Lecciones

# ÁLGEBRA CLÁSICA

Gonzalo Masjuán T., Fernando Arenas D. y Felipe Villanueva M.

EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

# ÁLGEBRA CLÁSICA

Gonzalo Masjuán T., Fernando Arenas D. y Felipe Villanueva M.

EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Vicerrectoría de Comunicaciones y Asuntos Públicos
Casilla 114-D, Santiago, Chile
Fax (56-2)- 635 4789
editorialedicionesuc@uc.cl
www.edicionesuc.cl

**Álgebra Clásica**

Gonzalo Masjuán T., Fernando Arenas D. y Felipe Villanueva M.


Enero 2008
I.S.B.N. edición impresa 978-956-14-0931-6
I.S.B.N. edición digital 978-956-14-2547-7

Primera edición

Diseño: Francisca Galilea R.

Diagramación digital: ebooks Patagonia
www.ebookspatagonia.com
info@ebookspatagonia.com

C.I.P - Pontificia Universidad Católica de Chile
Masjuán Torres, Gonzalo.
Algebra/Gonzalo Masjuán, Fernando Arenas,
Felipe Villanueva.
1. Algebra

2007 512 dc 21 RCA2

# ÁLGEBRA CLÁSICA

Gonzalo Masjuán T., Fernando Arenas D. y Felipe Villanueva M.

# *Prólogo*

*Esta obra se inserta en el esfuerzo común de tres académicos de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile para renovar tanto la enseñanza como el interés que posee el educando en el cultivo de la Matemática*.

*Dada la necesidad de contar con un texto que se adecúe más fielmente a los requerimientos actuales, hemos intentado vaciar la experiencia obtenida durante bastantes años en la enseñanza del Álgebra. La idea fundamental es que con este libro pretendemos entregar un apoyo efectivo para el proceso de en- señanza-aprendizaje, o sea, prestar utilidad en las carreras regulares en que se imparte esta asignatura y, en particular, para los educandos que la estudian en la Pontificia Universidad Católica de Chile*.

*En este texto, los capítulos uno, tres, cuatro y cinco (inducción, sumatorias, progresiones y binomio) son del tipo estándar en cualquier curso de Álgebra. El capítulo dos presenta una forma bastante novedosa para resolver recurrencias en algunos casos. El capítulo seis es una introducción a la combinatoria, incluyendo algo sobre funciones generatrices. El capítulo siete es una aplicación de los números complejos al Álgebra y a la Geometría. El capítulo ocho entrega un tratamiento formal de polinomios y ecuaciones*.

*Insistimos, como autores, en que el estudiante necesita un buen nivel de razonamiento y habilidad algebraica. Cada capítulo contiene un buen número de ejercicios resueltos para que el estudiante aprenda métodos de resolución y* *para que también vaya madurando el proceso de aplicación de los conocimientos que va adquiriendo a medida que avanza. En cada capítulo, el lector encontrará problemas propuestos y al final de éstos podrá ubicar sus respuestas*.

*El nivel de dificultad de los problemas propuestos es gradual, llegándose a ejercicios bastante difíciles para el estudiante; esto lo advertimos para que quien trate de resolverlos en su totalidad no se desanime en el caso de no obtener resultados inmediatos para alguno o algunos. La ejercitación en Matemática es muy importante y la dificultad no puede ser, en general, sencilla. Por tal motivo, en los problemas resueltos presentados, se ha pretendido que el alumno pueda visualizar la idea central usada en la resolución y, a su vez, aplicarla en los ejercicios propuestos*.

*En todo texto que se publica hay errores. Los autores piden ser disculpados por los de éste, ya que, por mucho que se revise, siempre se deslizan algunos. Los autores agradecerían se los hicieran saber*.

*Es deber nuestro agradecer a la Vicerrectoría Académica, quien, a través del Fondo de Desarrollo para la Docencia, hizo posible este texto. También agradecemos a la Facultad de Matemáticas tanto por su apoyo como por darnos el tiempo necesario para dedicarnos al libro. A su vez, agradecemos al numeroso alumnado que nos conoció y nos colaboró con los distintos apuntes y guías que les dimos por muchos años, es por ellos que principalmente se dirige este texto a los futuros alumnos nuestros*.

**Fernando Arenas Daza**,
**Gonzalo Masjuán, Torres**,
**Felipe Villanueva Mansilla**

*Santiago, julio de 2007*

# ÍNDICE GENERAL

## Capítulo 1 Números naturales



## Capítulo 2 Ecuaciones en diferencias finitas

## Capítulo 3 Sumatorias



## Capítulo 4 Progresiones



## Capítulo 5 Teorema del binomio



## Capítulo 6 Combinatoria

## Capitulo 7 Números complejos

## Capitulo 8 Polinomios y ecuaciones

Capítulo 1

# NÚMEROS NATURALES

En la presentación efectuada en la enseñanza media, se introdujeron los números reales. Este conjunto no vacío, que se simbolizo por $\mathbb{R}$, satisface la axiomatica de campo ordenado y completo. Los elementos de este conjunto pasaron a ser los números reales y ayudados por la teoría de conjuntos se definieron algunos conjuntos de números reales tales como los naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, o sea partimos del conjunto universo $\mathbb{R}$ y fuimos consiguiendo subconjuntos de $\mathbb{R}$ hasta obtener $\mathbb{N}$. La pregunta que se plantea es: ¿Se podra proceder al reves, es decir, partir de $\mathbb{N}$ y llegar a $\mathbb{R}$? Este camino es posible, pero requiere de una mayor conceptualizaciúon.

## 1.1 Conjuntos inductivos

**Definición 1.1.1** *Sea A un conjunto de números reales, entonces:*

$$A \textbf{ es inductivo} \longleftrightarrow (1 \in A \wedge \forall x \in \mathbb{R}(x \in A \rightarrow (x + 1) \in A)).$$

**Notas:**

Hacemos ver que si $A$ es inductivo, entonces $1 \in A$, $(1 + 1) = 2 \in A$, tambien $2 + 1 = 3 \in A$, etc.

Algunos ejemplos de conjuntos inductivos son $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\{x \,/\, x \geq 1\}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, etc.

Como ejemplos de conjuntos no inductivos tenemos $\mathbb{R}^{-}$, $[-3, 8$, $(-13, 81]$, $\{x \,/\, x \leq 1\}$, etc.

**Definición 1.1.2 El conjunto de los números naturales** *se define como:*

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \textbf{para todo conjunto } A \textbf{ inductivo};\ x \in A\}.$$

**Nota:**

La definición anterior nos dice que $\mathbb{N}$ es **el menor conjunto de números reales que es inductivo**.

Haremos ver que $\mathbb{N}$ contiene exactamente a los números:

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, (n+1), \cdots$$

Por tal motivo deberemos entregar la definición de **función sucesor**.

**Definición 1.1.3 La función sucesor** $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se define por* $s(x) = x + 1$.

El objetivo principal al entregar la definición anterior es para que el teorema que viene a continuacion quede bien expresado.

**Teorema 1.1.1** *Se tiene:*

(1) $\in \mathbb{N}$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}(s(n) \in \mathbb{N})$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}(n > 0)$.

(4) $\forall n \in \mathbb{N}(s(n) \neq 1)$.

(5) $\forall n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N}(s(n) = s(m) \to n = m)$.

(6) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n = 1 \lor \exists m \in \mathbb{N}(s(m) = n))$.

**Demostración:**

Sólo entregaremos la demostración de (3). Pues bien, sea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}$, haremos ver que $A$ es inductivo.

En primer lugar, $1 \in A$, pues sabemos que $1 > 0$, esto es a causa de la axiomática de que $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ es campo ordenado. Por otra parte, sea $n \in A$, entonces $n \in \mathbb{N}$ y $n > 0$, luego $(n + 1) \in \mathbb{N}$ y como $n + 1 > 1 > 0$ se concluye que $(n + 1) \in A$.

Por lo tanto, tenemos que $A$ es inductivo, en consecuencia, resulta $\mathbb{N} \subseteq A$, o sea, $\forall n \in \mathbb{N}\ (n > 0)$.

**Nota:**

El esquema que se utilizó en la demostración anterior es el siguiente:

(1) Se construye el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ **satisface la propiedad** $p\}$, lo que simbolizamos mediante $A = \{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\}$.

(2) Se demuestra que el conjunto $A$ definido en (1) es inductivo, es decir:

(2.1) $1 \in A$, lo que es equivalente a demostrar que 1 tiene la propiedad $p$, es decir $p(1)$.

(2.2) $n \in A\ s(n) \in A$, o sea si $n \in A$, entonces $p(n) \rightarrow p(n + 1)$.

(2.3) Se concluye que $\mathbb{N} \subseteq A$, o sea, $\forall n \in \mathbb{N}\ (p(n))$.

El esquema anterior es lo que se conoce como **Primer principio de inducción matemática**, este principio nos entrega un metodo para demostrar cualquier propiedad $p(n)$ para todos los números naturales.

# 1.2 Principios de inducción

## 1.2.1 Primer principio de inducción

El enunciado de este principio es el siguiente:

Sea $p(n)$ una formula en $n$, entonces:

$$[p(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \ (p(n) \rightarrow p(n+1))] \rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ (p(n)).$$

**Nota:**

Tenemos:

$$2 + 4 + 6 + \cdots 2n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n),$$

ahora bien, veremos en el problema resuelto [1.3.2] que:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

con lo que:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1) = n^2 + n \neq n^2 + n + 1,$$

sin embargo, si consideramos la proposición falsa:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2\,n = n^2 + n + 1,$$

como verdadera para $n$, sumando $(2n + 2)$ a cada lado de ésta, se cumple que:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2\,n + (2n + 2) = n^2 + n + 1 + (2n + 2) =$$

$$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1 = (n + 1)^2 + (n + 1) + 1,$$

vemos que se satisface la hipótesis inductiva. No se puede tener la igualdad para un primer $n$, por ejemplo, para 1, 2, etc.

Al no cumplirse para $n = 1, 2, 3, \cdots$ no podemos concluir que es falsa, pues podría ser verdadera por ejemplo para $n = 2789341$.

**Nota:**

El siguiente resultado es equivalente con el **primer principio de inducción** y proposición el metodo para resolver aquellos casos en que se desea demostrar inductivamente una propiedad $p(n)$ no necesariamente para todo natural $n$, sino que para aquellos $n$ mayores o iguales a algún natural $a$.

**Teorema 1.2.1** *Sea $n_0 \in \mathbb{N}$, $p(n)$ una fórmula que contiene a $n$, entonces:*

$$[p(n_0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ ((n \geq n_0 \wedge p(n) \to p(n + 1))] \to \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0)\ p(n).$$

**Demostración:**

Si $n_0 = 1$ se tiene el **primer principio de induccion** y el teorema es cierto. Consideremos, entonces para $n_0 \in \mathbb{N}$ el conjunto:

$$I_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid (n \geq n_0 \to p(n)\}\ .$$

Haremos ver que $I_1$ es un conjunto inductivo.

En primer lugar, tenemos que $1 \in I_1$ puesto que:

(i) Si $1 \geq n_0$ , entonces $n_0 = 1$ y, por hipótesis, se tiene que $p(n_0)$ es verdad, luego, $p(1)$ es verdadero y $1 \in I_1$.

(ii) Si $1 \not\geq n_0$, entonces $1 \geq n_0 \rightarrow p(1)$ es verdad, porque el antecedente es falso, luego $1 \in I_1$.

Tomemos ahora $n \in I_1$, entonces $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq n_0 \rightarrow p(n)$, luego tenemos que $(n + 1) \in \mathbb{N}$ y se presentan dos casos:

(i) Si $n \geq n_0$, entonces $n + 1 \geq n_0 + 1$, luego $n \in I_1$ y $n \geq n_0$, entonces $p(n)$ es verdad y, por la hipótesis del teorema, $p(n + 1)$ es verdad, por lo tanto, $(n + 1 \geq n_0 \rightarrow p(n + 1))$. Luego $(n + 1) \in I_1$.

(ii) Si $n \not\geq n_0$ se tiene $n < n_0$ y, por lo tanto $(n + 1) \leq n_0$; luego:
   (a) Si $(n + 1) = n_0$, entonces como $p(n_0)$ es verdad por hipótesis se tendrá que $(n + 1) \in I_1$.
   (b) Si $(n + 1) < n_0$, entonces $(n + 1 \geq n_0 \rightarrow p(n + 1)$ es verdad porque su antecedente es falso, por lo tanto, $(n + 1) \in I_1$.

Hemos demostrado que $I_1$ es un conjunto inductivo con lo que $\mathbb{N} \subseteq I_1$, o sea $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \in I_1)$, o mejor $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq n_0)$ $p(n)$.

### 1.2.2 Segundo principio de inducción

El enunciado de este principio es el siguiente:

Sea $p(n)$ una fórmula en $n$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces:

(i)

$$[p(n_0) \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ [(n > n_0)\ (p(n_0) \wedge p(n_0 + 1) \wedge \cdot \cdot \cdot \wedge p(n)) \to p(n + 1)]]$$

$$\downarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ((n > n_0)\ p(n)).$$

(ii)

$$[p(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ [(p(1) \wedge p(2) \wedge \cdots \wedge p(n)) \to p(n + 1)]] \to \forall n \in \mathbb{N}\ (\ p(n)).$$

**Nota:**

Es claro que (ii) es un caso particular de (i).

### 1.2.3 Otros conceptos

A causa de lo que estudiaremos con posterioridad, es necesario entregar algunas definiciones inductivas; éstas son:

**Definición 1.2.1** *Sea $n \in \mathbb{N}$ se define* **la función factorial (!)** *del modo siguiente:*

$$1! = 1 \wedge (n + 1)! = n!(n + 1).$$

**Definición 1.2.2** *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, se define* **la sumatoria desde** $k = 1$ **hasta** $k = n$ **de los** $f(k)$ *del modo siguiente:*

$$\sum_{k=1}^{1} f(k) = f(1)\ \wedge\ \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + f(n+1).$$

**Definición 1.2.3** *Sea* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *se define* **la productoria desde** $k = 1$ **hasta** $k = n$ **de los** $f(k)$ *del modo siguiente:*

$$\prod_{k=1}^{1} f(k) = f(1) \ \wedge \ \prod_{k=1}^{n+1} f(k) = \left(\prod_{k=1}^{n} f(k)\right) \cdot f(n+1).$$

**Definición 1.2.4** *Sea* $p \in \mathbb{N}$ *diremos que* $p$ **es un número primo** *si:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ (p = n \cdot m \to (n = 1 \vee m = 1)).$$

**Definición 1.2.5** *Sean* $p, q \in \mathbb{Z}$ *diremos que* $p$ *y* $q$ **son primos relativos** *si:*

$$(\forall r \in \mathbb{Z})(\forall s \in \mathbb{Z})(\forall t \in \mathbb{Z})[(p = r \cdot s \wedge q = r \cdot t) \to (r = 1 \vee r = -1)],$$

*es decir, si el* $MCD(p, q) = 1$

A continuación pasaremos a aplicar los principios de inducción resolviendo algunos problemas.

# 1.3 Problemas resueltos

**Problema 1.3.1** *Para el natural fijo n, calcular la suma:*

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

**Solución:**

Se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 \\ \hline\hline \end{array}$$

y sumando miembro a miembro estas dos igualdades, se obtiene:

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \cdots + (n + 1),$$

o sea:

$$2S = n(n + 1),$$

de donde:

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

que es el resultado pedido.

**Nota:**

En el problema siguiente, haremos ver que esta fórmula es válida para todo número natural.

**Problema 1.3.2** *Demostrar que:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

**Solución:**

Consideramos el conjunto:

$$I = \left\{n \in \mathbb{N} \mid \left(1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)\right\},$$

haremos ver que este conjunto $I$ es inductivo.

Que $n = 1 \in I$ es evidente, pues:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Suponemos válido que $n \in I$, o sea:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ahora deberemos probar que $(n + 1) \in I$, es decir:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

En efecto, se tiene:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

por lo tanto $I$ es un conjunto inductivo. Esto quiere decir que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right).$$

**Problema 1.3.3** *Para el natural fijo n, calcular la suma:*

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

**Solución:**

Se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2^3 & - & 1^3 & = & (1+1)^3 & - & 1^3 & = & 3\cdot 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1 \\
3^3 & - & 2^3 & = & (2+1)^3 & - & 2^3 & = & 3\cdot 2^2 & + & 3\cdot 2 & + & 1 \\
4^3 & - & 3^3 & = & (3+1)^3 & - & 3^3 & = & 3\cdot 3^2 & + & 3\cdot 3 & + & 1 \\
5^3 & - & 4^3 & = & (1+1)^3 & - & 4^3 & = & 3\cdot 4^2 & + & 3\cdot 4 & + & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & & & & \\
(n+1)^3 & - & n^3 & = & & & & = & 3\cdot n^2 & + & 3\cdot n & + & 1 \\
\hline\hline
\end{array}$$

y sumando miembro a miembro estas dos igualdades, se obtiene:

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n,$$

o sea:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = (n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2},$$

de donde se consigue:

$$3\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2\right) = \frac{n+1}{2}\left[2(n+1)^2 - 2 - 3n\right] = \frac{n+1}{2}(2n^2 + n) =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

por consiguiente:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**Notas:**

(1) En el problema siguiente, haremos ver que esta fórmula es válida para todo número natural.

(2) En lo sucesivo, por comodidad, no escribiremos en las soluciones siguientes el conjunto *I* (que deberá

establecerse que es inductivo); sólo probaremos para $n = 1$, aceptaremos para $n$ y demostraremos para $n + 1$.

**Problema 1.3.4** *Demostrar que:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right).$$

**Solución:**

Para $n = 1$ es evidente, pues:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Suponemos el resultado válido hasta n, o sea:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ahora deberemos probarlo para $(n + 1)$, es decir:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

En efecto, se tiene:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) =$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

**Problema 1.3.5** *Para el natural fijo n, calcular la suma:*

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdot \cdot\cdot + n^3.$$

**Solución:**

Se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2^4 & - & 1^4 & = & (1+1)^4 & - & 1^4 & = & 4\cdot 1^3 & + & 6\cdot 1^2 & + & 4\cdot 1 & + & 1 \\
3^4 & - & 2^4 & = & (2+1)^4 & - & 2^4 & = & 4\cdot 2^3 & + & 6\cdot 2^2 & + & 4\cdot 2 & + & 1 \\
4^4 & - & 3^4 & = & (3+1)^4 & - & 3^4 & = & 4\cdot 3^3 & + & 6\cdot 3^2 & + & 4\cdot 3 & + & 1 \\
5^4 & - & 4^4 & = & (4+1)^4 & - & 4^4 & = & 4\cdot 4^3 & + & 6\cdot 4^2 & + & 4\cdot 4 & + & 1 \\
 & & & & & & & \cdots & & & & & & & \\
(n+1)^4 & - & n^4 & = & & & & = & 4\cdot n^3 & + & 6\cdot n^2 & + & 4\cdot n & + & 1 \\
\hline\hline
\end{array}$$

sumando miembro a miembro estas dos igualdades y factorizando adecuadamente, se obtiene:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**Nota:**

En el problema siguiente, haremos ver que esta fórmula es válida para todo número natural.

**Problema 1.3.6** *Demostrar que:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ [1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2].$$

**Solución:**

A causa de la similitud con los problemas anteriores, la demostración queda a cargo del lector.

**Problema 1.3.7** *Demostrar que:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\left[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2\right].$$

**Solución:**

Para $n = 1$ es evidente, pues:

$$1 = 1^2.$$

Suponemos el resultado válido hasta n, o sea:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Ahora deberemos probarlo para $(n + 1)$, es decir:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

En efecto, se tiene:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

**Problema 1.3.8** *Demostrar que:*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ [(x - y) \text{ es divisor de } (x^n - y^n)].$$

**Solución:**

Para $n = 1$ es evidente, puesto que $x - y$ es factor de $x - y$. Suponemos ahora que $x - y$ es divisor de $x^n - y^n$; deberemos establecer que $x - y$ es divisor de $x^{n+1} - y^{n+1}$.

Si a $x^{n+1} - y^{n+1}$ le restamos y sumamos $xy^n$, conseguiremos:

$$x^{n+1} - y^{n+1} = x^{n+1} - xy^n + xy^n - y^{n+1} = x(x^n - y^n) + y^n(x - y).$$

Como cada término de esta última expresión es divisible por $x - y$, también lo es $x^{n+1} - y^{n+1}$, lo que demuestra lo pedido.

**Problema 1.3.9** *Si* $a_1 = a_2 = 1$ *y* $a_n + 1 = 3a_n + a_{n-1}$ ($n \geq 2$), entonces $a_n$ y $a_n + 1$ *son primos relativos*.

**Solución:**

Vemos que $a_1$ y $a_2$ son primos relativos. Aceptemos la propiedad hasta $n$ y supongamos que $a_n$ y $a_n + 1$ **no** son primos relativos, o sea, existe el máximo común divisor entre $a_n$ y $a_{n-1}$ y es MCD[$a_n$, $a_n + 1$] = $d \neq 1$, es decir, $a_n + 1 = pd$ y $a_n = qd$ y como $a_n + 1 = 3a_n + a_{n-1}$ resulta $pd = 3qd + a_{n-1}$, luego $a_{n-1} = (p - 3q)d$, MCD[$a_n$, $a_{n-1}$]= $d \neq 1$, lo que es una contradicción, puesto que

hemos aceptado que estos últimos son primos relativos.

**Problema 1.3.10** *Sea* $n \in \mathbb{N}$, *se considera* $y_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$. *Demostrar que:*

(1) $y_n + 1 = 6y_n - 4y_{n-1}$.

(2) $y_n$ es entero.

(3) *El siguiente entero mayor que* $(3 + \sqrt{5})^n$ *es divisible por* $2^n$.

**Solución:**

**Para (1)**

$$6y_n - 4y_{n-1} = 6((3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n)) - 4((3+\sqrt{5})^{n-1} + (3-\sqrt{5})^{n-1}) =$$
$$= (3+\sqrt{5})^{n-1}(6(3+\sqrt{5})-4) + (3-\sqrt{5})^{n-1}(6(3-\sqrt{5})-4) =$$
$$= (3+\sqrt{5})^{n-1}(14+6\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})^{n-1}(14-6\sqrt{5}) = (3+\sqrt{5})^{n-1}(3+\sqrt{5})^2 +$$
$$+(3-\sqrt{5})^{n-1}(3-\sqrt{5})^2 = (3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+1} = y_{n+1}.$$

**Para (2)**

$$y_1 = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6 \text{ es entero.}$$

$$y_2 = (3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 = 2(9 + 5) = 28 \text{ es entero.}$$

Supongamos que $y_1$, $y_2$, ·· · , $y_n$ son enteros; pues bien, como $y_{n+1} = 6y_n - 4y_{n-1}$ se sigue que $y_{n+1}$ es entero.

**Para (3)**

Si $n = 1$ el siguiente entero mayor que $(3 + \sqrt{5})$ es 6, que es divisible por $2^1 = 2$. Si $n = 2$, el siguiente entero mayor que $(3 + \sqrt{5})^2$ es 28, que es divisible por $2^2 = 4$. Ahora como $(3 - \sqrt{5})^n$ es decimal (o sea $\in ]0, 1[$), se deduce que $y_n$ es el siguiente entero mayor que $(3 + \sqrt{5})^n$. Si $y_n$ es divisible por $2n$ e $y_{n-1}$ es divisible por $2^{n-1}$, entonces por (1) se tendrá $y_{n+1} = 6y_n - 4y_{n-1} = 6 \cdot 2^n p - 4 \cdot 2^{n-1} q = 2^{n+1}(3_p - q)$.

**Problema 1.3.11** *Si* $a_1 = -5$, $a_2 = -26$ *y*

$$\forall n \geq 3 : a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 5 \cdot 2^{n-2},$$

*entonces:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n - 5 \cdot n \cdot 2^{n-1}.$$

**Solución:**

En este caso se tiene:

$$a_1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot 2^0 = -5,$$

y también:

$$a_2 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2 \cdot 2^1 = -26.$$

Por otro lado, resulta:

$$a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} + 5 \cdot 2^{n-1} =$$
$$= 5(3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n - 5 \cdot n \cdot 2^{n-1}) - 6(3 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1} - 5 \cdot (n-1) \cdot 2^{n-2}) + 5 \cdot 2^{n-1} =$$
$$= 3 \cdot 2^n(5-3) - 2 \cdot 3^n(5-2) - 5 \cdot n \cdot 2^{n-1}(5-3) + 2^{n-1}(5-15) 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot n \cdot 2^n - 5 \cdot 2^n =$$
$$= 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} - 5 \cdot (n+1) \cdot 2^n.$$

**Problema 1.3.12** *Demostrar que:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : 83^{4n} - 2 \cdot 97^{2n} + 1$$

*es divisible por* 16.

**Solución:**

<u>**Para** $n = 1$</u>
$83^4 - 2 \cdot 97^2 + 1 = 47.458.321 - 18818 + 1 = 47.439.504$
$= 16 \cdot 2.964.969$

<u>**Se supone para** $n$</u>

$$83^{4n} - 2 \cdot 97^{2n} + 1$$

es divisible por 16.

**<u>Se demuestra para $n+1$</u>**

$$83^{4n+4} - 2 \cdot 97^{2n+2} + 1$$

es divisible por 16.

**<u>Demostración:</u>**

$$83^{4n+4} - 2 \cdot 97^{2n+2} + 1 - (83^{4n} - 2 \cdot 97^{2n} + 1) = 83^{4n}(83^4 - 1) + 2 \cdot 97^{2n}(1 - 97^2) =$$

$$= 83^{4n} \cdot 47.458.320 - 2 \cdot 97^{2n} \cdot 9408 = 16(83^{4n} \cdot 2.966145 - 2 \cdot 97^{2n} \cdot 588).$$

**Problema 1.3.13** *Demostrar que si n es impar, entonces 24 divide a:*

$$n(n^2 - 1)$$

**Solución:**

**<u>Para $n = 1$, que es impar</u>**

$$1(1^2 - 1) = 0$$

y 0 es divisible por 24.

**<u>Se supone para $n = 2m - 1$</u>**

$(2m - 1)[(2m - 1)^2 - 1] = 4m(2m - 1)(m - 1)$es divisible por 24.

**<u>Se demuestra para $n = 2m + 1$</u>**

$(2m + 1)[(2m + 1)^2 - 1] = 4m(2m + 1)(m + 1)$ es divisible por 24.

**<u>Demostración:</u>**

$$4m(2m+1)(m+1)-4m(2m-1)(m-1) = 4m(2m^2+3m+1-2m^2+3m-1) = 24m^2$$

**Problema 1.3.14** *Demostrar que:*

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\leq\frac{5}{6}$$

**Solución:**

**<u>Para *n* = 1</u>**

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}\leq\frac{5}{6}$$

**<u>Se supone para *n*</u>**

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\leq\frac{5}{6}$$

**<u>Se demuestra para *n* + 1</u>**

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\leq\frac{5}{6}$$

**<u>Demostración:</u>**

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{n+1}=\frac{2n+3+2(n+1)-2(2n+3)}{2(n+1)(2n+3)}=\frac{-1}{2(n+1)(2n+3)}\leq 0$$

luego:

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\leq\frac{5}{6}.$$

**Problema 1.3.15** *Demostrar que:*