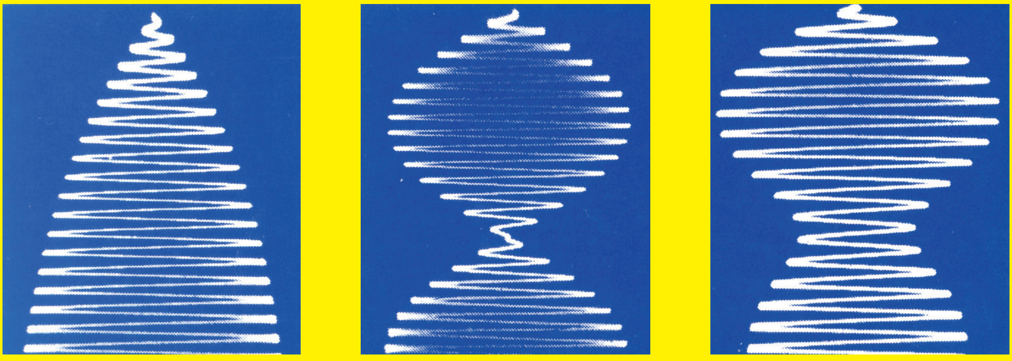
VIBRACIONES Y ONDAS

A. P. FRENCH

Una publicación del MIT
(*Massachusetts Institute of Tecnology*)



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

A. P. French

PROFESOR DE FÍSICA DEL MASSACHUSETTS OF TECHNOLOGY

VIBRACIONES Y ONDAS

CURSO DE FÍSICA DEL M. I. T.

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
Vibrations and waves

Edición original en lengua inglesa publicada por
W. W. Norton & Company, Inc., New York

Versión española por
Dr. José Aguilar Peris
Catedrático de Termología de la Universidad de Madrid
y
Dr. Juan de la Rubia Pacheco
Catedrático de Mecánica Estadística de la Universidad de Sevilla

Edición en papel:
© Editorial Reverté, S. A., 1974
ISBN: 978-84-291-4098-9

Edición e-book (PDF):
© Editorial Reverté, S. A., 2012
ISBN: 978-84-291-9061-8

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
08029 Barcelona. ESPAÑA
Tel: (34) 93 419 33 36
e-mail: reverte@reverte.com
www.reverte.com

512

Prólogo

El Education Research Center (inicialmente denominado Science Teaching Center) en el Massachusetts Institute of Technology tiene por misión mejorar los programas de estudio, el proceso de instrucción y el propio proceso de aprendizaje, fundamentalmente relacionado con los alumnos de los Colleges y Universidades. El Centro fue establecido por el M.I.T. en 1960, siendo su Director el fallecido Profesor Francis L. Friedman. Desde 1961 el Centro ha sido sufragado fundamentalmente por la National Science Foundation; también ha recibido generosas ayudas de la Kettering Foundation, la Shell Companies Foundation, la Victoria Foundation, la W. T. Grant Foundation y la Bing Foundation.

La Serie de Iniciación a la Física del M.I.T., *consecuencia directa del trabajo del Centro, estará constituida por una serie de textos breves que, considerados en conjunto, abarquen las áreas principales de la física básica. La serie pretende resaltar la interacción entre la parte experimental y la intuición al engendrarse teorías físicas. Los libros de la misma tienen por objeto proporcionar distintas bases posibles para cursos de introducción, desde aquellos que destacan especialmente la física atómica hasta aquellos que incluyen una cantidad considerable de física atómica y cuántica. Se ha procurado que los diversos volúmenes sean compatibles, tanto en nivel como en estilo de exposición, pero no se han concebido como una enciclopedia homogénea; por el contrario, se han proyectado de modo que tengan un suficiente contenido propio y que puedan utilizarse como componentes individuales en muchos planes de estudio.*

El presente volumen pretende ser una introducción al estudio de las vibraciones y ondas en general, pero su estudio se refiere casi exclusivamente a los sistemas mecánicos. Así pues, excepto en algunos puntos, necesita como preparación adecuada un buen conocimiento práctico de la cinemática y dinámica elemental. La decisión de limitar el objetivo del libro de este modo se basa en un *deseo de que su contenido sea cuantitativo y analítico en lugar de descriptivo. Ha sido, en todo momento, muy grande la tentación de incorporar ciertas discusiones sobre sistemas eléctricos y ópticos, pero se consideró que gran parte del lenguaje utilizado sobre el tema podía desarrollarse de modo más sencillo y directo en función de desplazamientos mecánicos y ecuaciones de ondas escalares, con sólo alguna mención ocasional a otros sistemas.*

En cuanto a las bases matemáticas precisas, se supone un conocimiento aceptable del cálculo diferencial e integral, de modo que el alumno pueda reconocer en la formulación de la ley de Newton aplicada a un oscilador armónico una ecuación diferencial, pudiendo comprobar con facilidad sus soluciones expresadas en forma de funciones sinusoidales. En el primer capítulo se expone la exponencial compleja para el análisis de sistemas oscilantes; la introducción necesaria de ecuaciones diferenciales parciales se aplaza, sin embargo, hasta bastante más tarde. Desde luego, es conveniente cierta experiencia previa de cálculo y conocimiento de las ecuaciones diferenciales, aunque no sea esencial desde el punto de vista del autor.

La presentación se apoya en el concepto de modos normales con más intensidad de lo que es costumbre en otros cursos de introducción. El autor considera, como se indica en el texto, que de este modo el alumno comprenderá mejor cómo puede relacionarse la dinámica de medios continuos con la dinámica de una o más partículas. Lo que no se dice, pero se ha tenido muy en cuenta, es que el desarrollo y empleo de las características relativas a un conjunto de modos normales ortogonales y completos dará al alumno un sentido de familiaridad renovado cuando se encuentre de nuevo con estas características en el contexto de la mecánica cuántica.

Aunque se ha puesto mayor relieve en el método analítico, también se ha hecho un gran esfuerzo para relacionar la teoría con ejemplos reales de los fenómenos, ilustrados cuando ha sido posible con datos y fotografías originales. Se pretende que esta «documentación» aneja al tema sea una característica común a todos los libros de la serie.

Este texto, como los demás de la serie, tiene una gran deuda con las ideas, críticas y sugerencias de mucha gente, tanto alumnos como profesores. Un agradecimiento especial se debe al Prof. Jack R. Tessman (Tufts University), quien estuvo muy relacionado con los trabajos iniciales de este programa y que ensayó, junto con el autor, una primera versión de parte de este texto en el M.I.T. durante el curso 1963-64. Gran parte de lo escrito y vuelto a escribir se discutió detalladamente con él. En particular, en el presente volumen, la introducción en el Capítulo 5 a los osciladores acoplados y modos normales descansa fundamentalmente en el método que el Prof. Tessman utilizaba en clase.

Debemos dar gracias a la directiva del Education Research Center por su ayuda en la preparación de este volumen, con mención especial de la señorita Martha Ransohoff por su entusiasmo al escribir a máquina el manuscrito final

y a Jon Rosenfeld por su trabajo en montar y fotografiar buen número de demostraciones para las figuras.

A. P. French

Cambridge, Massachusetts

Índice analítico

Vibraciones y ondas

Éstos son los fenómenos de los muelles y cuerpos elásticos, los cuales, hasta ahora, que yo sepa, nadie ha reducido a reglas, de modo que todos los intentos para explicar la razón de su fuerza y elasticidad en general, han sido totalmente insuficientes.

ROBERT HOOKE, *De Potentia Restitutiva* (1678)

1

Movimientos periódicos

LAS VIBRACIONES u oscilaciones de los sistemas mecánicos constituyen uno de los campos de estudio más importantes de toda la física. Virtualmente todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes. En general, las vibraciones naturales predominantes de objetos pequeños suelen ser rápidas, mientras que las de objetos más grandes suelen ser lentas. Las alas de un mosquito, por ejemplo, vibran centenares de veces por segundo y producen una nota audible. La Tierra completa, después de haber sido sacudida por un terremoto, puede continuar vibrando a un ritmo de una oscilación por hora aproximadamente. El mismo cuerpo humano es un fabuloso recipiente de fenómenos vibratorios; como se ha escrito: [1]

> Después de todo, nuestros corazones laten, nuestros pulmones oscilan, tiritamos cuando tenemos frío, a veces roncamos, podemos oír y hablar gracias a que vibran nuestros tímpanos y laringes. Las ondas luminosas que nos permiten ver son ocasionadas por vibraciones. Nos movemos porque hacemos oscilar las piernas. Ni siquiera podremos decir correctamente "vibración" sin que oscile la punta de nuestra lengua... Incluso los átomos que componen nuestro cuerpo vibran.

La característica común de todos estos fenómenos es su *periodicidad.* Existe un esquema de movimiento o desplazamiento que se repite una y otra

[1] Según R. E. D. Bishop, en *Vibration,* Cambridge University Press, N. Y. 1965. Una descripción general viva y fascinante de las vibraciones con referencia especial a los problemas técnicos.

vez. Este esquema puede ser sencillo o complicado. La figura 1-1 muestra un ejemplo de los dos casos —el ciclo más bien complicado de variaciones de presión dentro del corazón de un gato y la curva sinusoida casi pura de las vibraciones de un diapasón. En ambos casos el eje horizontal representa el avance continuo del tiempo y puede identificarse la duración del tiempo, el período T, dentro del cual se realiza un ciclo completo de vibración.

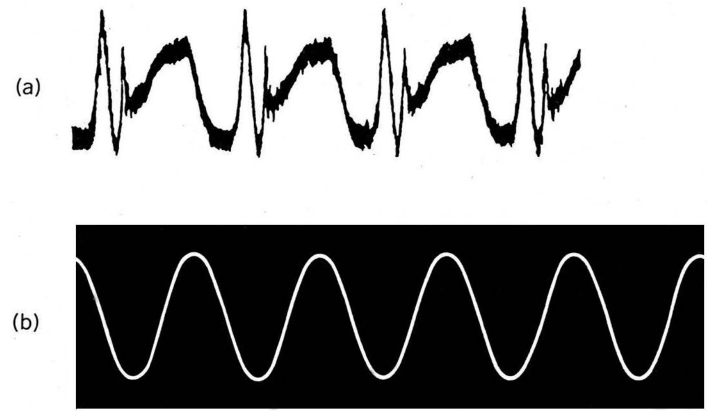


Fig. 1-1. *(a) Variaciones de presión dentro del corazón de un gato. (Según Straub en el libro de E. H. Starling,* Elements of Human Physiology, *Churchill, London, 1907.) (b) Vibraciones de un diapasón.*

En este libro estudiaremos cierto número de aspectos de los movimientos periódicos, y con estas bases discutiremos los fenómenos de ondas progresivas que están estrechamente ligadas. Empezaremos con una breve descripción puramente cinemática de las vibraciones. Después pasaremos a analizar algunas de las propiedades dinámicas de los sistemas en vibración, aquellas características dinámicas que nos permiten considerar el movimiento vibratorio como un problema físico real y no sólo como un ejercicio matemático.

VIBRACIONES SINUSOIDALES

Concentraremos preferentemente nuestra atención sobre las vibraciones sinusoidales del tipo indicado en la figura 1-1 (b). Para ello podemos dar dos razones —una física y otra matemática, ambas básicas para nuestro objetivo.

La razón física consiste en que realmente se presentan vibraciones puramente sinusoidales en una gran variedad de sistemas mecánicos, siendo originadas por fuerzas restauradoras que son proporcionales a los desplazamientos respecto al equilibrio. Este tipo de movimiento es posible casi siempre si el desplazamiento es suficientemente pequeño. Si, por ejemplo, tenemos un cuerpo sujeto a un muelle, la fuerza ejercida sobre el mismo cuando el desplazamiento respecto al equilibrio es x puede describirse en la forma

$$F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \cdots)$$

donde k_1, k_2, k_3, etc., son una serie de constantes, y siempre podremos encontrar un margen de valores de x dentro del cual sea despreciable la suma de términos correspondientes a x^2, x^3, etc., de acuerdo con cierto criterio previo (por ejemplo, hasta 1 parte en 10^3 o 1 parte en 10^6) en comparación con el término $-k_1x$, a no ser que el mismo k_1 sea nulo. Si el cuerpo tiene masa m y la masa del muelle es despreciable, la ecuación del movimiento del cuerpo se reduce entonces a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x$$

que, como puede comprobarse fácilmente, queda satisfecha por una ecuación de la forma

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) \tag{1-1}$$

en donde $\omega = (k_1/m)^{1/2}$. Esta breve discusión nos servirá para recordar que la vibración sinusoidal —movimiento armónico simple— es una posibilidad muy a tener en cuenta en las vibraciones pequeñas, pero también para que no olvidemos que es sólo una aproximación (aunque quizá muy buena) del movimiento real.

La segunda razón —matemática— de la profunda importancia de las vibraciones sinusoidales puras se debe a un famoso teorema propuesto por el matemático francés J. B. Fourier en 1807. De acuerdo con el teorema de Fourier, *cualquier* perturbación que se repita regularmente con un período T puede formarse mediante (o es analizable en) un conjunto de vibraciones sinusoidales de períodos T, $T/2$, $T/3$, etc., con amplitudes seleccionadas de modo adecuado, es decir mediante una serie formada por (para utilizar una terminología musical) una frecuencia fundamental, y todos sus armónicos. Insistiremos en este punto más adelante, pero llamamos ahora la atención sobre este teorema para que quede claro que no limitamos el objetivo o posibilidad de aplicación de nuestro estudio al concentrarnos en el movimiento armónico simple. Por el contrario, una total familiaridad con las vibraciones sinusoidales nos abrirá la puerta a todos los problemas imaginables en que intervengan fenómenos periódicos.

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Un movimiento del tipo descrito en la ecuación (1-1), movimiento armónico simple (MAS),[1] se representa en un gráfico $x - t$ de la forma indicada en la figura 1-2. Destaquemos las características más importantes de esta perturbación sinusoidal:

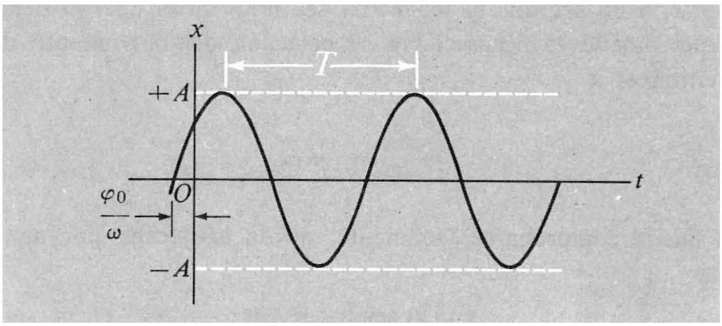


Fig. 1-2. *Movimiento armónico simple de período T y amplitud A.*

1. Está confinada dentro de los límites $x = \pm A$. La magnitud positiva A se denomina *amplitud* del movimiento.

2. El movimiento tiene un período T igual al tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos o más generalmente entre dos momentos sucesivos en que se repitan tanto el desplazamiento x como la velocidad dx/dt. Dada la ecuación básica (1-1),

$$x = A \operatorname{sen} (\omega t + \varphi_0)$$

[1] Emplearemos con frecuencia esta abreviatura.

el período debe corresponder a un aumento de 2π en el argumento de la función sinusoidal. Así pues, se tiene

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = (\omega t + \varphi_0) + 2\pi$$

de aquí que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1-2}$$

La situación en $t = 0$ (o en cualquier otro instante señalado) queda completamente especificada si se establecen los valores de x y dx/dt en dicho momento. En el instante particular $t = 0$, llamaremos a estas magnitudes x_0 y v_0, respectivamente. Entonces se tienen las identidades siguientes:

$$x_0 = A \text{ sen } \varphi_0$$

$$v_0 = \omega A \cos \varphi_0$$

Si se sabe que el movimiento viene descrito por una ecuación de la forma (1-1), pueden utilizarse estas dos relaciones para calcular la amplitud A y el ángulo φ_0 (ángulo de fase inicial del movimiento):

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \right]^{1/2} \qquad \varphi_0 = \text{arctg}^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

El valor de la frecuencia angular ω del movimiento se supone conocido por otros medios.

La ecuación (1-1) tal y como se ha escrito define una variación sinusoidal de x con t para todos los valores de t, considerada como una variable puramente matemática, o sea de $-\infty$ a $+\infty$. Como todas las vibraciones reales tienen un principio y un final, no puede ser descrita solo por la ecuación (1-1) aunque sea sinusoidal pura mientras dure. Si, por ejemplo, se iniciase un movimiento armónico simple en $t = t_1$ y se parase en $t = t_2$, su descripción completa en términos matemáticos exigiría un total de tres ecuaciones:

$$-\infty < t < t_1 \qquad x = 0$$

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \qquad x = A \text{ sen } (\omega t + \varphi_0)$$

$$t_2 < t < \infty \qquad x = 0$$

Esta limitación de la validez de la ecuación (1-1) como descripción completa de una vibración armónica simple real deberá recordarse siempre. No es una sutileza matemática. A juicio de un criterio *físico* estricto, una vibración no resulta ser efectivamente sinusoidal pura, a no ser que continúe un gran número de períodos. Por ejemplo, si el oído pudiese recibir un ciclo completo del sonido producido por un diapasón, vibrando como en la figura 1-1 (b), la impresión aural no sería en absoluto la de un tono puro con la frecuencia característica del diapasón, sino más bien una discordancia de tonos.[1] Sería prematuro, y en cierto modo sin interés, estudiar el fenómeno con más detalle en este punto; el problema afecta de nuevo al análisis de Fourier. Lo que importa en este momento es darse cuenta de que las vibraciones armónicas simples de un sistema físico real deben continuar durante largo tiempo, deben representar lo que suele denominarse un estado estacionario de vibración, para que la ecuación (1-1) pueda utilizarse por sí misma como una descripción adecuada de las mismas.

REPRESENTACIÓN MEDIANTE UN VECTOR ROTATORIO

Uno de los procedimientos más útiles para describir el movimiento armónico simple se obtiene considerándolo como la proyección de un movimiento circular uniforme. Imaginemos, por ejemplo, que se hace girar un disco de radio A alrededor de un eje vertical con una velocidad de ω rad/seg. Supóngase que se sujeta un taquito al borde del disco y que un haz horizontal de luz paralela proyecta la sombra del taco sobre una pantalla vertical, como se indica en la figura 1-3 (a). Entonces esta sombra realiza un movimiento armónico simple con período $2\pi/\omega$ y amplitud A a lo largo de una recta horizontal en la pantalla.

De modo más abstracto, podemos imaginar el MAS como la proyección geométrica de un movimiento circular uniforme. (Por proyección *geométrica* entendemos simplemente el proceso de trazar una perpendicular a una recta dada desde la posición instantánea del punto P.) En la figura 1-3 (b) se indica cómo puede proyectarse el extremo del vector rotatorio OP sobre un diámetro de la circunferencia. En particular escogemos el eje horizontal Ox como recta base sobre la cual tiene lugar la oscilación real. La posición instantánea del punto P se define entonces mediante la longitud constante A y el

[1] La complejidad del sonido puede probarse de modo más convincente utilizando un analizador automático de ondas, pues se sabe que lo que oímos no es una réplica exacta de la onda sonora incidente —el oído produce distorsiones. Véase, por ejemplo, M. A. Van Bergeijk, J. R. Pierce y E. A. David, *Waves and the Ear,* Doubleday (Anchor Book), Nueva York, 1960.

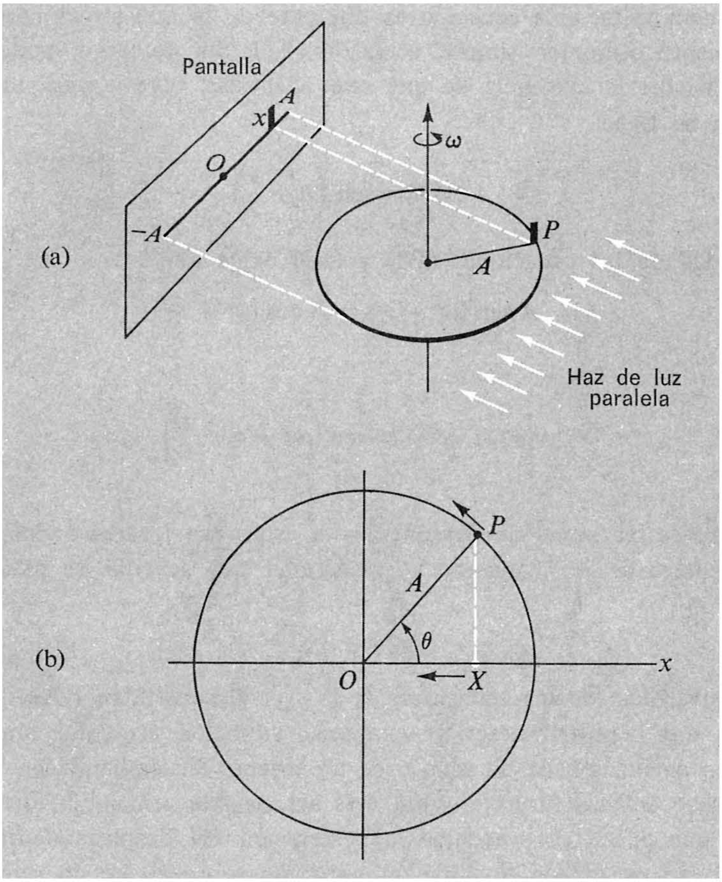


Fig. 1-3. *Movimiento armónico simple como proyección en su propio plano de un movimiento circular uniforme.*

ángulo variable θ. Coincidirá con el convenio normal de las coordenadas polares si escogemos el sentido contrario a las agujas del reloj como positivo; el valor real de θ puede escribirse entonces

$$\theta = \omega t + \alpha$$

en donde α es el valor de θ para $t = 0$.

Como se especificó anteriormente, el desplazamiento x del movimiento real viene dado por

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \alpha) \tag{1–3}$$

A primera vista, esta ecuación es diferente de la que sirvió para describir el movimiento armónico simple, ecuación (1-1). Sin embargo, podemos fácilmente satisfacer la exigencia de que sean idénticas, porque para un ángulo θ cualquiera se tiene

$$\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

La identidad de las ecuaciones (1-1) y (1-3) exige que

$$A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = A \cos(\omega t + \alpha)$$

es decir,

$$\operatorname{sen}(\omega t + \varphi_0) = \operatorname{sen}\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Son iguales los senos de dos ángulos si éstos son iguales o difieren en un múltiplo entero de 2π. Tomando la posibilidad más sencilla, se puede escribir

$$\varphi_0 = \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{1–4}$$

La equivalencia de las ecuaciones (1-1) y (1-3) sometidas a las condiciones anteriores nos permiten describir cualquier vibración armónica simple igualmente bien en función de un seno o de un coseno. Sin embargo, en buena parte de nuestro análisis futuro, resulta más aconsejable utilizar la forma coseno, de modo que pueda aprovecharse la descripción del desplazamiento como la proyección de un vector en rotación uniforme sobre el eje de referencia del plano polar de coordenadas. El empleo de este método en toda su riqueza reposa en algunas ideas matemáticas que consideraremos en las secciones siguientes.

VECTORES ROTATORIOS Y NÚMEROS COMPLEJOS

El empleo de un movimiento circular uniforme como fundamento puramente geométrico para describir el MAS tiene más importancia de lo que parece. Este movimiento circular, una vez establecido, define el MAS de amplitud A y frecuencia angular ω sobre cualquier recta contenida en el plano del círculo. En particular, si imaginamos un eje y perpendicular al eje físico real Ox del movimiento real, el vector rotatorio OP nos define, además de la verdadera oscilación sobre el eje x, otra oscilación ortogonal sobre el eje y, de modo que

$$\begin{aligned} x &= A \cos (\omega t + \alpha) \\ y &= A \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{1-5}$$

y aunque este movimiento sobre el eje y no tenga existencia real, podemos proceder *como si* nos ocupásemos del movimiento de un punto en dos dimensiones, según describen las ecuaciones (1-5), con tal que al final aislemos sólo el componente x, ya que únicamente este resultado es el que posee significado físico en el movimiento así descrito.

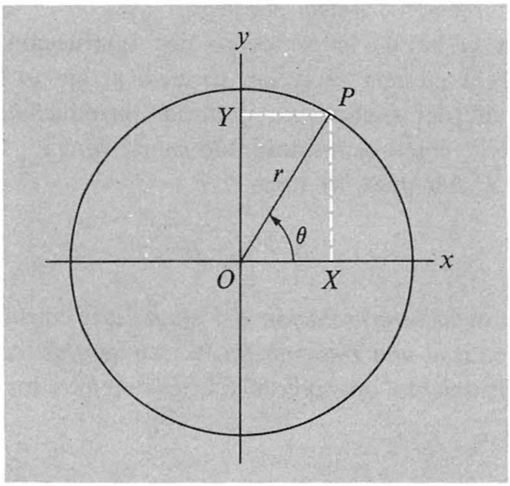


Fig. 1-4. *Representaciones cartesianas y polares de un vector rotatorio.*

Existe un modo carente de ambigüedad para establecer y mantener la diferencia existente entre las componentes físicamente reales y no reales del movimiento. Supóngase que un vector OP (fig. 1-4) tiene las coordenadas polares (r, θ). Las componentes (x, y) rectangulares (cartesianas) vienen dadas, como es natural, por las ecuaciones:

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta .$$

El vector completo **r** puede expresarse entonces como el vector suma de estos dos componentes ortogonales. Si preferimos emplear la notación acostumbrada del análisis vectorial, utilicemos el vector unitario **i** para designar los desplazamientos a lo largo de x, y el vector unitario $\mathbf{j}$ para designar los desplazamientos a lo largo del eje y. Pondremos entonces

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$$

Pero sin sacrificar ninguna información, se puede definir el vector mediante la ecuación siguiente:

$$\mathbf{r} = x + jy \tag{1-6}$$

Todo lo que se requiere es un convenio inicial, mediante el cual se admita que la ecuación (1-6) encierra las siguientes consecuencias:

1. Un desplazamiento, como x, sin ningún factor que lo califique, ha de realizarse en una dirección paralela al eje x.

2. El término jy ha de leerse como una instrucción para hacer que el desplazamiento y sea en una dirección paralela al eje y. De hecho, suele ser costumbre prescindir del simbolismo vectorial introduciendo una magnitud z, que ha de entenderse como el resultado de sumar jy o x , es decir, es idéntica a la definición de $\mathbf{r}$. Así pues, se tiene

$$z = x + jy \tag{1-7}$$

Ampliemos ahora la interpretación del símbolo j, considerándolo como una instrucción para realizar una rotación de 90° en sentido contrario a las agujas del reloj al desplazamiento que precede. Consideremos los siguientes ejemplos específicos:

a. Para obtener la magnitud jb, se marca una distancia b sobre el eje x y luego se hace girar 90° de modo que termine hacia arriba equivaliendo a un desplazamiento b a lo largo del eje y.

b. Para formar la magnitud j^2b primero se obtiene jb, como anteriormente, y luego se le aplica otra rotación de 90° , es decir, identificamos j^2b como $j(jb)$. Pero esto nos lleva a su vez a una identidad importante. Dos rotaciones sucesivas de 90° en el mismo sentido convierten al desplazamiento b (en el sentido positivo de x) en el desplazamiento $-b$. De aquí que podamos escribir la identidad algebraica

$$j^2 = -1 \tag{1-8}$$

La magnitud j puede considerarse así, hablando algebraicamente, como la raíz cuadrada de -1. (Y $-j$ es otra raíz cuadrada que también satisface la ecuación anterior.)[1]

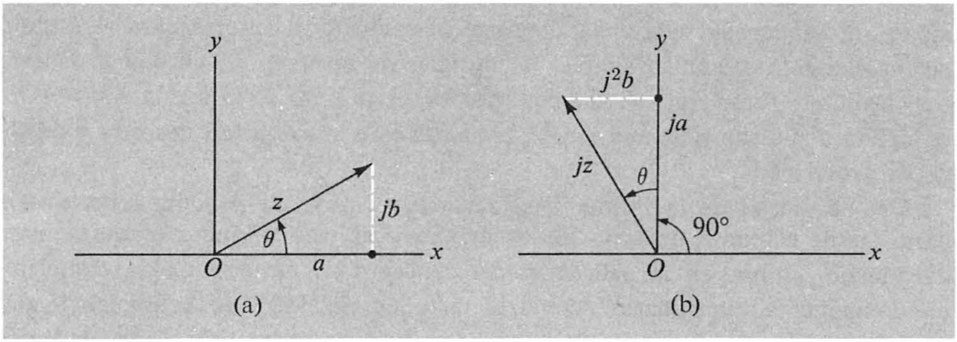


Fig. 1-5. *(a) Representación de un vector en el plano complejo. (b) La multiplicación de z por j equivale a una rotación de 90°.*

c. Supóngase que tomamos un vector z que tiene una componente x de longitud a y otra componente y de longitud b (fig. 1-5). ¿Qué es jz? Se tiene

$$\begin{aligned} z &= a + jb \\ jz &= ja + j^2b \\ &= ja + (-b) \end{aligned}$$

La suma de los dos nuevos vectores componentes del segundo miembro de esta ecuación se indica en la figura 1-5 (b). ¡La receta es consistente! El vector resultante jz se obtiene a partir del vector original z aplicándole una rotación de 90°.

Aunque el lector no haya estudiado previamente estos conceptos, se dará cuenta fácilmente de que estamos moviéndonos en la línea divisoria (o más adecuadamente sobre un puente) entre la geometría y el álgebra. Si las magnitudes a y b son números reales, como hemos supuesto en el ejemplo c, entonces la combinación $z = a + jb$ es lo que se conoce como *número complejo.*

[1] El empleo del símbolo j por $\sqrt{-1}$ ha surgido espontáneamente debido a nuestro enfoque cuasigeométrico. Sin embargo, se halla frecuentemente en textos de matemáticas el símbolo i. Los físicos e ingenieros tienden a preferir la notación j, y reservan el símbolo i para la corriente eléctrica, consideración importante, ya que las técnicas matemáticas desarrolladas aquí tienen una de sus aplicaciones más importantes en conexión con los problemas de circuitos eléctricos.

Pero en términos geométricos puede considerarse como un desplazamiento sobre cierto eje que forma un ángulo θ con el eje x, de modo que $\operatorname{tg}\theta = b/a$, como se ve claramente en la figura 1-5 (a).

En esta representación de un vector por un número complejo, tenemos un modo automático de seleccionar la parte físicamente de interés para el estudio del movimiento armónico simple. Si, después de resolver un problema de este tipo mediante complejos, obtenemos una respuesta final de la forma $z = a + jb$, en donde a y b son números reales, entonces es a la magnitud deseada y puede desecharse la b.

Una magnitud de la forma jb sólo (siendo b real) se denomina imaginaria pura. Desde el punto de vista de las matemáticas, este término es quizá poco afortunado, porque en la aplicación del concepto de número real a complejo, un componente "imaginario" como jb está en igualdad de condiciones que un componente real como a. Pero cuando se aplica al análisis de oscilaciones monodimensionales, esta terminología se ajusta perfectamente, como ya hemos visto, a las partes físicamente reales y no reales de un movimiento bidimensional imaginado.

INTRODUCCIÓN AL EXPONENTE COMPLEJO

El estudio anterior puede parecer que no ha añadido gran cosa al análisis inicial. Pero ya estamos preparados para nuestro objetivo fundamental, que es la obtención de una función matemática hacia la que hemos dirigido este desarrollo. Dicha función es la exponencial compleja, o para ser más concretos, la función exponencial en el caso en que el exponente es el sentido matemático mencionado al final de la última sección. La introducción de dicha función recompensa ampliamente nuestros esfuerzos por la facilidad que supone en el manejo de los problemas de oscilaciones. No todos los beneficios de este método se verán inmediatamente, sino que serán cada vez más evidentes cuando profundicemos en el tema.

Empecemos considerando los desarrollos en serie de las funciones seno y coseno:

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \cdots \tag{1-9}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \cdots \tag{1-10}$$

Si no son familiares estos desarrollos, pueden obtenerse fácilmente en ayuda del teorema de Taylor.[1]

Formemos la siguiente combinación:

$$\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots \tag{1-11}$$

Hemos visto que -1 puede expresarse como j^2, de modo que la ecuación anterior puede volverse a escribir del modo siguiente:

$$\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta = 1 + j\theta + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(j\theta)^n}{n!} + \cdots \tag{1-12}$$

Sin embargo, el segundo miembro de esta ecuación tiene precisamente la forma del desarrollo de la función exponencial, haciendo el exponente igual a $j\theta$. Así pues, se puede escribir la identidad siguiente:

$$\cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta = e^{j\theta} \tag{1-13}$$

Este resultado es muy importante, hablando matemáticamente, porque proporciona una conexión clara entre la geometría plana (representada por las funciones trigonométricas) y el álgebra (representada por la función exponencial).

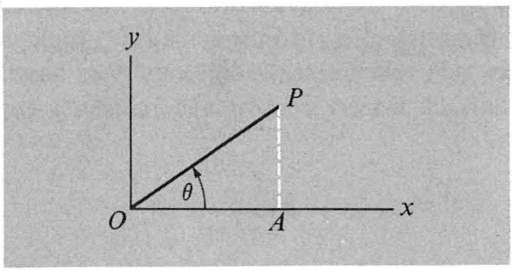


Fig. 1-6. *Interpretación geométrica de la relación de Euler,* $e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\mathrm{sen}\,\theta$.

[1] Según el teorema de Taylor, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$
Por tanto,

$$\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,0 + \theta\cos 0 + \frac{\theta^2}{2!}(-\mathrm{sen}\,0) + \frac{\theta^3}{3!}(\cos 0)\cdots$$

$$\cos\theta = \cos 0 + \theta(-\mathrm{sen}\,0) + \frac{\theta^2}{2!}(-\cos 0) + \frac{\theta^3}{3!}(\mathrm{sen}\,0)\cdots$$

R. P. Feynman la consideraba "como joya asombrosa ... la fórmula matemática más notable".[1] Fue establecida por Leonhard Euler en 1748.

Expongamos el carácter geométrico del resultado. Utilizando los ejes "real" e "imaginario" Ox y Oy (fig. 1-6), dibujemos OA de longitud igual a $\cos\theta$ y AP de longitud igual a sen θ. El vector suma de ambos es OP; tiene evidentemente *longitud unidad* y forma el ángulo θ con el eje x. Con mayor generalidad, la multiplicación de cualquier número complejo z por $e^{i\theta}$ puede describirse, en términos geométricos, como una rotación positiva de valor θ del vector representado por z, sin ninguna alteración en su longitud. *(Ejercicio:* Comprobarlo.)

EMPLEO DEL EXPONENTE COMPLEJO

¿Por qué constituye una contribución tan importante al análisis de las vibraciones la introducción de la ecuación (1-13)? La principal razón consiste en la propiedad especial de la función exponencial de volver a aparecer después de cada operación de derivación o integración, ya que los problemas en que estamos interesados son aquellos en los que intervienen desplazamientos periódicos y las derivadas respecto al tiempo de los mismos. Si, como suele ocurrir, la ecuación básica del movimiento contiene términos proporcionales a la velocidad y a la aceleración, lo mismo que al propio desplazamiento, entonces el empleo de cada función trigonométrica para describir el movimiento conduce a una complicada mezcla de términos en seno y coseno. Por ejemplo:

Si

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

entonces

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha)$$

[1] R. P. Feynman, R. B. Leighton y M. L. Sands, *Feynman Lectures on Physics,* Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.

Por otra parte, si trabajamos con la combinación $x + jy$, viniendo dados x e y por las ecuaciones (1-5), se tiene:

$$z = A\cos(\omega t + \alpha) + jA\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \alpha)$$

es decir,

$$z = Ae^{j(\omega t+\alpha)}$$

con

$$x = \text{parte real de } z\text{[1]}$$

Entonces

$$\frac{dz}{dt} = j\omega Ae^{j(\omega t+\alpha)} = j\omega z$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (j\omega)^2 Ae^{j(\omega t+\alpha)} = -\omega^2 z$$

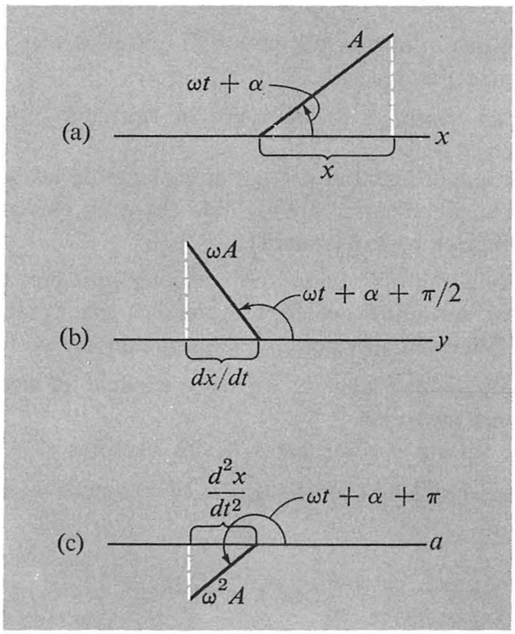


Fig. 1-7. *(a) Vector desplazamiento z y su proyección real x. (b) Vector velocidad dz/dt y su proyección real dx/dt. (c) Vector aceleración d^2z/dt^2 y su proyección real d^2x/dt^2.*

[1] Abreviatura frecuente: Re(z).

Estos tres vectores se indican en la figura 1-7 (utilizando tres diagramas separados, porque son magnitudes de tres clases físicamente diferentes : desplazamiento, velocidad y aceleración). En cada caso se aprecia que la componente de importancia física es la componente real del vector en cuestión y la relación entre fases se observa a simple vista (dado que cada factor j ha de entenderse como un avance en el ángulo de fase de $\pi/2$). Éste es un ejemplo muy sencillo, que no muestra realmente la potencia del método, pero pronto veremos otras aplicaciones más interesantes.

PROBLEMAS

1-1 Consideremos un vector z definido por la ecuación $z = z_1 z_2$, siendo $z_1 = a + jb$ y $z_2 = c + jd$.

(a) Demostrar que la longitud de z es igual al producto de las longitudes de z_1 y z_2.

(b) Demostrar que el ángulo comprendido entre los ejes z y x es la suma de los ángulos que forman por separado z_1 y z_2 con x.

1-2 Consideremos un vector z definido por la ecuación $z = z_1/z_2\,(z_2 \neq 0)$, siendo $z_1 = a + jb$ y $z_2 = c + jd$.

(a) Demostrar que la longitud de z es el cociente de las longitudes de z_1 y z_2.

(b) Demostrar que el ángulo comprendido entre los ejes z y x es la diferencia de los ángulos que forman separadamente z_1 y z_2.

1-3 Demostrar que la multiplicación de cualquier número complejo z por $e^{j\theta}$ puede describirse, en términos geométricos, como una rotación positiva en el ángulo θ del vector representado por z sin alteración de su longitud.

1-4 (a) Si $z = Ae^{j\theta}$, deducir que $dz = jzd\theta$ y explicar el significado de esta relación en un diagrama vectorial.

(b) Hallar los valores y direcciones de los vectores $(2 + j\sqrt{3})$ y $(2 - j\sqrt{3})^2$.

1-5 Para tomar las derivadas sucesivas de $e^{j\theta}$ respecto a θ, basta multiplicar por j:

$$\frac{d}{d\theta}(Ae^{j\theta}) = jAe^{j\theta}$$

Demostrar que esta propiedad sigue siendo válida si se utiliza la representación sinusoidal $e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$.

1-6 Dada la relación de Euler $e^{j\theta} = \cos\theta + j \operatorname{sen}\theta$, hallar

(a) La representación geométrica de $e^{-j\theta}$.