

Studien zur theoretischen und empirischen
Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Katharina Manderfeld

Vorstellungen zur Mathematikdidaktik

Explorative Studien zu Beliefs,
Einstellungen und Emotionen von
Bachelor-Studierenden im Lehramt
Mathematik

MOREMEDIA



Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/15969>

Katharina Manderfeld

Vorstellungen zur Mathematikdidaktik

Explorative Studien zu Beliefs,
Einstellungen und Emotionen von
Bachelor-Studierenden im Lehramt
Mathematik

 Springer Spektrum

Katharina Manderfeld
Hellenthal – Losheim, Deutschland

Dissertation der Julius-Maximilians-Universität Würzburg, 2019

Tag der mündlichen Prüfung: 10.10.2019

Erstgutachter: Prof. Dr. Hans-Stefan Siller

Zweitgutachterin: Prof. Dr. Katrin Rolka

ISSN 2523-8604

ISSN 2523-8612 (electronic)

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

ISBN 978-3-658-31085-1

ISBN 978-3-658-31086-8 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-31086-8>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Carina Reibold

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

In den Dokumenten „Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung“ (KMK, 2017b) sowie „Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften“ (KMK, 2004) wird auch die fachdidaktische Ausbildung angehender Lehrkräfte gewürdigt. Insbesondere wird im „Fachspezifischen Kompetenzprofil“ (KMK, 2017b, S. 38) ersichtlich, welche Rolle die Fachdidaktik einnehmen soll. Insofern ist zu erwarten, dass sich Studierende des Unterrichtsfachs Mathematik reflektiert und eingehend mit der Rolle der Mathematikdidaktik auseinandersetzen dürfen, ja sogar müssen. Die Frage, wie selbstverständlich die Auseinandersetzung mit fachdidaktischen Fragen bzw. der Rolle der Fachdidaktik im Studium des Unterrichtsfachs Mathematik ist, stellt sich in der Arbeit von Katharina Manderfeld.

Eingebettet in das Qualitätsoffensive-Projekt „Modulare Schulpraxiseinbindung als Ausgangspunkt zur individuellen Kompetenzentwicklung“ (MoSAiK) hat Frau Manderfeld im Teilprojekt II.1 „Berufsrollenreflexion und persönliche Entwicklung von (Mathematik-)Lehramtsstudierenden“ die Vorstellungen, insbesondere die Beliefs von Studierenden zur Mathematikdidaktik beforcht.

Ausgangspunkt der Arbeit stellt eine Befragung unter Studierenden dar, die insbesondere die mathematikdidaktische Rolle einer Lehrkraft aufgreift und fokussiert. In weiterer Folge dient diese Befragung als Ausgangspunkt für eine zweite sich anschließende Interviewstudie mit Teilnehmerinnen und Teilnehmern der ersten Studie.

In der ersten Studie zeigt sich, dass ein (sehr) heterogenes Bild der mathematikdidaktischen Rolle einer Lehrkraft in den Köpfen der Studierenden existiert. Gerade aus diesen Antworten zieht Frau Manderfeld die Motivation in der vorliegenden Arbeit, Vorstellungen zur Mathematikdidaktik bei Studierenden mit Hilfe eines Mixed-Methods-Forschungsdesigns zu untersuchen.

Das von Frau Manderfeld gewählte Vorgehen folgt einem explorativen Ansatz. Es werden sowohl Oberflächenmerkmale, in diesem Fall die Inhalte der ersten Studie, die von Studierenden mit Mathematikdidaktik verbunden werden, als auch Tiefenstrukturmerkmale, insbesondere zugehörige Vorstellungen der Studierenden in der zweiten Studie, identifiziert und charakterisiert.

Durch dieses Vorgehen wird von Frau Manderfeld ein bemerkenswerter Beitrag zur Theoriebildung in der Mathematikdidaktik basierend auf der (historischen) Entwicklung der wissenschaftlichen Disziplin sowie aktuellen empirisch fundierten Arbeiten geleistet. Gleichzeitig gelingt ein fundierter und in gleicher Weise evidenzbasierter Beitrag zur Diskussion um Beliefs und Vorstellungen von Studierenden aus hochschuldidaktischer Perspektive sowie ein begründeter Beitrag zur Theorie-Praxis-Verknüpfung an der Universität, insbesondere in der frühen fachdidaktischen Lehrerbildung.

Hans-Stefan Siller

Danksagung

Zuerst möchte ich meinem Doktorvater Hans-Stefan Siller danken: Ich danke dir dafür, dass du in mir das Potenzial gesehen und mich dazu motiviert hast, den Weg der Promotion einzuschlagen sowie dafür, dass du mich auf diesem Weg stets mit allem dir Möglichen unterstützt hast. Auch Katrin Rolka möchte ich danken – dafür, dass du mich schon ganz zu Beginn in meiner Arbeit ermutigt hast und dich später dann auch bereit erklärt hast, mein Promotionsvorhaben zu begutachten.

Darüber hinaus gilt ein besonderer Dank den Würzburger, Landauer und Koblenzer Doktorandinnen und Doktoranden, mit denen ich Freude und Leid in den vergangenen Jahren teilen konnte. Neben meinen treuen Mittagessens-Gefährten Felicitas und Heiner möchte ich ganz besonders auch Jenni danken, die nicht nur das Büro mit mir teilte, sondern mir auch seelische Stütze, Beraterin, Leidensgenossin und allen voran Freundin war und ist. Auch dir, Sandra, möchte ich besonders für die ausgiebigen Gespräche danken. Deine Sichtweise hat mir vor allem dabei geholfen, meine Daten aus unterschiedlichen Perspektiven zu betrachten.

Sebastian, Florian, David, Katty, Vanessa, Kerstin, Mona und Marc-André, euch möchte ich von ganzem Herzen für eure Unterstützung durch Korrekturlesen und Codieren danken. Ihr habt euch trotz eigener Arbeit die Zeit genommen, mir weiterzuhelfen, was ich sehr zu schätzen weiß.

Um einen neuen Weg zu bestreiten, braucht es einen Rückhalt, der einem Mut und die Gewissheit gibt, dass man nicht tief fallen kann. Ein solcher Rückhalt ist nicht selbstverständlich. Eine Familie zu haben, mit der man über alles sprechen kann, die einen auffängt und bei der man weiß, jeder einzelne würde für dich durchs Feuer gehen, ist ein Glück, das nicht jedem zuteilwird. Umso mehr möchte ich dafür danken, dass ich mit euch, Gisela, Peter, Rebecca und David, eine solche Familie habe. Besonderen Rückhalt und die größte Unterstützung

habe ich durch dich erfahren, Marc-André. Dir gilt ein ganz besonderer Dank für dein stets offenes Ohr, für deine Ratschläge, für das Diskutieren, für deine Aufmunterungen, für das Mitfiebern, für jedes Lachen, das wir geteilt haben und teilen, und für noch so vieles mehr.

Auch meinen bisher noch nicht erwähnten Freundinnen und Freunden, meiner Manderfeld- und meiner Braun-Familie möchte ich danken, denn die Momente, in denen wir zusammen reden und lachen, sind für mich immer etwas ganz Besonderes.

Vielen Dank euch allen!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation – Das Projekt MoSAiK als spezifischer Kontext	2
1.2	Ziele der Arbeit	3
1.3	Aufbau der Arbeit	5
 Teil I Theoretischer Hintergrund		
2	Zur Beforschung studentischer Vorstellungen	11
2.1	Definitorische Einordnung des Vorstellungsbegriffs	11
2.1.1	Vorstellungen in der mathematikdidaktischen Begriffs-Forschung	12
2.1.2	Vorstellungen aus der Perspektive der Affekt-Forschung	15
2.1.3	Vorstellungen in der vorliegenden Arbeit	25
2.2	Zur Rolle von Vorstellungen in konstruktivistischen Lehr-Lern-Prozessen	28
2.3	Erkenntnisse zu Vorstellungen von Lehramtsstudierenden	32
2.4	Beliefs als zentraler Bestandteil von Vorstellungen	37
2.4.1	Globale Beliefs	37
2.4.2	Epistemologische Beliefs	40
2.4.3	Messung von Beliefs zur Mathematik	41
2.4.4	Konsequenzen für die Beforschung mathematikdidaktischer Beliefs	48

3	Mathematikdidaktik als Referenzobjekt studentischer Vorstellungen	51
3.1	Mathematikdidaktik als Wissenschaft	51
3.1.1	Die Wissenschaftlichkeit der Mathematikdidaktik	53
3.1.2	Mathematikdidaktik zwischen Theorie und Praxis	61
3.1.3	Gegenstände und Ziele mathematikdidaktischer Forschung	65
3.2	Mathematikdidaktik als Kompetenzbereich.	77
3.2.1	Professionelle Kompetenzen im Lehrberuf	78
3.2.2	Fachdidaktisches Wissen als Teil des Professionswissens.	82
3.2.3	Konzeptualisierungen mathematikdidaktischen Wissens	88
3.2.4	Ergebnisse zur Messung mathematikdidaktischen Wissens	97
3.3	Mathematikdidaktik als Lerngegenstand	104
3.3.1	Entwicklung vom Novizen-Stadium zur Expertise	104
3.3.2	Empfehlungen für die fachdidaktische Lehrerbildung	110
3.4	Perspektiven auf und Dimensionen von Mathematikdidaktik	119
 Teil II Forschungsvorhaben der Arbeit		
4	Untersuchungsinteresse und Forschungsfragen	127
5	Methodologische Verortung und Untersuchungsdesign	133
 Teil III Studie I – Inhaltsbezogene Beliefs & Identifikation von Typen		
6	Methodische Grundlagen	141
6.1	Datenerhebung	141
6.1.1	Erhebungsinstrument	142
6.1.2	Durchführung der Befragung	145
6.1.3	Beschreibung der Stichprobe	149
6.2	Datenaufbereitung	151
6.3	Datenanalyse	152

6.3.1	Inhaltlich strukturierende qualitative Inhaltsanalyse.	153
6.3.2	Analysen zur Typenbildung	161
6.4	Gütekriterien	169
7	Ergebnisse, Interpretation und Diskussion der studentischen Antworten	177
7.1	Von den Studierenden erwähnte Inhalte der Mathematikdidaktik.	177
7.1.1	Ergebnisse der inhaltlich strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse.	178
7.1.2	Vergleich der studentischen Antworten mit wissenschaftlichen Ausführungen	204
7.1.3	Interpretation und Diskussion der Ergebnisse	217
7.2	Identifikation unterschiedlicher Typen.	221
7.2.1	Ergebnisse der typenbildenden Analyse.	222
7.2.2	Unterschiede sekundärer Merkmale zwischen den Typen.	242
7.2.3	Interpretation und Diskussion der Ergebnisse	250
8	Zusammenfassung und Diskussion von Studie I	257
Teil IV Studie II – Tiefere Einblicke in einzelne studentische Vorstellungen		
9	Methodische Grundlagen	263
9.1	Datenerhebung	263
9.1.1	Beschreibung der Stichprobe	264
9.1.2	Durchführung der Interviews.	267
9.1.3	Interviewleitfaden	269
9.2	Datenaufbereitung	276
9.3	Datenanalyse	277
9.4	Gütekriterien	285
10	Ergebnisse der Interviewanalysen.	289
10.1	Mathematikdidaktik als Brücke zwischen Fachwissenschaft und Schule – Herr Wagner	290
10.1.1	Epistemologische Beliefs.	290
10.1.2	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik.	293

10.1.3	Beliefs zum eigenen Nutzen von Mathematikdidaktik	300
10.1.4	Einstellungen und Emotionen	302
10.2	Mathematikdidaktik als Instrument für abwechslungsreichen Unterricht – Herr Müller.	305
10.2.1	Epistemologische Beliefs.	305
10.2.2	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik.	308
10.2.3	Beliefs zum eigenen Nutzen von Mathematikdidaktik	312
10.2.4	Einstellungen und Emotionen	314
10.3	Mathematikdidaktik als Pool von Möglichkeiten – Frau Fischer	318
10.3.1	Epistemologische Beliefs.	320
10.3.2	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik.	323
10.3.3	Beliefs zum eigenen Nutzen von Mathematikdidaktik	326
10.3.4	Einstellungen und Emotionen	327
10.4	Mathematikdidaktik ist das, was im Kopf der Lehrkraft passiert – Frau Becker	328
10.4.1	Epistemologische Beliefs.	328
10.4.2	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik.	332
10.4.3	Beliefs zum eigenen Nutzen von Mathematikdidaktik	340
10.4.4	Einstellungen und Emotionen	342
11	Interpretation und Diskussion von Studie II	345
11.1	Epistemologische Beliefs zur Mathematikdidaktik	347
11.2	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik	352
11.3	Beliefs zum eigenen Nutzen von Mathematikdidaktik	356
11.4	Einstellungen und Emotionen zur Mathematikdidaktik	358
11.5	Methodische Diskussion	361
 Teil V Zusammenführung der Studien & Ausblick		
12	Schlussbetrachtung	365
	Literatur.	375

Abkürzungsverzeichnis

ANOVA	Analysis of variance
BMBF	Bundesministerium für Bildung und Forschung
CK	Content knowledge
COACTIV	Professionelle Kompetenz von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Unterricht und die mathematische Kompetenz von Schülerinnen und Schülern
DMV	Deutsche Mathematiker-Vereinigung
GDM	Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
GFD	Gesellschaft für Fachdidaktik
KCS	Knowledge of Content and Students
KCT	Knowledge of Content and Teaching
KMK	Ständige Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland
LMT	Learning Mathematics for Teaching
MNU	Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts
MoSAiK	Modulare Schulpraxisbindung als Ausgangspunkt zur individuellen Kompetenzentwicklung
MT21	Mathematics Teaching in the 21st Century
PCK	Pedagogical Content Knowledge
PK	General pedagogical knowledge
TEDS-LT	Teacher Education and Development Study: Learning to Teach
TEDS-M	Teacher Education and Development Study in Mathematics

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1	Veranschaulichung des Concept Images und der Concept Definition	14
Abbildung 2.2	Wirkung von Emotionen auf Lernen und Leistung	22
Abbildung 2.3	Modell zu Vorstellungen von Mathematikdidaktik	27
Abbildung 2.4	Mathematikdidaktik als Lerngegenstand in der didaktischen Pyramide.	29
Abbildung 5.1	Forschungsdesign der ersten Studie	134
Abbildung 5.2	Gesamtes Forschungsdesign der vorliegenden Arbeit.	135
Abbildung 5.3	Überblick über das Forschungsvorhaben	136
Abbildung 7.1	Übersicht des gesamten Kategoriensystems	178
Abbildung 7.2	Subkategorien zur fachlichen Dimension	179
Abbildung 7.3	Codierungen zur Subkategorie 'Curriculare Themen'	180
Abbildung 7.4	Codierungen zur Subkategorie 'Aufbereitung von Fachinhalten'	184
Abbildung 7.5	Subkategorien zur konstruktiven Dimension	188
Abbildung 7.6	Codierungen zur Subkategorie 'Unterrichtsgestaltung'	190
Abbildung 7.7	Subkategorien zur psychologisch-soziologischen Dimension	194
Abbildung 7.8	Codierungen zur Subkategorie 'Diagnostik'	195
Abbildung 7.9	Codierungen zur Subkategorie 'Subjektorientierter Unterricht'	198

Abbildung 7.10	Subkategorien zur Ausgabungsdimension	200
Abbildung 7.11	Codierungen in der Subkategorie 'Professionswissen'	202
Abbildung 7.12	SPSS-Output 'Zuordnungsübersicht' zur Clusteranalyse	223
Abbildung 7.13	Dendrogramm – Fusionierungsablauf und sieben-clustrige Lösung	226
Abbildung 7.14	Typenbezogene Codierhäufigkeiten in der Hauptkategorie 'mathematischer Inhalt'	227
Abbildung 7.15	Typenbezogene Codierhäufigkeiten in der Hauptkategorie 'Unterricht' (Box-Plots)	229
Abbildung 7.16	Typenbezogene Codierhäufigkeit der Hauptkategorie 'Lernende' (Box-Plots)	231
Abbildung 7.17	Typenbezogene Codierhäufigkeit der Hauptkategorie 'Lehrende' (Box-Plots)	232
Abbildung 7.18	Balkendiagramm zu den Codierhäufigkeiten der vier Hauptkategorien in allen Typen	236
Abbildung 7.19	Zustimmung der Typen zur Skala 'Mathematik als Prozess' (Box-Plots)	246
Abbildung 7.20	Zustimmung der Typen zur Skala 'Selbstständiges und verständnisvolles Lernen' (Box-Plots)	248
Abbildung 7.21	Zustimmung der Typen zur Skala 'Vertrauen auf mathematische Selbstständigkeit der Schülerinnen und Schüler' (Box-Plots)	249
Abbildung 10.1	Beispiel zur bildlichen Verortung der Interviewten	290
Abbildung 10.2	Codierungen zu epistemologischen Beliefs von Herrn Wagner	291
Abbildung 10.3	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik – Codierungen bei Herrn Wagner	293
Abbildung 10.4	Zeichnung von Herrn Wagner – Mathematikdidaktik als Brücke	294
Abbildung 10.5	Codierungen zu Einstellungen und Emotionen von Herrn Wagner	304
Abbildung 10.6	Codierungen zu epistemologischen Beliefs von Herrn Müller	308
Abbildung 10.7	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematik- didaktik – Codierungen bei Herrn Müller	312

Abbildung 10.8	Zeichnung von Herrn Müller – Mathematikdidaktik als interaktives Lernen	312
Abbildung 10.9	Codierungen zu Einstellungen und Emotionen von Herrn Müller	318
Abbildung 10.10	Mindmap von Frau Fischer zur Mathematikdidaktik	318
Abbildung 10.11	Codierungen zu epistemologischen Beliefs von Frau Fischer	323
Abbildung 10.12	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik – Codierungen bei Frau Fischer.	324
Abbildung 10.13	Codierungen zu Einstellungen und Emotionen von Frau Fischer	327
Abbildung 10.14	Zeichnung von Frau Becker – Mathematikdidaktik zur Erzeugung von ‘Aha-Effekten’	329
Abbildung 10.15	Codierungen zu epistemologischen Beliefs von Frau Becker	331
Abbildung 10.16	Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik – Codierungen bei Frau Becker	333
Abbildung 10.17	Codierungen zu Einstellungen und Emotionen von Frau Becker	344
Abbildung 11.1	Verortungen der Interviewten hinsichtlich epistemologischer Beliefs.	351
Abbildung 11.2	Verortungen der Interviewten hinsichtlich Beliefs zum Lehren und Lernen von Mathematikdidaktik	353
Abbildung 12.1	Hypothese 1 – Vorstellung von Mathematikdidaktik als fachlich-konstruktive Anleitung	368
Abbildung 12.2	Hypothese 2 – Vorstellung von Mathematikdidaktik als Toolbox	369
Abbildung 12.3	Hypothese 3 – Mathematikdidaktik als Mittel zur Ermöglichung guten Lernens	370
Abbildung 12.4	Hypothese 4 – Mathematikdidaktik als theoretisches Hintergrundwissen.	371

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1	Klassifikationen globaler Beliefs	39
Tabelle 2.2	Modelle epistemologischer Beliefs zur Mathematik	42
Tabelle 2.3	Skalen zur Messung von Beliefs in COACTIV	47
Tabelle 2.4	Statische und dynamische Ausprägungen epistemologischer Beliefs	49
Tabelle 3.1	Pädagogisch-psychologische Paradigmen in der Forschung zu Lehrkräften	75
Tabelle 3.2	Domänen des Professionswissens nach Shulman und Bromme	84
Tabelle 3.3	Dimensionen fachdidaktischen Wissens in Anlehnung an Shulman (1986)	88
Tabelle 3.4	Mathematikdidaktische Wissensfacetten in Large-Scale-Assessments.	89
Tabelle 3.5	Modell des Fertigkeitserwerbs nach Dreyfus und Dreyfus (1986)	105
Tabelle 3.6	Empfehlungen für das Hochschulstudium der Fachdidaktik.	111
Tabelle 3.7	Inhaltliche Dimensionen der Mathematikdidaktik.	122
Tabelle 6.1	Zentrale Themen der ersten fachdidaktischen Vorlesung	147
Tabelle 6.2	Überblick über die Erhebungszeitpunkte.	148
Tabelle 6.3	Verteilung der Geschlechter und angestrebten Lehrämter in der Stichprobe	150
Tabelle 6.4	Deskriptive Statistiken zum Alter und Fachsemester.	150
Tabelle 6.5	Pädagogische Vorerfahrung der Probanden	151

Tabelle 6.6	Kategoriendefinition der Hauptkategorie 'mathematischer Inhalt'	157
Tabelle 6.7	Kategoriendefinition der Hauptkategorie 'Unterricht'	158
Tabelle 6.8	Kategoriendefinition der Hauptkategorie 'Lernende'	159
Tabelle 6.9	Kategoriendefinition der Hauptkategorie 'Lehrende'	160
Tabelle 6.10	Kriterien der internen Studiengüte der ersten Studie	172
Tabelle 7.1	Deskriptive Statistik der Codierungen in den Hauptkategorien	203
Tabelle 7.2	Vergleich mathematikdidaktischer Inhalte zur 'Aufbereitung von Fachinhalten'	207
Tabelle 7.3	Vergleich mathematikdidaktischer Inhalte zur 'Unterrichtsgestaltung'	211
Tabelle 7.4	Vergleich mathematikdidaktischer Inhalte zur 'Diagnostik'	214
Tabelle 7.5	Vergleich mathematikdidaktischer Inhalte zum 'Subjektorientierten Unterricht'	215
Tabelle 7.6	Vergleich mathematikdidaktischer Inhalte zu 'Lehrenden'	216
Tabelle 7.7	Betrachtung der Koeffizienten zur Festlegung einer Anzahl von Clustern	224
Tabelle 7.8	Variationen innerhalb der Typen und Gesamtvariation	234
Tabelle 7.9	Deskriptive Statistiken der Typen (Angaben in Prozent)	235
Tabelle 7.10	Zuordnungen der Textstellen von DMN4ZA (Repräsentantin des Typs 1)	237
Tabelle 7.11	Zuordnungen der Textstellen von ACNS6SL (Repräsentant des Typs 2)	237
Tabelle 7.12	Zuordnung der Textstellen von AMOW7MK (Repräsentantin des Typs 3)	238
Tabelle 7.13	Zuordnung der Textstellen von AHRM5KW (Repräsentantin des Typs 4)	239
Tabelle 7.14	Zuordnung der Textstellen von AALL9MK (Repräsentant des Typs 5)	240
Tabelle 7.15	Zuordnung der Textstellen von AWRK4NR (Repräsentant des Typs 6)	241
Tabelle 7.16	Zuordnung der Textstellen von AHRA5HB (Repräsentantin des Typs 7)	241

Tabelle 7.17	Verteilung des Geschlechts und der angestrebten Schulart auf die Typen	242
Tabelle 7.18	Verteilung der sekundären Merkmale pro Typ.	243
Tabelle 7.19	Deskriptive Statistik zu den Beliefs zur Mathematik.	245
Tabelle 7.20	Verbale, zusammenfassende Beschreibung der Typen	254
Tabelle 9.1	Verteilung der interviewten Studierenden auf die Typen	265
Tabelle 9.2	Übersicht der im Ergebnisbericht dargestellten Interviews	267
Tabelle 9.3	Differenzierung der geführten Interviews	267
Tabelle 9.4	Interviewleitfaden zur Phase der Einführung (1).	271
Tabelle 9.5	Interviewleitfaden zur Phase des allgemeinen Sprechens über Mathematikdidaktik (2)	272
Tabelle 9.6	Interviewleitfaden zur Phase der Annäherung an Eigenschaften der Mathematikdidaktik (3).	274
Tabelle 9.7	Subkategorien zu epistemologischen Beliefs zur Natur des Wissens	279
Tabelle 9.8	Subkategorien zu epistemologischen Beliefs zum Wissenserwerb	281
Tabelle 9.9	Subkategorien zur Erlernbarkeit der Mathematikdidaktik und zur Art des Lernens	283
Tabelle 9.10	Gütekriterien der Datenerfassung in der zweiten Studie	286
Tabelle 9.11	Gütekriterien der Datenanalyse innerhalb der zweiten Studie	287



Einleitung

1

Vorstellungen bestimmen das Lernen, weil man das Neue immer nur durch die Brille des bereits Bekannten 'sehen' kann (Duit, 2004, S. 1 Hervorhebung im Original).

Ein „tiefgreifender Wandel“ (Böhler, Heuchemer, & Szczyrba, 2019, S. 7) ist derzeit an den Hochschulen erkennbar. Innerhalb dieses Wandels geraten hochschuldidaktische Fragestellungen und Forschungen in den Fokus (Böhler et al., 2019, S. 7), um der „Daueraufgabe einer wissenschaftlich fundierten und als wissenschaftliche Praxis betriebenen Hochschullehre“ (Böhler et al., 2019, S. 9) gerecht zu werden. Unter anderem werden zur Erfüllung dieser Aufgabe „Forschungen zu studentischen Perspektiven auf Lernen an der Hochschule“ (Böhler et al., 2019, S. 12) notwendig. Derartige Perspektiven bilden den Forschungsgegenstand dieser Arbeit, wobei speziell Vorstellungen von Studierenden zur Mathematikdidaktik beforscht werden. Im Sinne des Eingangszitates von Duit (2004) kann angenommen werden, dass mathematikdidaktisches Lernen an der Hochschule von diesen studentischen Vorstellungen beeinflusst wird. Die vorliegende Arbeit möchte daher einen Beitrag zur wissenschaftlichen Auseinandersetzung mit studentischen Perspektiven auf die Mathematikdidaktik liefern.

1.1 Motivation – Das Projekt MoSAiK als spezifischer Kontext

Den Ausgangspunkt bildet ein Teilprojekt zur Berufsrollenreflexion und persönlichen Entwicklung von Mathematiklehramtsstudierenden (Siller & Manderfeld, 2016). Dieses ist Teil des im Rahmen der „Qualitätsoffensive Lehrerbildung“ (BMBF, o. J.) geförderten Projektes MoSAiK – Modulare Schulpraxiseinbindung als Ausgangspunkt zur individuellen Kompetenzentwicklung (Kauertz & Siller, 2016). Zielstellung des Teilprojektes ist es, Reflexionsprozesse zur Berufsrolle einer Mathematik Lehrkraft in die Ausbildung der Studierenden an der Universität zu integrieren, um die Studierenden in ihrer professionellen Entwicklung systematisch begleiten und individuell unterstützen zu können (Klock, Lung, Manderfeld, & Siller, 2019). Neben Reflexionsanregungen zu eigenen Werthaltungen, Überzeugungen und Zielen, motivationalen Orientierungen sowie der eigenen Selbstregulation werden Anregungen zur reflexiven Auseinandersetzung mit verschiedenen Teilrollen einer Mathematik Lehrkraft in die mathematische Lehrersausbildung¹ integriert (in Anlehnung an Baumert & Kunter, 2011a, S. 32). Der Reflexionsprozess umfasst dabei drei Phasen: In einem ersten Schritt bearbeiten die Studierenden einen Online-Fragebogen. Dabei sollen ihnen eigene Vorstellungen und Erwartungen bewusst werden. Anschließend wird ihnen ein individuelles Feedback zu ihren Angaben im Fragebogen auf Basis wissenschaftlicher Erkenntnisse ausgehändigt. In einem dritten Schritt erhalten die Studierenden die Möglichkeit, sich mit Lehrkräften und Auszubildenden des Referendariats auszutauschen.

In dem Online-Fragebogen der ersten Phase werden die Studierenden aufgefordert, Fragen unter anderem zur mathematikdidaktischen Rolle einer Mathematik Lehrkraft zu beantworten. Eine erste Frage lautet diesbezüglich: „*Bitte beschreiben Sie, was Sie unter der mathematikdidaktischen Rolle einer Lehrkraft verstehen.*“ In einer Pilotierung bearbeiteten 146 Studierende den Online-Fragebogen. Folgende beispielhaften Antworten wurden auf die Aufforderung zur Beschreibung der mathematikdidaktischen Rolle formuliert:

¹Begrifflich wird in dieser Arbeit in Anlehnung an Faust-Siehl (2000) der Begriff der ‘Lehrersausbildung’ verwendet: „Während Lehrerbildung sich auf alle Phasen bezieht, werden mit Lehrersausbildung die ersten beiden Phasen bezeichnet“ (S. 638 Hervorhebung im Original).

„Mathematikdidaktik ist die Wissenschaft darüber, wie man mathematische Inhalte vermittelt, sodass die Schüler sie begreifen und anwenden können. In der Didaktik geht es um das WIE, nicht um das WAS. Verschiedene Methoden der Veranschaulichung und Erklärung werden hier aktiv.“

„Wenn man das mathematische Wissen hat, weiß wie man auf Kinder zugehen muss und sie erreichen kann, wenn der Unterricht einer klaren Struktur folgt, ist die halbe Miete schon erreicht! Die ganzen theoretischen Ansätze aus der Didaktik funktionieren im Schulalltag sehr selten! Didaktik kommt zu 95% aus dem Herzen und 5% aus dem Kopf.“

„Mathematikdidaktik ist die Kunst mathematisches Fachwissen an Menschen zu vermitteln, die noch nie etwas von Mathematik gehört haben. Wenn man Mathematik (oder auch jedes andere Fach) vermitteln möchte, muss man immer davon ausgehen, dass das Gegenüber noch nie etwas von dem gehört hat, was man ihm versucht zu erklären.“

Diese Antworten sind nicht repräsentativ für die Gesamtheit der studentischen Antworten, sondern spiegeln vielmehr wider, wie unterschiedlich die Studierenden die mathematikdidaktische Rolle beschreiben. Unter Mathematikdidaktik scheinen sich einige Studierende eine methodisch orientierte Wissenschaft, andere eine Herzens- bzw. Persönlichkeitsangelegenheit und wieder andere eine (Vermittlungs-)Kunst vorzustellen. Aus der Betrachtung dieser Unterschiedlichkeit entstand die Motivation, im Rahmen eines Dissertationsvorhabens mehr über Vorstellungen der Studierenden zur Mathematikdidaktik herauszufinden und diese zu beforschen.

1.2 Ziele der Arbeit

In der Literatur wird die Beschäftigung mit Vorstellungen von Lehramtsstudierenden als relevant dargestellt. Patrick und Pintrich (2001, S. 138) beschreiben in Anlehnung an eine Studie von Holt-Reynolds (1992), dass Dozierende angehender Lehrkräfte oft wichtige Konstrukte mit ihren Studierenden diskutieren, ohne sich bewusst zu sein, dass jeder von ihnen das Konstrukt auf eine andere Art sieht und versteht. Sie fordern daher, dass sich Dozierende den Vorstellungen der Studierenden bewusst sind: „Instructors need

to have an accurate awareness of their students' beliefs² (Patrick & Pintrich, 2001, S. 138). Auch sollten Dozierende explizit unterschiedliche Beliefs³ und Haltungen, die den Vorstellungen der Studierenden zugrunde liegen können, thematisieren (Patrick & Pintrich, 2001, S. 140). Bezogen auf schulische Lehr-Lern-Prozesse stellen es Grigutsch und Törner (1994) als Aufgabe der Fachdidaktik dar, Vorstellungen⁴ der Lernenden „zu identifizieren, bewußt zu machen, Charakteristiktypen herauszufiltern und nach Möglichkeiten der Gestaltung zu suchen“ (S. 213). Aus diesen Ausführungen leitet sich die Aufgabe der mathematischen Hochschuldidaktik ab, mathematikdidaktische Vorstellungen der Studierenden entsprechend zu beforschen, um Erkenntnisse solcher Forschungen für hochschulische Lehr-Lern-Prozesse der Mathematikdidaktik nutzen zu können.

Während mentale Konstrukte, wie Vorstellungen oder Beliefs, von angehenden Lehrkräften zur Mathematik und zum Lehren und Lernen von Mathematik bereits vielfach beforscht wurden (u. a. Müller, Felbrich, & Blömeke, 2008; Schmotz, Felbrich, & Kaiser, 2010), gibt es in der deutschen Mathematikdidaktik bisher kaum Forschungen, die sich explizit mit den Vorstellungen angehender Lehrkräfte zur Mathematikdidaktik beschäftigen. An diesem Desiderat setzt die vorliegende Arbeit an. Dabei wird von der Annahme ausgegangen, dass die studentischen Vorstellungen zur Mathematikdidaktik die Lernprozesse innerhalb mathematikdidaktischer Veranstaltungen der hochschulischen Ausbildung beeinflussen können. Ebenso ist ein möglicher Einfluss jener Vorstellungen auf die spätere Lehrtätigkeit der Studierenden, beispielsweise hinsichtlich der Nutzung mathematikdidaktischer Erkenntnisse, anzunehmen.

Aufgrund des Desiderates habe ich ein exploratives Vorgehen gewählt, bei dem die studentischen Vorstellungen auf zwei Ebenen beforscht werden. Auf einer Oberflächenebene geht es um die von den Studierenden mit Mathematikdidaktik verbundenen Inhalte. In diesem Zusammenhang wird auch die Bildung von „Charakteristiktypen“ (Törner & Grigutsch, 1994, S. 213) vollzogen.

²In ihrem Artikel verwenden Patrick und Pintrich (2001) die Begriffe ‘conceptions’ und ‘beliefs’ parallel, ohne sie genauer voneinander zu differenzieren.

³In Ermangelung konsistenter Begrifflichkeiten in der Forschung wird im Folgenden der auch in deutschen Studien verbreitete Begriff ‘Beliefs’ verwendet (vgl. Grundey, 2015; Rolka, 2006; Schwarz, 2013).

⁴Törner und Grigutsch (1994) sprechen hier von „Weltbildern“ (S. 213), die als ähnliche Konstrukte zu Vorstellungen verstanden werden können.

Zusätzlich werden Vorstellungen einzelner Studierenden beforscht, um die identifizierten Typen tiefergehend zu beschreiben (Tiefenebene). „Möglichkeiten der Gestaltung“ (Törner & Grigutsch, 1994, S. 213) der studentischen Vorstellungen werden auf Basis der Erkenntnisse in einem Ausblick formuliert, sind jedoch nicht explizit Inhalt der Arbeit.

1.3 Aufbau der Arbeit

Inhaltlich beginnt die Arbeit mit dem theoretischen Hintergrund (Kapitel 2–3). Hier wird sich in *Kapitel 2* dem Untersuchungsobjekt ‘Vorstellungen’ gewidmet. Dabei findet zunächst eine definitorische Auseinandersetzung statt. Im Fokus steht die Frage, *was* beforscht werden soll. Herangehensweisen an den Vorstellungs-Begriff werden aus verschiedenen mathematikdidaktischen Forschungsrichtungen dargestellt, um zu einer Definition des Vorstellungs-Begriffs zu gelangen, der dieser Arbeit zugrunde liegt. Im Anschluss an die Klärung dessen, was beforscht wird, geht es um das *Warum* der Beforschung von Vorstellungen. Hierzu wird die Rolle von Vorstellungen in konstruktivistisch betrachteten Lehr-Lern-Prozessen dargestellt. Bereits erlangte *Erkenntnisse* zu Vorstellungen von Lehramtsstudierenden werden thematisiert, um zu verdeutlichen, auf welchen Erkenntnissen die Arbeit aufbauen kann. Beliefs werden als zentraler Bestandteil von Vorstellungen besonders fokussiert. Das *Wie* der Beforschung von Beliefs zur Mathematikdidaktik wird mit Blick auf verschiedene Klassifizierungen von Beliefs zur Mathematik hergeleitet.

Ein weiteres Kapitel des theoretischen Hintergrundes (*Kapitel 3*) widmet sich der Frage *Was ist Mathematikdidaktik?* aus theoretischer Perspektive. In ihren Ausführungen beschreiben Kron, Jürgens und Standop (2014) die allgemeine Didaktik mithilfe von „Erfahrungsebenen“ (S. 14) in der Lehrerbildung. Diese werden auf die Erfahrungen der Studierenden zur Mathematikdidaktik übertragen und bilden die Grundstruktur des Kapitelaufbaus. Im Laufe des Studiums kommt es für die Studierenden zu einer „Begegnung mit der [Mathematik–]Didaktik als Wissenschaft“ (Kron et al., 2014, S. 35). Der Perspektive der Mathematikdidaktik als *Wissenschaft* wird sich gewidmet, indem verschiedene Auffassungen, Eigenschaften sowie Forschungsgegenstände und -ziele dargestellt werden.

Mit Blick auf die zweite Phase der Lehrerbildung, das Referendariat, sowie die Tätigkeit als Lehrkraft wird die „didaktische Kompetenz“ (Kron et al., 2014, S. 20) erwähnt. In Bezug auf die spätere Berufsausübung der Studierenden wird Mathematikdidaktik so zu einem *Kompetenzbereich*, der mit bestimmten Anforderungen an eine Mathematiklehrkraft einhergeht. Anhand der Betrachtung

verschiedener Konzeptualisierungen und Operationalisierungen mathematikdidaktischen Wissens und jener Kompetenzen wird diese Perspektive auf Mathematikdidaktik thematisiert.

Studierende erfahren Mathematikdidaktik jedoch nicht nur als Wissenschaft oder zukünftigen Kompetenzbereich, sondern mit Beginn ihres Studiums primär auch als „Studienfach“ (Kron et al., 2014, S. 14) bzw. als *Lerngegenstand*.

Studierenden begegnet das Fach zunächst in Einführungsveranstaltungen, in den ersten Lehrveranstaltungen oder in den vielfältigen Aushängen an Informationstafeln. Die Begegnungen finden ihre institutionelle Konkretisierung in den Modulen, die von den Instituten, Fachbereichen oder Fakultäten für das Bachelor- und Masterstudium „vor Ort“ entwickelt und verbindlich gemacht worden sind. ... Alle Module gründen in einer Reihe von Empfehlungen (Kron et al., 2014, S. 14 Hervorhebungen im Original).

Es wird von den Lehramtsstudierenden des Faches Mathematik im Rahmen ihrer hochschulischen Ausbildung verlangt, mathematikdidaktische Veranstaltungen zu besuchen, Inhalte zu lernen und Prüfungen abzulegen. Die Ausführungen zu dieser Erfahrungsebene der Mathematikdidaktik ergeben sich aus der Darstellung mathematik- bzw. fachdidaktischer Empfehlungen für die hochschulische Lehrerbildung sowie einem modellhaften Entwicklungsverlauf von Studierenden als Novizen hin zu Experten. Ziel des gesamten *Kapitels 3* ist es, ein umfangreiches Verständnis darüber zu erlangen, was unter Mathematikdidaktik aus unterschiedlichen Perspektiven verstanden werden kann, um so im späteren Verlauf die ausgedrückten Vorstellungen der Studierenden entsprechend einordnen und mit den dargestellten Ausführungen vergleichen zu können.

Basierend auf den theoretischen Ausführungen wird im Anschluss das Forschungsvorhaben der Arbeit konkretisiert. In *Kapitel 4* werden das Untersuchungsinteresse der Arbeit und die Forschungsfragen dargestellt. Die vollzogene empirische Beforschung der studentischen Vorstellungen wird in *Kapitel 5* methodologisch verortet und mit dem Studiendesign in Verbindung gebracht. Wie in den Ausführungen zu den Zielen dieser Arbeit dargestellt, wird sich den studentischen Vorstellungen auf zwei Ebenen, einer Oberflächen- und einer Tiefenebene genähert. Beide Herangehensweisen sind in unterschiedlichen Studien umgesetzt worden, die getrennt voneinander berichtet werden. Die *Kapitel 6* bis *8* beschäftigen sich mit den methodischen Grundlagen, Ergebnissen, Interpretationen und Diskussionen der ersten Studie, in der es um die von den Studierenden mit Mathematikdidaktik verbundenen Inhalte und um eine

Typenbildung geht (Oberflächenebene). Die tiefere Auseinandersetzung mit den Vorstellungen einzelner Studierender ist als zweite Studie in den *Kapiteln* 9 bis 11 dargestellt. In einer Schlussbetrachtung werden die Ergebnisse beider Studien zusammengeführt und aus der Arbeit resultierende Hypothesen, praktische Implikationen und Ansatzmöglichkeiten für weitere Forschungen vorgestellt (s. *Kapitel* 12).

Teil I
Theoretischer Hintergrund



Zur Beforschung studentischer Vorstellungen

2

Um sich den Vorstellungen von Studierenden zur Mathematikdidaktik zu nähern, ist es notwendig vorab zu definieren und zu konkretisieren, was unter Vorstellungen zu verstehen ist. Eine solche begriffliche Annäherung und anschließende Konkretisierung des in dieser Arbeit verwendeten Vorstellungsbegriffs findet in Abschnitt 2.1 statt. Nachdem geklärt ist, was unter Vorstellungen verstanden wird, widmet sich Abschnitt 2.2 der Legitimation einer Beforschung von Vorstellungen. Diesbezüglich wird deren Relevanz in Lehr-Lern-Prozessen dargestellt. Bereits erlangte Erkenntnisse zu Vorstellungen von Lehramtsstudierenden werden in Abschnitt 2.3 thematisiert. Als ein zentraler Bestandteil von Vorstellungen widmet sich diese Arbeit insbesondere studentischen Beliefs zur Mathematikdidaktik. Die Fragen, *welche* Beliefs dahingehend *wie* beforcht werden können, stehen im Vordergrund des Abschnitt 2.4.

2.1 Definitiorische Einordnung des Vorstellungsbegriffs

In der Mathematikdidaktik finden Forschungen zu Vorstellungen bzw. ähnlichen Konstrukten unter anderem in der Begriffs-Forschung (Abschnitt 2.1.1) statt. Hier wird sich mit Prozessen der „Begriffsbildung in der Mathematik und im Mathematikunterricht“ (Weigand, 2015, S. 255) beschäftigt. Darüber hinaus werden auch in der Affekt-Forschung mentale Konstrukte beforcht (Abschnitt 2.1.2), die zunächst als ähnlich zu Vorstellungen angesehen werden können. Konzepte, Modelle und Definitionen aus beiden Forschungsrichtungen werden im Folgenden betrachtet sowie mit Blick auf Ähnlichkeiten und

Differenzen aufeinander bezogen, um zu einer für den weiteren Verlauf der Arbeit gültigen Definition des Vorstellungsbegriffs zu gelangen (Abschnitt 2.1.3).

2.1.1 Vorstellungen in der mathematikdidaktischen Begriffsforschung

In der Beforschung von Verständnissen der Lernenden zu mathematischen Begriffen hat sich das Konstrukt des ‘Concept Images’ etabliert. Grundlegend für die Ausführungen zu diesem Konstrukt ist die Unterscheidung zwischen formal definierten mathematischen Begriffen und den kognitiven Prozessen, in welchen diese Begriffe von einer Person erfasst werden. Während jener kognitiven Prozesse finden verschiedene assoziierte Prozesse statt, die bewusst und unbewusst die Bedeutung und Nutzung des mathematischen Begriffs betreffen (Tall & Vinner, 1981, S. 151 f.). Die prozesshafte Betrachtung der Begriffsbildung ist Ausgangslage für die Beschäftigung mit dem ‘Concept Image’:

We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is build up over years through experience of all kinds, changing as the individual meets stimuli and matures (Tall & Vinner, 1981, S. 152 Hervorhebungen im Original).

Als kognitive Struktur beinhaltet das ‘Concept Image’ mentale Bilder, assoziierte Eigenschaften und Prozesse, die über vielfältige Erfahrungen von einer Person zu einem mathematischen Begriff aufgebaut werden. In den Ausführungen Talls und Vinners (1981) wird ein solches ‘Concept Image’ mit einer ‘Concept Definition’ in Beziehung gesetzt. Diese ‘Concept Definition’ gilt als „form of words used to specify that concept“ (Tall & Vinner, 1981, S. 152). Hinsichtlich der Beschaffenheit des ‘Concept Images’ und der Relation von ‘Concept Image’ und ‘Concept Definition’ gibt es unterschiedliche Ansätze¹.

Für Tall und Mejia-Ramos (2010) stellt das ‘Concept Image’ ein modulares Gebilde dar, welches sich aus sogenannten ‘Met-befores’ zusammensetzt:

¹Eine genauere Darstellung der unterschiedlichen Positionen findet sich bei Remobwski (2015).