Introducción al Análisis de Errores

JOHN R. TAYLOR

El estudio de las incertidumbres en las mediciones físicas

Traducción de la segunda edición original

EDITORIAL REVERTÉ

Principales fórmulas de la Parte I

Notación (Capítulo 2)

$$(\text{valor medido de } x) = x_{\text{mejor}} \pm \delta x, \qquad \text{(p. 14)}$$

donde

$$x_{\text{mejor}} = \text{mejor estimación de } x,$$
$$\delta x = \text{incertidumbre o error en la medición}$$

$$\text{incertidumbre relativa} = \left|\frac{\delta x}{x_{\text{mejor}}}\right|. \qquad \text{(p. 30)}$$

Propagación de incertidumbres (Capítulo 3)

Si varias variables $x, \ldots, w$ se miden con pequeñas incertidumbres $\delta x, \ldots, \delta w$, y los valores medidos se utilizan para calcular alguna magnitud q, entonces las incertidumbres en $x, \ldots, w$ generan una incertidumbre en q como sigue:

Si q es la suma y diferencia, $q = x + \cdots + z - (u + \cdots + w)$, entonces

$$\delta q \begin{cases} = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2} \\ \quad \text{para errores aleatorios independientes;} \\ \le \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta w \\ \quad \text{siempre.} \end{cases} \qquad \text{(p. 63)}$$

Si q es el producto y cociente $q = \dfrac{x \times \ldots \times z}{u \times \ldots \times w}$, entonces

$$\frac{\delta q}{|q|} \begin{cases} = \sqrt{\left(\dfrac{\delta x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta u}{u}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\delta w}{w}\right)^2} \\ \quad \text{para errores aleatorios independientes;} \\ \le \dfrac{\delta x}{|x|} + \ldots + \dfrac{\delta z}{|z|} + \dfrac{\delta u}{|u|} + \ldots + \dfrac{\delta w}{|w|} \\ \quad \text{siempre.} \end{cases} \qquad \text{(p. 63)}$$

Si $q = Bx$, donde B se conoce exactamente, entonces

$$\delta q = |B|\, \delta x. \qquad \text{(p. 57)}$$

Si q es una función de una variable, $q(x)$, entonces

$$\delta q = \frac{dq}{dx} \delta x. \qquad \text{(p. 67)}$$

Si q es una potencia, $q = x^n$, entonces

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \, \frac{\delta x}{|x|}. \qquad \text{(p. 69)}$$

Si q es cualquier función de varias variables $x,\ldots,z$, entonces

$$\delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x}\,\delta x\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial q}{\partial z}\,\delta z\right)^2}. \qquad \text{(p. 78)}$$

(para errores aleatorios independientes)

Definiciones estadísticas (Capítulo 4)

Si $x_1,\ldots,x_N$ denota N mediciones separadas de una magnitud x, entonces definimos:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \text{media}; \qquad \text{(p. 102)}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (x_i - \bar{x})^2} = \text{desviación estándar o DE} \qquad \text{(p. 104)}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \text{desviación estándar de la media} \qquad \text{(p. 107)}$$

La distribución normal (Capítulo 5)

Para cualquier distribución límite $f(x)$ de mediciones de una variable continua x:

$f(x)\,dx =$ probabilidad de que cualquier medida dé un resultado que se encuentre entre x y $x + dx$; (p. 134)

$\int_a^b f(x)\,dx =$ probabilidad de que cualquier medida dé un resultado entre $x = a$ y $x = b$; (p. 134)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ es la condición de normalización. (p. 134)

La distribución normal o de Gauss es

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} \qquad \text{(p. 139)}$$

donde

$X =$ centro de distribución = valor verdadero de x
$\quad =$ media después de muchas mediciones,
$\sigma =$ anchura de la distribución
$\quad =$ desviación estándar después de muchas mediciones.

La probabilidad de que una medida esté dentro de t desviaciones estándar de X es

$$\text{Prob(dentro de } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t}^{t} e^{-z^2/2}\,dz = \text{integral de error normal}; \qquad \text{(p. 142)}$$

en particular

$$\text{Prob(dentro de } 1\sigma) = 68\%.$$

Introducción al Análisis de Errores

El estudio de las incertidumbres
en las mediciones físicas

Traducción de la segunda edición original

JOHN R. TAYLOR
Profesor de Física
UNIVERSIDAD DE COLORADO

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:
An Introduction to Error Analysis. The Study of Uncertainties in Physical Measurements. Second Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por
University Science Books. Sausalito, California.

Edición en papel
© Editorial Reverté, S. A., 2014
ISBN: 978-84-291-5184-8

Edición e-book (PDF)
© Editorial Reverté, S. A., 2018
ISBN: 978-84-291-9436-4

Versión española traducida por:
José María Oller Sala
Catedrático de Estadística de la Universidad de Barcelona

DISEÑO DE LA CUBIERTA: David Kimura + Gabriela Varela
MAQUETACIÓN: Reverté-Aguilar, S. L.

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15. Local B
Tel: (34) 93 419 33 36
08029 Barcelona. España
reverte@reverte.com

www.reverte.com

1415

A mi esposa

Contenidos

Parte I

Parte II

Prefacio a la segunda edición

Escribí por primera vez *Introducción al análisis de errores* porque mi experiencia docente en clases introductorias de laboratorio durante varios años me convenció de la gran necesidad de un libro que realmente *introdujera* el tema a estudiantes de ciencias universitarios. Varios buenos libros sobre el tema estaban ya disponibles, pero ninguno era realmente adecuado para un estudiante que se iniciase en la materia. La buena acogida de la primera edición confirmó la existencia de dicha necesidad y sugiere que el libro la satisfizo.

El continuo éxito de la primera edición sugiere que todavía responde a esta necesidad. Sin embargo, después de más de una década, todo autor de un libro de texto universitario debe, sin duda, sentirse obligado a mejorar y actualizar la versión original. Las ideas para la modificación provienen de distintas fuentes: sugerencias de los lectores, la necesidad de adaptar el libro a la amplia disponibilidad de calculadoras y ordenadores, así como a mis propias experiencias en la enseñanza del libro y el hallazgo de aspectos mejorables.

Debido a la reacción abrumadoramente favorable a la primera edición, he mantenido su nivel básico y el enfoque general. Por lo tanto, muchas revisiones son simplemente cambios en la redacción para mejorar la claridad. Unos pocos cambios son importantes, los más importantes de los cuales son los siguientes:

1. El número de problemas al final de cada capítulo casi se duplica para ampliar la oferta a los usuarios y para que los profesores tengan la posibilidad de variar sus problemas asignados de año en año. Huelga decir que no es necesario que el lector resuelva los cerca de 264 problemas que se ofrecen; al contrario, una media docena de problemas por capítulo es probablemente suficiente.

2. Varios lectores me recomendaron la colocación de unos cuantos ejercicios sencillos repartidos regularmente a lo largo del texto para que comprueben que realmente entienden las ideas que se le acaban de presentar. Estos ejercicios aparecen ahora como “Test rápido”, e insto encarecidamente a los estudiantes que se introducen en la materia que traten de resolverlos todos. Si algún “Test rápido” le requiere al lector mucho más de uno o dos minutos, probablemente éste tenga que releer los párrafos anteriores. Las respuestas de todos los “Test rápidos” se proporcionan en la sección de respuestas al final del libro. Quienes encuentren este tipo de ejercicio como una distracción, pueden simplemente saltárselos.

3. Otra de las novedades de esta edición son los resúmenes completos de todas las ecuaciones importantes al final de cada capítulo que complementan las breves sinopsis de la primera edición situadas detrás de la portada y la contraportada. En estos nuevos resúmenes se enumeran todas las ecuaciones fundamentales del capítulo y también de la colección de problemas.

4. En esta edición hay muchos gráficos nuevos, sobre todo en los primeros capítulos. Los gráficos ayudan a hacer que el texto parezca menos intimidatorio y reflejan mi esfuerzo consciente para estimular a los estudiantes que a piensen más visualmente sobre las incertidumbres. He observado, por ejemplo, que muchos estudiantes les ayuda a entender cuestiones tales como la coherencia de las mediciones si piensan visualmente en términos de barras de error.

5. He reorganizado las colecciones de problemas al final de cada capítulo de tres maneras. En primer lugar, la sección de Soluciones situada al final del libro contiene las respuestas de todos los problemas impares. (La primera edición sólo proporcionaba la solución a problemas seleccionados). El nuevo sistema es más simple y más tradicional. En segundo lugar, como una guía aproximada para indicar su nivel de dificultad, he etiquetado los problemas con un sistema de estrellas: una estrella (★) indica un ejercicio simple cuya resolución no debería requerir más de un par de minutos si se entiende el tema; dos estrellas (★★) indican un problema algo más difícil; y tres (★★★) indican un problema realmente más complejo cuya resolución requiere la utilización de varios conceptos diferentes, así como más tiempo. Admito que la clasificación es muy aproximada, pero los alumnos que estudian por su cuenta encontrarán que le es útil, así como los maestros a la hora de asignar problemas a sus alumnos.

En tercer lugar, he ordenado los problemas por el número de sección. Tan pronto como el lector haya leído la sección N, deberá estar preparado para intentar resolver cualquier problema listado en esa sección. Aunque este sistema es conveniente tanto para el estudiante como el profesor, parece ser que en la actualidad está en desuso. Supongo que esta desaprobación está basada en el argumento de que dicho sistema podría excluir a los problemas más complejos que implican muchas ideas de diferentes secciones. Considero que éste es un argumento engañoso: un problema listado en la sección N puede, por supuesto, involucrar ideas de muchas secciones previas y, por consiguiente, ser tan general y profundo como cualquier problema enumerado bajo un título más general.

6. He añadido los problemas que requieren el uso de programas informáticos tales como hojas de cálculo de Lotus 123 o Excel. Ninguno de estos problemas es específico de un determinado sistema; por el contrario, instan al estudiante a que aprenda a hacer distintas tareas utilizando cualquier sistema disponible. Del mismo modo, varios problemas los animan a aprender a usar las funciones incorporadas en sus calculadoras para calcular las desviaciones estándar y similares.

7. He añadido un apéndice (Apéndice E) para mostrar dos demostraciones que se refieren a las desviaciones estándar de la muestra: la primera, que, basándose en N mediciones de una magnitud, la mejor estimación de la anchura real de su distribución es la desviación estándar de la muestra con $(N - 1)$ en el denominador, y la segunda, que la incertidumbre en esta estimación viene dada por la ecuación (5.46). Estas demostraciones son sorprendentemente difíciles y no son fáciles de encontrar en la bibliografía.

Es un placer dar las gracias a las numerosas personas que me han hecho sugerencias para esta segunda edición. Entre mis amigos y colegas de la Universidad de Colorado, los que más generosamente me dieron su tiempo y sus conocimientos fueron David Alexander, Dana Anderson, David Bartlett, Barry Bruce, John Cumalat, Mike Dubson, Bill Ford, Mark Johnson, Jerry Leigh, Uriel Nauenberg, Bill O'Sullivan, Bob Ristinen, Rod Smythe y Chris Zafiratos. En otras instituciones, quiero dar especialmente las gracias a R. G. Chambers de Leeds, Inglaterra, a Sharif Heger de la Universidad de Nuevo México, a Steven Hoffmaster de Gonzaga University, a Hilliard Macomber de Universidad de Northern Iowa, a Mark Semon de Bates College, a Peter Timbie de Brown University y a David Van Dyke de la Universidad de Pennsylvania. Me siento profundamente en deuda con todas estas personas por su generosa ayuda. Estoy también muy agradecido a Bruce Armbruster de la Universidad de Science Books por su generoso ánimo y apoyo. Por encima de todo, quiero dar las gracias a mi esposa Debby; yo no sé cómo aguanta las tensiones y el estrés que suponen la escritura de un libro, pero estoy muy agradecido de como lo hace.

J. R. Taylor
Septiembre de 1996
Boulder, Colorado

Prefacio a la primera edición

Todas las medidas, por muy cuidadas y científicas que sean, están sujetas a ciertas incertidumbres. El análisis de errores es el estudio y la evaluación de estas incertidumbres, y sus dos principales funciones son permitir a los científicos estimar el tamaño de sus incertidumbres, y ayudarlos a reducirlas cuando sea necesario. El análisis de las incertidumbres, o "errores", es una parte vital de cualquier experimento científico, y por lo tanto el análisis de errores es una parte importante de cualquier curso universitario de ciencias experimentales. También puede ser una de las partes más interesantes del curso. El reto de estimar incertidumbres y reducirlas a un nivel que permita sacar una conclusión correcta puede hacer que un conjunto aburrido y rutinario de mediciones se convierta en un ejercicio realmente interesante.

Este libro es una introducción al análisis de errores para su uso en aquellos cursos universitarios de introducción a la física experimental a los que por lo general asisten estudiantes de primero o de segundo año de ciencias o ingeniería. Ciertamente no afirmo que el análisis de errores es la parte más importante (ni mucho menos la única) de este curso, pero a menudo he encontrado que es la parte más maltratada y descuidada. En muchos de esos cursos, el análisis de errores se "enseña" entregando un par de páginas con notas y unas pocas fórmulas, y se espera que el estudiante siga adelante con el trabajo solo. El resultado es que el análisis de errores se convierte en un ritual sin sentido, en el que el estudiante agrega unas pocas líneas de cálculo al final de cada informe de laboratorio, no porque entienda el porqué, sino, simplemente, porque el instructor le ha dicho que lo haga.

Escribí este libro con la convicción de que cualquier estudiante, incluso uno que nunca hubiera oído hablar de este tema, debería ser capaz de aprender qué es el análisis de errores, por qué es interesante e importante, y cómo se utilizan las herramientas básicas de la materia en los informes de laboratorio. La parte I del libro (capítulos 1 a 5) trata de hacer todo esto, con muchos ejemplos de los experimentos que se realizan en los laboratorios de enseñanza. El estudiante que domine este material debería entonces conocer y entender casi todo lo que espera aprender sobre análisis de errores en un curso de laboratorio de primer año: la propagación de errores, el uso de la estadística elemental y su justificación en términos de la distribución normal.

La segunda parte contiene una selección de temas más avanzados: ajuste de mínimos cuadrados, el coeficiente de correlación, la prueba de χ^2 y otros. Éstos con toda seguridad no estarán incluidos oficialmente en un curso de laboratorio de primer año, aunque algunos estudiantes podrían interesarse en algunos de ellos. Sin embargo, varios de estos temas serán necesarios en un segundo curso de laboratorio, y es principalmente por esta razón que los he incluido.

Soy muy consciente de que hay muy poco tiempo para dedicar a un tema como el análisis de errores en la mayoría de los cursos de laboratorio. En la Universidad de Colorado damos una conferencia de una hora en cada una de las primeras seis semanas de nuestro curso de laboratorio de primer año. Estas conferencias, junto con unas pocas tareas con los problemas al final de los capítulos, nos ha llevado a cubrir los capítulos 1 al 4 en detalle y brevemente el capítulo 5. Esto da a los estudiantes un conocimiento práctico de la propagación de errores y de los elementos de la estadística, además de un conocimiento superficial de la teoría subyacente de la distribución normal.

De los comentarios de varios estudiantes de Colorado, se hizo evidente que las conferencias fueron un lujo innecesario para al menos algunos de los estudiantes, quienes probablemente podrían haber aprendido el material necesario de las lecturas asignadas y de los problemas propuestos. Ciertamente creo que el libro podría ser estudiado sin la ayuda de conferencias.

La parte II se podría enseñar en unas pocas charlas al inicio de un curso de laboratorio de segundo año (una vez más, complementado con algunos de los problemas asignados). Pero fue pensada, incluso más que la parte I, para ser leída por el estudiante en cualquier momento según sus propias necesidades e intereses. Sus siete capítulos son casi completamente independientes entre sí, con el fin de fomentar este tipo de uso.

Al final de cada capítulo he incluido una selección de problemas; el lector tiene que trabajar varios de ellos para dominar las técnicas. La mayoría de los cálculos de errores son bastante sencillos. Un estudiante que hace muchos cálculos complicados (ya sea en los problemas de este libro o en los informes de laboratorio) es casi seguro que está haciendo algo de una manera innecesariamente difícil. Con el fin de dar a los profesores y lectores una buena opción, he incluido muchos más problemas de los que el lector medio necesita tratar. Un lector que haga una tercera parte de los problemas lo estará haciendo bien.

En el interior de la cubierta y contracubierta figuran resúmenes de todas las fórmulas principales. Espero que estas referencias sean útiles para el lector, tanto en el estudio del libro como después. Los resúmenes están organizados por capítulos, y también espero que sirvan como breves reseñas a las que el lector pueda acudir después de estudiar cada capítulo.

En el texto, algunas declaraciones —ecuaciones y reglas de procedimiento— se han destacado con un fondo sombreado. Esta forma de destacar está reservada para las declaraciones que son importantes y están en su forma final (es decir, no se modificarán por el trabajo posterior). Definitivamente, usted tendrá que recordar estas afirmaciones, por lo que se han destacado para llamar su atención.

El nivel de matemáticas que se espera del lector sube lentamente a lo largo del libro. Los dos primeros capítulos sólo requieren álgebra; el capítulo 3 requiere diferenciación (y la diferenciación parcial en la sección 3.11, que es opcional), el capítulo 5 necesita un conocimiento de la integración y la función exponencial. En la parte II supongo que el lector está del todo cómodo con todas estas ideas.

El libro contiene numerosos ejemplos de experimentos de física, pero no es esencial comprender la teoría subyacente. Además, los ejemplos se toman en su mayoría de la mecánica elemental y la óptica para que sea más probable que el estudiante ya haya estudiado la teoría. El lector que lo necesite puede encontrar una explicación de la teoría buscando en el índice de cualquier texto introductorio de física.

El análisis de errores es un tema que apasiona a mucha gente, y ningún tratamiento sencillo puede aspirar a complacer a todos. Mi propio prejuicio es que, cuando hay que elegir entre la facilidad de comprensión y el estricto rigor, un texto de física debe escoger la primera. Por ejemplo, en la controvertida cuestión de la combinación de errores en cuadratura en comparación con la adición directa, he elegido tratar en primer lugar la adición directa, ya que el alumno puede comprender fácilmente los argumentos que conducen a ella.

En los últimos años se ha producido un cambio drástico en los laboratorios de estudiantes con la aparición de la calculadora de bolsillo. Esto tiene algunas consecuencias desafortunadas —sobre todo, el hábito atroz de citar ridículamente cifras *no significativas* simplemente porque la calculadora las produce— pero es desde casi todos los puntos de vista una gran ventaja, especialmente en el análisis de errores. La calculadora de bolsillo le permite a uno calcular, en pocos segundos, medias y desviaciones estándar que anteriormente habrían tomado horas. Se hacen innecesarias muchas tablas, ya que ahora se pueden calcular funciones como la de Gauss con mayor rapidez que la que uno necesitaría para encontrarla en un libro de tablas. He tratado de explotar esta herramienta maravillosa en la medida de lo posible.

Es un placer agradecer a varias personas por sus valiosos comentarios y sugerencias. Una edición preliminar del libro se utilizó en varias universidades y estoy agradecido a muchos estudiantes y colegas por sus críticas. Especialmente útiles fueron los comentarios de John Morrison y David Nesbitt de la Universidad de Colorado, los profesores Pratt y Schroeder de la Michigan State, el profesor Shugart de la U. C. Berkeley y el profesor Semon del Bates College. Diane Casparian, Linda Frueh y Connie Gurule escribieron maravillosamente y a gran velocidad los sucesivos proyectos. Sin mi suegra, Frances Kretschmann, la corrección de pruebas no se hubiera hecho a tiempo. Doy las gracias a todas estas personas por su ayuda; pero sobre todo doy gracias a mi esposa, cuya laboriosa y rigurosa edición mejoró el libro entero más allá de toda medida.

J. R. Taylor
1 de Noviembre de 1981
Boulder, Colorado

Parte I

La parte I presenta las ideas básicas del análisis de errores, tal como se necesitan en un laboratorio típico de primer año de Física en la universidad. Los dos primeros capítulos describen lo que es el análisis de errores, por qué es importante y cómo se puede utilizar en un informe estándar de laboratorio. El capítulo 3 describe la propagación de errores, la forma en que las incertidumbres en las mediciones originales "se propagan" a través de los cálculos realizados provocando incertidumbre en los resultados finales obtenidos. Los capítulos 4 y 5 introducen los métodos estadísticos para evaluar las llamadas incertidumbres aleatorias.

Capítulo 1

Descripción preliminar del análisis de errores

El análisis de errores es el estudio y evaluación de la incertidumbre correspondiente a cualquier medición. La experiencia ha demostrado que ninguna medición, por muy cuidadosa que sea, puede estar completamente libre de incertidumbres. Puesto que toda la estructura y aplicación de la Ciencia se basa en mediciones experimentales, la capacidad de evaluarlas y de minimizar su influencia es de crucial importancia.

En este primer capítulo se describen algunas mediciones simples que ilustran la inevitable aparición de incertidumbres experimentales y se muestra la importancia de cuantificar su magnitud. A continuación el capítulo describe cómo (por lo menos en algunos casos sencillos) la magnitud de dichas incertidumbres experimentales se puede estimar con realismo, a menudo mediante poco más que simple sentido común.

1.1 Errores como incertidumbres

En la ciencia, la palabra *error* no tiene las connotaciones habituales de las expresiones *equivocación* o *metedura de pata*. El error en la medición científica significa la inevitable incertidumbre que asiste a todas las mediciones. Como tal, los errores no son equivocaciones, no se pueden eliminar por más cuidadosos que seamos. Lo máximo que podemos aspirar es asegurarnos de que los errores sean tan pequeños como sea razonablemente posible y tener una estimación fiable de su magnitud. La mayoría de los libros de texto introducen otras definiciones de error, que se discutirán más adelante. Por ahora, el error se utiliza exclusivamente en el sentido de la incertidumbre, y las dos palabras se usan indistintamente.

1.2 La inevitabilidad de la incertidumbre

Para ilustrar la aparición inevitable de incertidumbre, sólo tenemos que examinar con detenimiento cualquier medición cotidiana. Consideremos, por ejemplo, un carpintero que debe medir la altura de un portal antes de instalar una puerta. Como una primera medida aproximada, puede simplemente mirar el portal y estimar su altura en 210 cm. Esta tosca "medida" está, sin duda, sujeta a incertidumbre. Si se le apura, el carpintero podría expresar dicha incertidumbre admitiendo que la altura puede ser cualquier valor entre 205 cm y 215 cm.

Si quisiera una medida más precisa, usaría una cinta de medir y tal vez encontraría que la altura es 211,3 cm. Esta medida es, sin duda, más precisa que la estimación original, pero obviamente aún está sujeta a cierta incertidumbre, ya que le es imposible saber si la altura es exactamente 211,3000 cm en lugar de, por ejemplo, 211,3001 cm.

Esta incertidumbre remanente tiene muchas causas, varias de las cuales se tratarán en el presente libro. Algunas de las causas podrían ser eliminadas si el carpintero realmente lo necesitara. Por ejemplo, una fuente de incertidumbre podría deberse a una insuficiente iluminación que dificultara la lectura de la cinta métrica; este problema se podría corregir mediante la mejora de la iluminación.

Por otro lado, algunas fuentes de incertidumbre son intrínsecas al proceso de medición y nunca pueden ser completamente eliminadas. Por ejemplo, supongamos que la cinta métrica del carpintero está graduada en medios centímetros. La parte superior de la puerta probablemente no coincidirá exactamente con una de las marcas de medio centímetro, y si no lo hace, el carpintero deberá *estimar* justo donde se encuentra dicha parte superior entre dos marcas adyacentes. Incluso si la parte superior coincide con una de las marcas, la propia marca es quizás de un milímetro de grosor; de modo que deberá estimar justo donde se encuentra dicha parte superior dentro de la marca. En cualquier caso, el carpintero finalmente deberá estimar donde se encuentra la parte superior de la puerta en relación con las marcas en la cinta, y esta necesidad provoca cierta incertidumbre en la medición.

Comprando una cinta métrica mejor con las marcas más finas y más próximas entre sí, el carpintero puede reducir su incertidumbre pero no puede eliminarla por completo. Si se obsesiona con la idea de encontrar la altura de la puerta con la mayor precisión técnicamente posible, podría comprar un interferómetro láser caro. Pero incluso la precisión de un interferómetro está limitada a distancias del orden de la longitud de onda de la luz (aproximadamente $0,5\times10^{-6}$ metros). Aunque el carpintero ahora sería capaz de medir la altura con una precisión fantástica, todavía no conoce la altura del portal *exactamente*.

Además, como nuestro carpintero trate de lograr una mayor precisión, se topará con un importante problema de principio. Sin duda encontrará que la altura es diferente en diferentes lugares. Incluso en un mismo lugar, encontrará que la altura varía si la temperatura y la humedad varían, o incluso si accidentalmente se pega a la puerta una fina capa de suciedad. En otras palabras, encontrará que no hay nada que sea *la* altura de la puerta. Este tipo de problema se llama *problema de definición* (la altura de la puerta no es una magnitud bien definida) y juega un papel importante en muchas mediciones científicas.

Nuestra experiencia con el carpintero ilustra un hecho que es generalmente cierto: ninguna magnitud física (longitud, tiempo o temperatura, por ejemplo) se puede medir con total certeza. Con cuidado, podemos ser capaces de reducir las incertidumbres hasta que sean sumamente pequeñas, pero es imposible eliminarlas por completo.

Por lo general, en las mediciones cotidianas no nos molestamos en hablar de las incertidumbres. A veces las incertidumbres simplemente no son interesantes. Si decimos que la distancia entre nuestra casa y la escuela es de 3 kilómetros, el que esto signifique "alguna cifra entre 2,5 y 3,5 kilómetros" o "algún valor entre 2,99 y 3,01 kilómetros", generalmente carece de importancia. A menudo las incertidumbres son importantes, pero se pueden admitir de forma instintiva y sin consideración explícita. Cuando mide la puerta, nuestro carpintero debe conocer su altura con una incertidumbre inferior a 1 mm. Siempre que la incertidumbre sea inferior a ese valor, la puerta (para todos los fines prácticos) encajará de forma perfecta, y su preocupación por el análisis de errores concluirá.

1.3 La importancia de conocer las incertidumbres

Nuestro ejemplo del carpintero midiendo una puerta ilustra cómo las incertidumbres están siempre presentes en las mediciones. Veamos ahora un ejemplo que ilustra más claramente la importancia crucial de conocer la magnitud de dichas incertidumbres.

Supongamos que nos encontramos ante un problema como el que se dice que resolvió Arquímedes. Se nos pide que averigüemos si una corona está hecha de oro de 18 quilates, como se afirma, o de una aleación más barata. Siguiendo a Arquímedes, nos decidimos a determinar la densidad de la corona ρ sabiendo que las densidades del oro de 18 quilates y de la presunta aleación son

$$\rho_{\text{oro}} = 15{,}5 \text{ gramos/cm}^3$$

y

$$\rho_{\text{aleación}} = 13{,}8 \text{ gramos/cm}^3.$$

Si somos capaces de medir la densidad de la corona, deberíamos ser capaces de decidir (tal como Arquímedes sugirió) si la corona es realmente de oro mediante la comparación de ρ con las densidades conocidas ρ_{oro} y $\rho_{\text{aleación}}$.

Supongamos que convocamos a dos expertos en la medición de densidades. El primer experto, Jorge, podría efectuar una medición rápida de ρ e informar que su mejor estimación de ρ es 15 y que es casi seguro que el verdadero valor se encuentra entre 13,5 y 16,5 gramos/cm^3. Nuestro segundo experto, Marta, podría tardar un poco más y luego comunicar su mejor estimación de 13,9 y un intervalo o rango probable de 13,7 a 14,1 gramos/cm^3. Las conclusiones de nuestros dos expertos se resumen en la figura 1.1.

El primer aspecto a destacar acerca de estos resultados es que, aunque la medición de Marta es mucho más precisa, la medición de Jorge es, probablemente, también correcta. Cada experto indica un intervalo o rango dentro del cual confía en que esté el verdadero valor de ρ, y estos intervalos se solapan; por tanto es perfectamente posible (e incluso probable) que ambas afirmaciones sean correctas.

Señalamos a continuación que la incertidumbre en la medición de Jorge es tan grande que sus resultados no sirven para nada. Las densidades del oro de 18 quilates y de la aleación se encuentran ambas dentro del intervalo estimado, desde 13,5 hasta 16,5 gramos/cm^3; por consiguiente no se pueden sacar conclusiones a partir de las mediciones de Jorge. Por otro lado, las mediciones de Marta indican claramente que la corona no es de auténtico oro, la densidad de la presunta aleación, 13,8, se encuentra holgadamente dentro del intervalo estimado por Marta de 13,7 a 14,1, pero la de oro de 18 quilates, 15,5, está claramente fue-

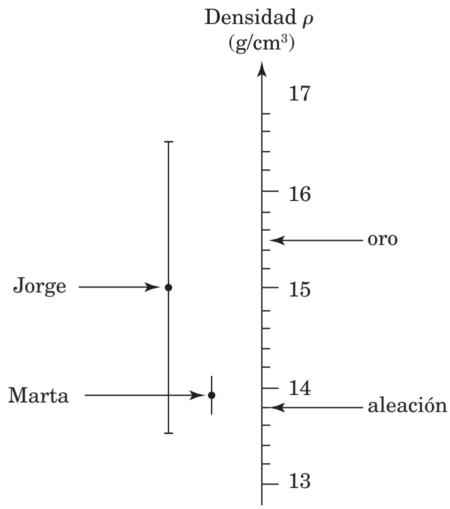

Figura 1.1. Dos determinaciones de la densidad de una corona supuestamente de oro. Los dos puntos negros muestran las mejores estimaciones de la densidad de Jorge y Marta; las dos barras verticales de error muestran sus respectivos márgenes de error, los intervalos o rangos dentro de los cuales creen que se halla el verdadero valor de la densidad. La incertidumbre de Jorge es tan grande que el oro y la presunta aleación caen dentro de sus márgenes de error; por lo tanto, su medida no determina qué metal se utilizó. La incertidumbre de Marta es sensiblemente menor, y su medición muestra claramente que la corona no es de oro.

ra del mismo. Evidentemente, si las mediciones se efectúan para sacar una conclusión, las incertidumbres experimentales no deberían ser demasiado grandes. No obstante, tampoco necesitan ser extremadamente pequeñas. En este sentido, nuestro ejemplo es típico de muchas mediciones científicas, que requieren incertidumbres razonablemente bajas (tal vez un pequeño porcentaje del valor medido), pero que a menudo las precisiones extremas son innecesarias.

Dado que nuestra decisión depende de la afirmación de Marta de que ρ se encuentra entre 13,7 y 14,1 gramos/cm^3, ella debe darnos razones para que podamos confiar en su afirmación. En otras palabras, debe *justificar* la amplitud del intervalo de valores de la densidad. Los estudiantes principiantes a menudo pasan por alto este punto y se limitan a indicar sus incertidumbres omitiendo cualquier justificación. Sin una breve explicación de cómo se estima la incertidumbre, la afirmación es casi inútil.

La conclusión más importante acerca de las mediciones de nuestros dos expertos es la siguiente: al igual que la mayoría de las mediciones científicas, ambas no hubieran servido para nada si no se hubieran proporcionado cuantificaciones fiables de sus incertidumbres. De hecho, si sólo hubiésemos conocido las dos mejores estimaciones (15 proporcionada por Jorge y 13,9 por Marta), no sólo no hubiéramos podido llegar a una conclusión válida, sino que en realidad podríamos haber sido inducidos a error, ya que el resultado de Jorge (15) parece sugerir que la corona es de oro auténtico.

1.4 Más ejemplos

Los ejemplos de las dos secciones anteriores no se eligieron por su gran importancia, sino para introducir algunas de las características principales del análisis de errores. Por lo tanto, el lector queda excusado si considera que son ejemplos un poco artificiales. Es fácil, sin embargo, pensar en ejemplos de gran importancia en casi cualquier rama de la ciencia básica o aplicada.

En ciencias aplicadas, por ejemplo, los ingenieros de diseño de una planta de energía deben conocer las características de los materiales y combustibles que se van a utilizar. El fabricante de una calculadora de bolsillo debe conocer las propiedades de los diversos componentes electrónicos. En cada caso, alguien tiene que medir los parámetros requeridos, y de haberlos medido, debe establecer su fiabilidad, lo que requiere el análisis de errores. Los ingenieros que se ocupan de la seguridad de los aviones, trenes o coches deben comprender las incertidumbres asociadas a los tiempos de reacción de los conductores, a las distancias de frenado y a un sinfín de otras variables; si no se hace un análisis de errores, pueden ocurrir accidentes como el que se muestra en la cubierta de este libro. Incluso en campos menos científicos, tales como la fabricación de prendas de vestir, el análisis de errores en la forma de control de calidad juega un papel vital.

En las ciencias básicas, el análisis de errores tiene un papel aún más fundamental. Cuando se proponen nuevas teorías, éstas deben ser contrastadas con otras anteriores mediante uno o varios experimentos en los que las teorías nuevas y viejas predigan resultados diferentes. En principio, un investigador simplemente realiza experimentos y deja que los resultados decidan entre las teorías rivales. En la práctica, sin embargo, la situación se complica debido a las inevitables incertidumbres experimentales. Todas estas incertidumbres deben ser analizadas cuidadosamente, y sus efectos minimizados hasta que los experimentos permitan escoger una teoría aceptable. Es decir, los resultados experimentales, con sus incertidumbres, deben ser *coherentes* con las predicciones de una teoría e *incoherentes* con los de todas las alternativas razonables conocidas. Obviamente, el éxito de este procedimiento depende en gran medida de cómo interprete el científico el análisis de errores y la capacidad de esta interpretación para convencer a otros.

Un ejemplo famoso de validación de una teoría científica es la medición de la curvatura de la luz al pasar cerca del Sol. Cuando Einstein publicó su teoría de la relatividad general en 1916, señaló que la teoría predecía que un rayo de luz de una estrella se desviaría un ángulo $\alpha = 1{,}8''$ cuando pasara cerca del Sol. La predicción de la teoría clásica más simple sería que no hay ninguna desviación ($\alpha = 0$), y la de un análisis clásico más cuidadoso sería que (como el propio Einstein señaló en 1911) se desviaría un ángulo $\alpha = 0{,}9''$. En principio, todo lo que se necesitaba era observar una estrella cuando se alineara con el borde del Sol y medir el ángulo de inclinación α. Si el resultado fuera $\alpha = 1{,}8''$, la relatividad general sería justificada (por lo menos para este fenómeno); si α resultara ser 0 o $0{,}9''$, la relatividad general sería incorrecta y una de las teorías clásicas corroborada.

En la práctica, la curvatura de la luz causada por el Sol era muy difícil de medir y sólo fue posible durante un eclipse solar. Sin embargo, en 1919 se midió con éxito por Dyson, Eddington y Davidson, quienes establecieron su mejor estimación para el ángulo de inclinación en $\alpha = 2''$, con un 95% de probabilidad de que se encontrara entre 1,7″ y 2,3″.[1] Obviamente, este resultado era compatible con la relatividad general e incompatible con cualquiera de las predicciones basadas en teorías clásicas. Por lo tanto, este resultado proporcionaba un importante apoyo a la relatividad general.

En aquella época este resultado fue muy controvertido. Muchos especialistas sugirieron que las incertidumbres habían sido considerablemente subestimadas y que, por lo tanto, el experimento no era concluyente. Experimentos posteriores han tendido a confirmar la predicción de Einstein y reivindicar la conclusión de Dyson, Eddington y Davidson. El aspecto importante a destacar es que todo el problema gira en torno a la habilidad de los experimentadores para estimar de forma fiable todas sus incertidumbres y para convencer a los demás de lo que han hecho.

En los laboratorios de introducción a la física los estudiantes no suelen ser capaces de llevar a cabo pruebas concluyentes de nuevas teorías. A menudo, sin embargo, sí realizan experimentos que ponen a prueba las teorías físicas ya existentes. Por ejemplo, la teoría de la gravedad de Newton predice que los cuerpos caen con una aceleración constante g (en condiciones apropiadas), y los estudiantes pueden llevar a cabo experimentos para comprobar si esta predicción es correcta. Al principio, este tipo de experimento puede parecer artificial y sin sentido debido a que las teorías ya han sido, obviamente, comprobadas muchas veces con mucha más precisión de la que es posible en un laboratorio de enseñanza. Sin embargo, si el lector entiende el papel crucial del análisis de errores y acepta el reto de hacer la comprobación lo más precisa posible con el equipo disponible, tales experimentos se convierten en ejercicios interesantes e instructivos.

1.5 Estimación de incertidumbres al leer escalas

Hasta ahora hemos considerado varios ejemplos que ilustran por qué todas las mediciones poseen un cierto grado de incertidumbre y por qué es importante conocer su magnitud. Todavía no hemos discutido cómo podemos realmente evaluar la magnitud de dichas incertidumbres. Esta evaluación puede ser bastante complicada y es el tema principal de este libro. Afortunadamente, para algunas mediciones sencillas, es fácil obtener estimaciones razonables de la incertidumbre, a menudo utilizando nada más que el sentido común. Aquí y en la sección 1.6 se analizan ejemplos de tales mediciones. La comprensión de estos ejemplos le permitirá comenzar a utilizar el análisis de errores en sus experimentos y le servirá de base para las discusiones posteriores.

El primer ejemplo es una medición con una escala marcada, como la regla de la figura 1.2 o el voltímetro de la figura 1.3. Para medir la longitud del lápiz en la figura 1.2, primero tenemos que colocar el extremo del lápiz frente al cero de la

---

1. Esta estimación simplificada se basa en el documento original de F. W. Dyson, A. S. Eddington y C. Davidson (*Philosophical Transactions de la Royal Society*, **220A**, 1920, 291). He convertido el *error probable* originalmente citado en un intervalo de confianza del 95%. El significado preciso de este intervalo de confianza se establece en el Capítulo 5.

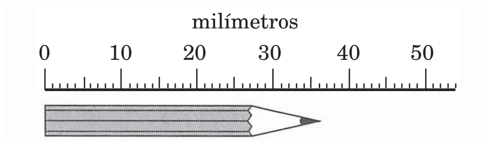

Figura 1.2. Medición de una longitud con una regla.

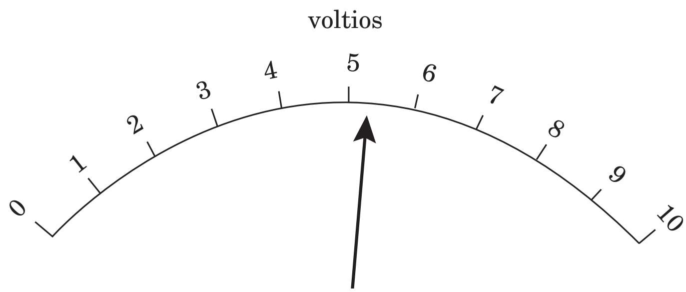

Figura 1.3. Una lectura en un voltímetro.

regla y luego decidir dónde llega la punta en la escala de la misma. Para medir la tensión en la figura 1.3, tenemos que decidir dónde apunta la aguja en la escala del voltímetro. Si aceptamos que la regla y el voltímetro son fiables, entonces, en cada caso, el principal problema es decidir dónde se encuentra un cierto punto en relación con las marcas de la escala correspondiente. (Por supuesto, si existe la posibilidad de que la regla y el voltímetro *no sean* fiables, también tendremos que tener en cuenta esta incertidumbre).

Las marcas de la regla en la figura 1.2 están bastante próximas entre sí (1 mm de diferencia). Podemos razonablemente decidir que la longitud que se muestra es, sin duda, más cercana a 36 mm que a 35 o 37 mm, pero no es posible ninguna otra lectura más precisa. En este caso, concluiríamos que

$$\begin{gathered}\text{mejor estimación de la longitud} = 36 \text{ mm},\\ \text{intervalo probable: } 35{,}5 \text{ a } 36{,}5 \text{ mm}\end{gathered} \tag{1.1}$$

y diríamos que hemos medido la longitud al milímetro.

Este tipo de conclusión —que la cantidad está más cerca a una marca determinada que a cualquiera de sus marcas vecinas— es bastante común. Por esta razón, muchos científicos introducen la convención de suponer que la declaración "$l = 36$ mm", sin ninguna otra calificación, significa que l es más cercana a 36 que a 35 o 37, es decir,

$$l = 36 \text{ mm}$$

significa

$$35{,}5 \text{ mm} \le l \le 36{,}5 \text{ mm}.$$

De la misma manera, una respuesta tal como $x = 1{,}27$ sin indicar ninguna incertidumbre se interpretará como que x se encuentra entre 1,265 y 1,275. En el presente libro no se usará esta convención, sino que siempre se indicará, de forma explícita, la incertidumbre. Sin embargo, el lector necesita conocerla y saber que se aplica a cualquier cantidad que se especifique sin incertidumbre, especialmente en esta era de las calculadoras de bolsillo, que muestran muchos dígitos. Si alguien copia irreflexivamente un número de la calculadora, tal como 123,456, y lo escribe sin ninguna calificación, entonces quien lo lea tiene derecho a suponer que dicho número es sin duda correcto con seis cifras significativas, lo que resulta ser muy poco probable.

Las marcas en el voltímetro mostrado en la figura 1.3 están más separadas que las de la regla. Aquí, la mayoría de los observadores estarían de acuerdo en que se puede hacer algo más que simplemente identificar la marca más cercana al puntero. Debido a que el espaciamiento es más grande, es posible estimar de forma realista el lugar en que se encuentra el puntero en el espacio que hay entre dos marcas. Así, una conclusión razonable para la muestra de tensión podría ser

$$\begin{aligned}\text{mejor estimación de la tensión} &= 5{,}3 \text{ voltios},\\ \text{intervalo probable: } & 5{,}2 \text{ a } 5{,}4 \text{ voltios.}\end{aligned} \tag{1.2}$$

El proceso de estimación de la posición entre las marcas de una escala se llama *interpolación*. Es una técnica importante que puede mejorarse con la práctica.

Diferentes observadores podrían no estar de acuerdo con las estimaciones precisas dadas en las ecuaciones (1.1) y (1.2). El lector podría decidirse a interpolar la longitud en la figura 1.2 y medirla con una incertidumbre menor que la dada en la ecuación (1.1). Sin embargo, pocas personas negarían que las ecuaciones (1.1) y (1.2) sean estimaciones razonables de las magnitudes en cuestión y de sus probables incertidumbres. Así, vemos que la estimación aproximada de las incertidumbres es bastante fácil cuando el único problema es determinar un punto en una escala marcada.

1.6 Estimar las incertidumbres en mediciones repetidas

Muchas mediciones suponen incertidumbres que son mucho más difíciles de estimar que las relacionadas con la localización de puntos en una escala. Por ejemplo, cuando se mide un intervalo de tiempo con un cronómetro, la principal fuente de incertidumbre no es la dificultad de leer el dial, sino nuestro tiempo de reacción en iniciar y detener el reloj, que es desconocido. A veces este tipo de incertidumbre puede estimarse de forma fiable si se puede repetir la medición varias veces. Supongamos, por ejemplo, que medimos el período de un péndulo una vez y obtenemos un resultado de 2,3 segundos. A partir de una sola medición no podemos decir mucho acerca de la incertidumbre experimental. Pero si la repetimos y obtenemos 2,4 segundos, entonces podemos decir de inmediato que la incertidumbre es probablemente del orden de 0,1 s. Si una secuencia de cuatro mediciones da los siguientes resultados (en segundos),

$$2{,}3;\ 2{,}4;\ 2{,}5;\ 2{,}4; \tag{1.3}$$

entonces podemos empezar a hacer algunas estimaciones bastante realistas.