la mayoría de las propiedades de los números reales que consideraremos en las páginas que siguen, la exposición será más bien breve. Su propósito es examinar las características más importantes y persuadir al lector de que, de ser necesario, todas las propiedades se podrían deducir a partir de los axiomas. Tratamientos más detallados podrán hallarse en las referencias del final de este capítulo.

Por conveniencia usaremos la notación y la terminología de la teoría de conjuntos elemental. Supongamos que S designa un conjunto (una colección de objetos). La notación $x \in S$ significa que x está en el conjunto S, escribiendo $x \notin S$ para indicar que x no está en S.

Un conjunto S es un *subconjunto* de T si cada elemento de S está también en T. Lo indicaremos escribiendo $S \subseteq T$. Un conjunto es *no vacío* si contiene, por lo menos, un elemento.

Suponemos que existe un conjunto no vacío **R** de elementos, llamados números reales, que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación. Los axiomas se clasifican de manera natural en tres grupos a los que nos referiremos como *axiomas de cuerpo, axiomas de orden y axioma de completitud* (llamado también *axioma del supremo* o *axioma de continuidad*).

1.2 LOS AXIOMAS DE CUERPO

Junto con el conjunto **R** de los números reales admitimos la existencia de dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación,* tales que, para cada par de números reales x e y, la *suma* $x + y$ y el *producto* xy son números reales determinados unívocamente por x e y, satisfaciendo los siguientes axiomas. (En los axiomas que a continuación se exponen, x, y, z representan números reales arbitrarios en tanto no se precise lo contrario.)

Axioma 1. $x + y = y + x,\ xy = yx$ *(leyes conmutativas).*

Axioma 2. $x + (y + z) = (x + y) + z,\ x(yz) = (xy)z$ *(leyes asociativas).*

Axioma 3. $x(y + z) = xy + xz$ *(ley distributiva).*

Axioma 4. *Dados dos números reales cualesquiera x e y, existe un número real z tal que $x + z = y$. Dicho número z se designará por $y - x$; el número $x - x$ se designará por 0. (Se puede demostrar que 0 es independiente de x.) Escribiremos $-x$ en vez de $0 - x$ y al número $-x$ lo llamaremos opuesto de x.*

Axioma 5. *Existe, por lo menos, un número real $x \neq 0$. Si x e y son dos números reales con $x \neq 0$, entonces existe un número z tal que $xz = y$. Dicho número z se desginará por y/x; el número x/x se designará por 1 y puede demostrarse que es independiente de x. Escribiremos x^{-1} en vez de $1/x$ si $x \neq 0$ y a x^{-1} lo llamaremos recíproco o inverso de x.*

De estos axiomas pueden deducirse todas las leyes usuales de la Aritmética; por ejemplo, $-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$, $-(x - y) = y - x$, $x - y = x + (-y)$, etc. (Para un desarrollo más detallado, ver Referencia 1.1.)

1.3 LOS AXIOMAS DE ORDEN

Suponemos también la existencia de una relación $<$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los axiomas siguientes:

Axioma 6. *Se verifica una y sólo una de las relaciones* $x = y$, $x < y$, $x > y$.

NOTA. $x > y$ significa lo mismo que $y < x$.

Axioma 7. *Si* $x < y$, *entonces, para cada* z, *es* $x + z < y + z$.

Axioma 8. *Si* $x > 0$ *e* $y > 0$, *entonces* $xy > 0$.

Axioma 9. *Si* $x > y$ e $y > z$, *entonces* $x > z$.

NOTA. Un número real x se llama *positivo* si $x > 0$ y *negativo* si $x < 0$. Designaremos por $\mathbf{R}^+$ el conjunto de todos los números reales positivos y por $\mathbf{R}^-$ el conjunto de todos los números reales negativos.

De estos axiomas pueden deducirse las reglas usuales que rigen las operaciones con desigualdades. Por ejemplo, si tenemos que $x < y$, entonces $xz < yz$ si z es positivo, mientras que $xz > yz$ si z es negativo. Además, si $x > y$ y $z > w$ con y y w positivos, entonces $xz > yw$. (Para una discusión más detallada de estas reglas ver Referencia 1.1.)

NOTA. El simbolismo $x \leq y$ se utiliza para abreviar la afirmación:

$$\text{“}x < y \qquad \text{o} \qquad x = y.\text{”}$$

Resulta, pues, que $2 \leq 3$ ya que $2 < 3$; y $2 \leq 2$ ya que $2 = 2$. El símbolo $\geq$ se utiliza de forma análoga. Un número real x se llama *no negativo* si $x \geq 0$. Un par simultáneo de desigualdades tales como $x < y$, $y < z$ se abrevia por medio de la expresión $x < y < z$.

El teorema que sigue, que no es más que una consecuencia inmediata de los axiomas precedentes, se utiliza a menudo en las demostraciones del Análisis.

Teorema 1.1. *Sean* a *y* b *números reales tales que*

$$a \leq b + \varepsilon \ \textit{para cada} \ \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Entonces $a \leq b$.

Demostración. Si $b < a$, entonces la desigualdad (1) no se satisface para $\varepsilon = (a - b)/2$ puesto que

$$b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a.$$

Por lo tanto, por el axioma 6, resulta que $a \leq b$.

El axioma 10, axioma de completitud, será enunciado en la sección 1.11.

1.4. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales son, a menudo, representados geométricamente como puntos de una recta (denominada *recta real* o *eje real*). Se elige un punto para que represente el 0 y otro a la derecha del 0 para que represente el 1, como muestra la Fig. 1.1. Esta elección determina la escala. Con un conjunto apropiado de axiomas para la Geometría euclídea a cada punto de la recta real corresponde un número real y uno sólo y, recíprocamente, cada número real está representado por un punto de la recta real y uno solo. Es usual referirse al *punto x* en vez de referirse al punto correspondiente al número real x.

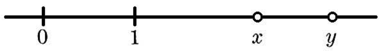


Figura 1.1

La relación de orden admite una interpretación geométrica simple. Si $x < y$, el punto x está a la izquierda del punto y, como muestra la figura 1.1. Los números positivos están a la derecha del 0 y los números negativos están a la izquierda del 0. Si $a < b$, un punto x satisface las desigualdades $a < x < b$ si, y sólo si, x está *entre* a y b.

1.5 INTERVALOS

El conjunto de todos los puntos comprendidos entre a y b se denomina *intervalo*. A menudo es importante distinguir entre los intervalos que incluyen sus extremos y los intervalos que no los incluyen.

NOTACIÓN. La notación $\{x : x \text{ verifica } P\}$ designa el conjunto de todos los números reales x tales que satisfacen la propiedad P.

Definición 1.2. *Supongamos $a < b$. El intervalo abierto (a, b) se define por*

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}.$$

El intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto $\{x : a \leq x \leq b\}$. Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se definen análogamente utilizando, respectivamente, las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$. Los intervalos infinitos se definen como sigue:

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}, \qquad [a, +\infty) = \{x : x \geq a\},$$

$$(-\infty, a) = \{x : x < a\}, \qquad (-\infty, a] = \{x : x \leq a\}.$$

Se utiliza a veces el intervalo $(-\infty, +\infty)$ para designar la recta real **R**. Un solo punto es considerado como un intervalo cerrado «degenerado».

NOTA. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se utilizan aquí tan sólo por conveniencias de notación y no deben ser considerados como números reales. Más adelante extenderemos el sistema de los números reales incluyendo estos dos símbolos, pero, mientras no lo hagamos, el lector deberá entender que todos los números reales son «finitos».

1.6 LOS ENTEROS

En esta sección se describen los *enteros* como un subconjunto especial de **R**. Antes de definir los enteros conviene introducir la noción de *conjunto inductivo.*

Definición 1.3. *Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si tiene las dos propiedades siguientes:*

a) *El número* 1 *está en el conjunto.*
b) *Para cada x del conjunto, el número $x + 1$ está también en el conjunto.*

Por ejemplo, **R** es un conjunto inductivo. También lo es $\mathbf{R}^+$. Definiremos los enteros positivos como aquellos números reales que pertenecen a todos los conjuntos inductivos.

Definición 1.4. *Un número real se denomina entero positivo si pertenece a cada uno de los conjuntos inductivos. El conjunto de los enteros positivos se designa por* $\mathbf{Z}^+$.

El conjunto $\mathbf{Z}^+$ es, a su vez, inductivo. Contiene al número 1, al número $1 + 1$ (designado por 2), al número $2 + 1$ (designado por 3), y así sucesivamente. Como $\mathbf{Z}^+$ es subconjunto de cada uno de los conjuntos inductivos consideraremos a $\mathbf{Z}^+$ como el *menor* conjunto inductivo. Esta propiedad de $\mathbf{Z}^+$ se denomina, a menudo, *principio de inducción.* Suponemos al lector familiarizado con las demostraciones por inducción que se basan en este principio. (Ver Referencia 1.1.) Ejemplos de tales demostraciones se dan en la sección siguiente.

Los opuestos de los enteros positivos se llaman *enteros negativos.* Los enteros positivos junto con los enteros negativos y el 0 (cero), forman un conjunto Z que llamaremos, simplemente, *conjunto de los enteros.*

1.7 TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ÚNICA PARA ENTEROS

Si n y d son enteros y si $n = cd$ para algún entero c, diremos que d es un *divisor* de n, o que n es un *múltiplo* de d, y escribiremos $d|n$ (se lee: d divide a n). Un entero n es *primo* si $n > 1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si $n > 1$ y n no es primo, entonces n es *compuesto*. El entero 1 no es ni primo ni compuesto.

Esta sección expone algunos resultados elementales acerca de la descomposición de enteros, culminando con el *teorema de descomposición única*, llamado también *el teorema fundamental de la Aritmética.*

El teorema fundamental establece que (1) cada entero $n > 1$ puede ser representado como producto de factores primos y que (2) esta descomposición es única, salvo en el orden de los factores. Es fácil probar la parte (1).

Teorema 1.5. *Cada entero $n > 1$ es primo o producto de primos.*

Demostración. Utilizaremos la inducción sobre n. El teorema se verifica trivialmente para $n = 2$. Supongamos que es cierto para cada entero k con $1 < k < n$. Si n no es primo, admite un divisor d con $1 < d < n$. Por lo tanto, $n = cd$, con $1 < c < n$. Puesto que tanto c como d son $< n$, cada uno es primo o es producto de primos; luego n es un producto de primos.

Antes de probar la parte (2), la unicidad de la descomposición, introduciremos otros conceptos.

Si $d|a$ y $d|b$, diremos que d es un *divisor común* de a y b. El teorema que sigue demuestra que cada par de enteros a y b posee un divisor común que es combinación lineal de a y de b.

Teorema 1.6. *Cada par de enteros a y b admite un divisor común d de la forma*

$$d = ax + by$$

donde x e y son enteros. Además, cada divisor común de a y b divide a d.

Demostración. Supongamos primeramente que $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y procedamos por inducción sobre $n = a + b$. Si $n = 0$, entonces $a = b = 0$ y podemos tomar $d = 0$ con $x = y = 0$. Supongamos entonces que el teorema ha sido probado para $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Por simetría podemos suponer $a \geq b$. Si $b = 0$, entonces $d = a$, $x = 1$, $y = 0$. Si $b \geq 1$ podemos aplicar la hipótesis de inducción a $a - b$ y a b, ya que su suma es $a = n - b \leq n - 1$. Por lo tanto existe un divisor común d de $a - b$ y b de la forma $d = (a - b)x + by$. Este entero d

divide también a $(a - b) + b = a$, luego d es un divisor común de a y de b y tenemos que $d = ax + (y - x)b$, es combinación lineal de a y b. Para completar la demostración debemos probar que cada divisor común divide a d. Como un divisor común divide a a y a b, dividirá también a la combinación lineal $ax + (y - x)b = d$. Esto completa la demostración si $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Si uno de ellos o ambos fuesen negativos, aplicaríamos el resultado que acabamos de demostrar a $|a|$ y $|b|$.

NOTA. Si d es un divisor común de a y b de la forma $d = ax + by$, entonces $-d$ es también un divisor común de la misma forma, $-d = a(-x) + b(-y)$. De estos dos divisores comunes sólo el no negativo se denomina el *máximo común divisor* de a y de b y se designa por mcd(a, b) o, simplemente, por (a, b). Si $(a, b) = 1$, se dice que a y b son *primos entre sí.*

Teorema 1.7 (Lema de Euclides). Si $a|bc$ y $(a, b) = 1$, entonces $a|c$.

Demostración. Como $(a, b) = 1$, podemos escribir $1 = ax + by$. Por lo tanto, $c = acx + bcy$. Pero $a|acx$ y $a|bcy$, luego $a|c$.

Teorema 1.8. *Si un número primo p divide a ab, entonces $p|a$ o $p|b$. En general, si un número primo p divide al producto $a_1 \dots a_k$, entonces p divide a uno de los factores por lo menos.*

Demostración. Supongamos que $p|ab$ y que p no divida a a. Si probamos que $(p, a) = 1$, el lema de Euclides implica que $p|b$. Sea $d = (p, a)$. Entonces $d|p$, luego $d = 1$ o $d = p$. No puede ser que $d = p$ ya que $d|a$, pero p no divide a a. Por lo tanto, $d = 1$. Para demostrar la afirmación más general se procede por inducción sobre el número k de factores. Los detalles se dejan al lector.

Teorema 1.9 (Teorema de descomposición única). *Cada entero $n > 1$ puede ser representado como producto de factores primos, y si se prescinde del orden de los factores la representación es única.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre n. El teorema es cierto para $n = 2$. Supongamos, entonces, que es cierto para todos los enteros mayores que 1 y menores que n. Si n es primo, no hay nada que demostrar. Supongamos, por lo tanto, que n es compuesto y que admite dos descomposiciones en factores primos; a saber

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_t. \tag{2}$$

Deseamos probar que $s = t$ y que cada p es igual a algún q. Dado que p_1 divide a $q_1 \cdot q_2 \dots q_t$, divide por lo menos a uno de los factores. Cambiando los índices de las q, si es necesario, se puede suponer p_1/q_1. Por lo tanto, $p_1 = q_1$ ya que tanto p_1 como q_1 son primos. En (2) simplificamos p_1 en ambos miembros y obtenemos

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_t.$$

Como n es compuesto, $1 < n/p_1 < n$; luego por la hipótesis de inducción las dos descomposiciones de n/p_1 son idénticas, si se prescinde del orden de los factores. Por lo tanto, lo mismo es cierto para (2) y la demostración está terminada.

1.8 LOS NÚMEROS RACIONALES

Los cocientes de enteros a/b (donde $b \neq 0$) se llamarán *números racionales*. Por ejemplo, $1/2$, $-7/5$, y 6 son números racionales. El conjunto de los números racionales, que designaremos por $\mathbf{Q}$, contiene a $\mathbf{Z}$ como subconjunto. Observe el lector que todos los axiomas de cuerpo y todos los axiomas de orden se verifican en $\mathbf{Q}$.

Suponemos que el lector está familiarizado con ciertas propiedades elementales de los números racionales. Por ejemplo, si a y b son racionales, su media $(a + b)/2$ también lo es y está comprendida entre a y b. Así pues, entre dos números racionales hay una infinidad de números racionales, lo cual implica que, dado un número racional cualquiera, no sea posible hablar del número racional «inmediato superior».

1.9 LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales*. Por ejemplo, los números $\sqrt{2}$, e, π y e^π son irracionales.

En general no es fácil probar que un cierto número particular es irracional. No existe ninguna demostración simple de la irracionalidad de e^π, por ejemplo. Sin embargo, la irracionalidad de números tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ no es excesivamente difícil de establecer y, de hecho, probaremos fácilmente el siguiente:

Teorema 1.10. *Si n es un entero positivo que no sea un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.*

Demostración. Suponemos en primer lugar que n no admite ningún divisor > 1 que sea cuadrado perfecto. Si admitimos que $\sqrt{n}$ es racional, llegamos a contradicción. Supongamos que $\sqrt{n} = a/b$, donde a y b son enteros sin divisores comunes. Entonces $nb^2 = a^2$ y, dado que el primer miembro de esta igualdad es un múltiplo de n, también lo será a^2. Sin embargo, si a^2 es múltiplo de n, a deberá serlo ya que n no admite divisores > 1 que sean cuadrados perfectos. (Esto se ve fácilmente examinando la descomposición de a en factores primos.) Todo ello significa que $a = cn$, donde c es un entero. Entonces la ecuación $nb^2 = a^2$ se transforma en $nb^2 = c^2n^2$, o $b^2 = nc^2$. El mismo argumento prueba que b debe ser asimismo múltiplo de n. Entonces a y b serían ambos múltiplos de n, lo cual contradice el hecho de que a y b carecen de divisores comunes. Esto finaliza la demostración en el caso de que n no admita un divisor > 1 que sea cuadrado perfecto.

Si n admite un factor que sea cuadrado perfecto, podremos escribir $n = m^2k$, donde $k > 1$ y k no admite divisores > 1 que sean cuadrados perfectos. Por lo tanto $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$; y si $\sqrt{n}$ fuese racional, el número $\sqrt{k}$ sería también racional, contradiciendo lo que acabamos de demostrar.

Un tipo distinto de argumentación es preciso para probar que el número e es irracional. (Suponemos cierta familiaridad con la exponencial e^x del Cálculo elemental y su representación como serie infinita.)

Teorema 1.11. *Si* $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots + x^n/n! + \ldots$, *entonces el número* e *es irracional.*

Demostración. Probaremos que e^{-1} es irracional. La serie e^{-1} es una serie alternada con términos que decrecen constantemente en valor absoluto. En tales series el error cometido al cortar la serie por el n-ésimo término tiene el signo algebraico del primer término que se desprecia y, en valor absoluto, es menor que el del primer término que se desprecia. Por lo tanto, si $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$, tenemos la desigualdad

$$0 < e^{-1} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!},$$

de la que se obtiene

$$0 < (2k-1)!\,(e^{-1} - s_{2k-1}) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}, \tag{3}$$

para todo entero $k \geq 1$. Ahora bien $(2k-1)!\,s_{2k-1}$ es siempre un entero. Si e^{-1} fuese racional, entonces podríamos elegir k suficientemente grande para que $(2k-1)!\,e^{-1}$ fuese también un entero. A causa de (3) la diferencia entre ambos enteros debería ser un número comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}$, lo cual es imposible. Luego e^{-1} no es racional y, por tanto, e tampoco lo es.

NOTA. Para una demostración de la irracionalidad de π, ver Ejercicio 7.33.

Los antiguos griegos sabían de la existencia de los números irracionales allá por el año 500 a.C. Sin embargo, una teoría satisfactoria de tales números no sería desarrollada hasta finales del siglo diecinueve en que tres teorías distintas son introducidas al mismo tiempo por Cantor, Dedekind y Weierstrass. En la Referencia 1.6 puede hallarse información acerca de las teorías de Dedekind y Cantor y sus equivalencias.

1.10 COTAS SUPERIORES; ELEMENTO MÁXIMO, COTA SUPERIOR MÍNIMA (SUPREMO)

Los números irracionales aparecen en Álgebra cuando se pretenden resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea un número real x tal que $x^2 = 2$. De los nueve axiomas enumerados anteriormente no puede deducirse si en $\mathbf{R}$ existe o no un número x, puesto que $\mathbf{Q}$ satisface también estos nueve axiomas y hemos probado que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. El axioma de completitud nos permitirá introducir los números irracionales en el sistema de los números reales y proporcionar al sistema de los números reales una propiedad de continuidad que es fundamental en muchos de los teoremas de Análisis.

Antes de describir el axioma de completitud, es conveniente introducir una terminología y una notación adicionales.

Definición 1.12. *Sea S un conjunto de números reales. Si existe un número real b tal que $x \leq b$ para todo x de S, diremos que b es una cota superior de S y que S está acotado superiormente por b.*

Decimos *una* cota superior ya que cada número mayor que b también es una cota superior. Si una cota superior b es, además, un elemento de S, b se denomina *último elemento* o *elemento máximo* de S. A lo sumo habrá uno de tales b. Si existe tal número b, escribiremos

$$b = \text{máx } S.$$

Un conjunto carente de cotas superiores se denomina *no acotado superiormente.*

Las definiciones de los términos *cota inferior, acotado inferiormente, primer elemento* (o *elemento mínimo*) pueden formularse análogamente. Si S tiene un elemento mínimo, designaremos a dicho mínimo por mín S.

Ejemplos.

1. El conjunto $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$ es un conjunto no acotado superiormente. No posee ni cotas superiores ni elemento máximo. Está acotado inferiormente por 0, pero no posee elemento mínimo.
2. El intervalo cerrado $S = [0, 1]$ está acotado superiormente por 1 e inferiormente por 0. De hecho, máx $S = 1$ y mín $S = 0$.