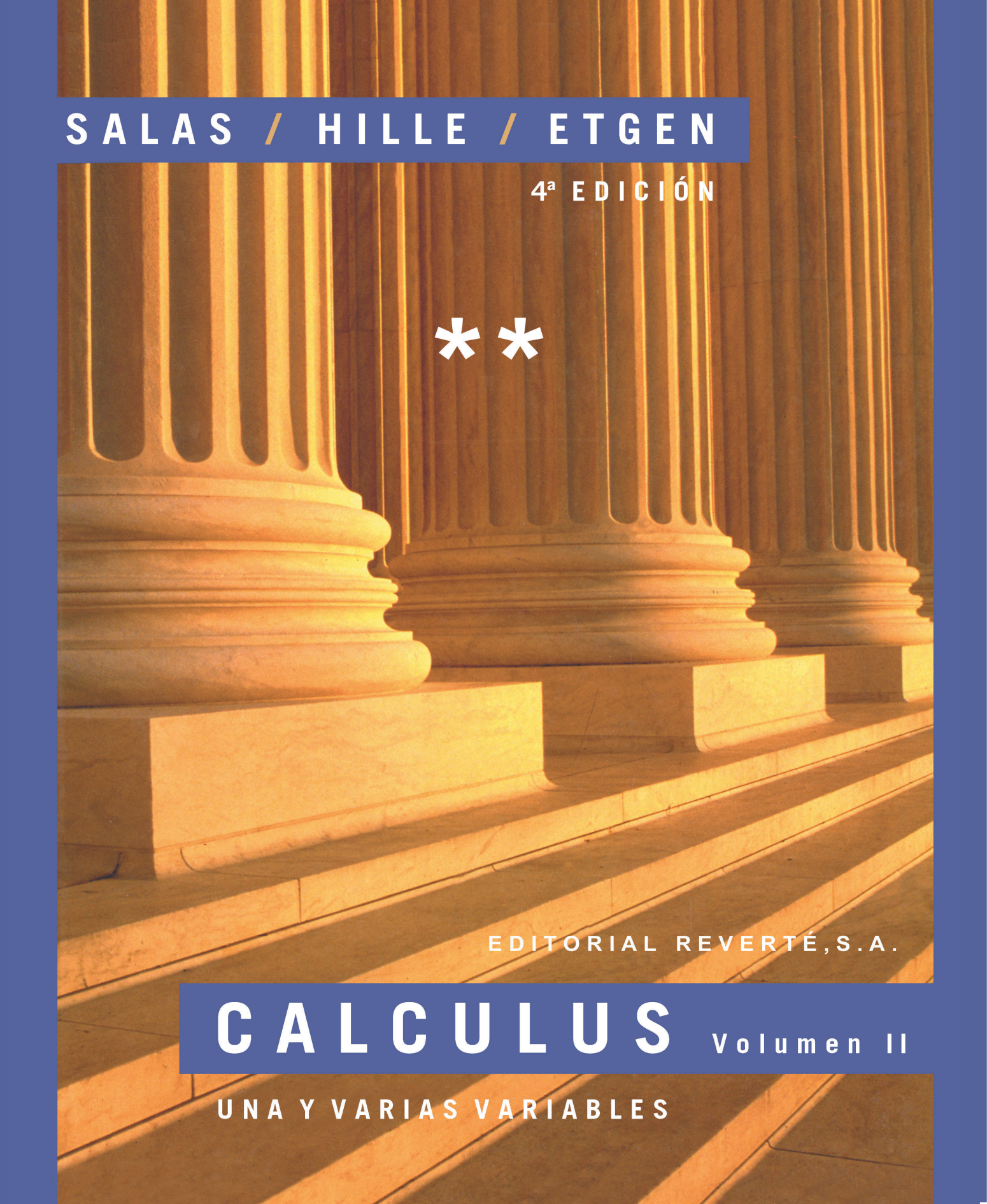




SALAS / HILLE / ETGEN

4ª EDICIÓN



EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

CALCULUS

Volumen II

UNA Y VARIAS VARIABLES



4ª EDICIÓN

SALAS

HILLE

ETGEN

CALCULUS

UNA Y VARIAS VARIABLES

Volumen II

4ª EDICIÓN

SALAS

HILLE

ETGEN

CALCULUS

UNA Y VARIAS VARIABLES

Volumen II



**EDITORIAL
REVERTÉ**

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:

Calculus. One and Several Variables, 8th Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por:

John Wiley & Sons, Inc., New York.

Copyright © John Wiley & Sons, Inc.

Edición en español

Copyright © Editorial Reverté, S. A., 2003, 2011

Obra completa: ISBN 978-84-291-5156-5

Edición en papel:

Copyright © Editorial Reverté, S. A., 2003, 2011

Volumen I: ISBN 978-84-291-5157-2

Volumen II: ISBN 978-84-291-5158-9

Edición e-book (PDF):

Copyright © Editorial Reverté, S. A., 2018

Volumen I: ISBN 978-84-291-9421-0

Volumen II: ISBN 978-84-291-9422-7

3ª EDICIÓN ESPAÑOLA

Traducida por:

Dr. Santiago Carrillo Menéndez

Profesor Titular de Estadística e Investigación Operativa
Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Autónoma de Madrid

4ª EDICIÓN ESPAÑOLA

*Actualización a la 4ª edición española correspondiente
a la 8ª edición en inglés y revisión de la obra:*

Dr. Carles Casacuberta Vergés

Catedrático de Geometría y Topología
Departamento de Álgebra y Geometría de la Facultad
de Matemáticas de la Universidad de Barcelona

Propiedad de:

EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Loreto, 13-15, Local B

08029 Barcelona

Tel: (34) 93 419 33 36

reverte@reverte.com

www.reverte.com

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.



Este texto está diseñado para un curso de introducción al Cálculo de una y varias variables. Es un libro de matemáticas en el cual a lo largo de todo el texto se pone énfasis en tres conceptos fundamentales: límite, derivada e integral.

Cuando se preparó la octava edición inglesa (cuarta en lengua española), el objetivo era continuar el estilo y el enfoque que caracterizaron a las ediciones anteriores. Al mismo tiempo se tuvo en cuenta el impacto que los rápidos avances en la tecnología de los ordenadores y los cambios en los planes de estudio de las Matemáticas tienen sobre el estudio del Cálculo. Por lo tanto, este texto evoluciona para adaptarse a las necesidades de los estudiantes.

CARACTERÍSTICAS DE LA OCTAVA EDICIÓN

Precisión y claridad

Se pone énfasis en la exposición matemática: los temas se tratan de una forma comprensible y precisa. Los enunciados matemáticos son cuidados y rigurosos; los conceptos fundamentales y los puntos importantes no quedan ocultos tras un exceso de verbosidad.

Accesibilidad

Este texto es totalmente accesible para los estudiantes que se inician en el Cálculo sin sacrificar el rigor matemático adecuado. Se demuestran los teoremas importantes y se justifican los métodos matemáticos empleados. Los diferentes temas pueden incluirse u omitirse de acuerdo con el nivel teórico deseado en el curso.

Equilibrio entre teoría y aplicaciones

Para poner énfasis en los conceptos básicos del Cálculo, se incluyen problemas imaginativos extraídos de las ciencias físicas. Además, los conceptos y métodos de cálculo se aplican en una variedad de campos de las ciencias, la ingeniería, los negocios y las ciencias sociales en forma de ejemplos y ejercicios. Puesto que la presentación es flexible, los profesores pueden modificar el equilibrio entre teoría y aplicaciones según las necesidades de sus alumnos.

Visualización

Se ha tenido muy en cuenta la importancia de la visualización en el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Por esta razón, más de 1200 ilustraciones acompañan a los ejemplos y ayudan a los estudiantes a resolver los ejercicios.

Tecnología

Los ejemplos basados en tecnologías incluyen numerosos ejercicios que requieren el uso de un programa gráfico (una calculadora gráfica o un programa de ordenador). Más que intentar enseñar una tecnología en particular, se utiliza un enfoque genérico. Este tipo de problemas se señalan claramente con un icono () y se pueden omitir si el profesor prefiere que sus alumnos no utilicen calculadoras ni ordenadores.

Proyectos

Se han integrado al texto nuevos proyectos que ponen énfasis en la resolución de problemas. En estos proyectos se estudian diversos temas especiales que complementan el texto principal. Típicamente, requieren un enfoque que implica tanto teoría como práctica, requieren el uso de calculadora u ordenador y están pensados para facilitar el aprendizaje en grupo.

Introducción temprana de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se introducen en el capítulo 7 en relación con el crecimiento y caída exponencial. Las ecuaciones lineales de primer orden y las ecuaciones separables se tratan en secciones opcionales del capítulo 8 para sacar provecho de su natural asociación con las técnicas de integración. El capítulo 15 incluye una sección opcional sobre las ecuaciones diferenciales exactas donde se relacionan con la reconstrucción de una función a partir de su gradiente.

CAMBIOS EN EL CONTENIDO Y ORGANIZACIÓN DE ESTA EDICIÓN

En un esfuerzo por crear un texto aún más eficaz, se ha consultado a los usuarios de la edición anterior y a otros profesores. A consecuencia de ello, los principales objetivos de esta nueva edición fueron los siguientes:

1. **Reducir la extensión del texto sin sacrificar el contenido esencial.** Se ha conseguido eliminando algunos temas opcionales, reduciendo el tratamiento redundante de temas y combinando algunas secciones.
2. **Agilizar los diferentes grupos de ejercicios.** En cada grupo de ejercicios se evaluó el equilibrio entre los problemas de rutina y aquellos que incluyen aplicaciones o son conceptuales. En la mayoría de los casos se redujo el número de problemas de rutina y se añadieron, donde era apropiado, nuevas aplicaciones o problemas conceptuales.
3. **Mejorar los ejemplos ilustrativos.** Se modificaron muchos ejemplos de la edición anterior y se añadieron otros nuevos a fin de mejorar la comprensión del material por parte de los estudiantes.
4. **Mejorar la exposición y las explicaciones.** Todos los temas se revisaron para intentar mejorar su presentación. Numerosas secciones se volvieron a redactar y muchas otras se mejoraron.

Se realizaron cambios específicos en la organización y contenido de los capítulos para satisfacer las necesidades actuales de los estudiantes y de los profesores. Algunos de estos cambios son los siguientes:

Repaso de precálculo (capítulo 1)

Este material se ha reducido en longitud pero no en el tratamiento de los principales temas. En los ejercicios se ha disminuido el número de problemas de rutina. Los temas “Distancia de un punto a una recta” y “Traslaciones” se tratan ahora en el capítulo 9, junto con las “Secciones cónicas”.

Límites y continuidad (capítulo 2)

La sección de introducción sobre la “Idea de límite” se ha escrito de nuevo. Hay nuevos ejemplos, una breve exposición sobre límites infinitos y una aplicación para hallar la pendiente de la tangente a la gráfica de una función. Ahora también se trata la aplicación del teorema de los valores intermedios para resolver desigualdades; el tema “Método de bisección” se ha convertido en un Proyecto.

Diferenciación y aplicaciones de la derivada (capítulos 3 y 4)

El contenido y organización de estos dos capítulos no ha cambiado. Sin embargo, sí se modificaron numerosos ejemplos y se revisaron los ejercicios.

Integración y aplicaciones de la integral (capítulos 5 y 6)

Parte del material del capítulo 5 se ha reorganizado y redactado de nuevo. El número de secciones se ha reducido al combinar algunas de ellas. El enfoque de la integral definida se ha modificado para incluir tanto las sumas de Riemann como las sumas superiores e inferiores.

Las funciones trascendentes (capítulo 7)

La longitud de este capítulo se redujo por combinación de dos secciones de la edición anterior y eliminando parte del material. La integración de las funciones trigonométricas se trata ahora junto con la función logarítmica. La exposición de las ecuaciones diferenciales separables se ha trasladado al capítulo 8.

Técnicas de integración (capítulo 8)

El material de repaso de la sección 8.1 se ha ampliado para incluir el uso de tablas de integrales. Se ha reducido el tratamiento de los productos y potencias de las funciones trigonométricas; este material se expone ahora en una sola sección. Las sustituciones de racionalización se tratan ahora en una sección opcional. Las secciones opcionales sobre las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y las ecuaciones separables, junto con sus aplicaciones, se han trasladado al capítulo 18.

Secciones cónicas: coordenadas polares; ecuaciones paramétricas (capítulo 9)

La exposición de las secciones cónicas se ha reorganizado; el material se trata ahora en dos secciones, en lugar de la única y larga sección de la edición anterior. El tratamiento de las coordenadas polares se ha reducido combinando las secciones de representación gráfica e intersecciones de curvas polares. Las secciones opcionales sobre cónicas en coordenadas polares y cicloides se han convertido en Proyectos.

Sucesiones y series (capítulos 10 y 11)

Se han vuelto a redactar algunas partes para reducir la longitud total; el material sobre la notación sigma se ha integrado en la introducción a las series infinitas. Se han revisado los ejemplos que ilustran el enfoque mediante las series de Taylor.

Vectores y cálculo vectorial (capítulos 12 y 13)

Los vectores se introducen mediante una breve exposición de las traslaciones, fuerzas y velocidades en secciones separadas sin ejercicios.

Funciones de varias variables, gradientes, valores extremos (capítulos 14 y 15)

La introducción al gradiente y la diferenciabilidad se ha vuelto a escribir, y el cálculo del gradiente a partir de la definición formal se ha reducido. El tratamiento del teorema del valor medio y las reglas de la cadena también se ha reducido; este material se cubre ahora en una sola sección. Los extremos locales y absolutos, así como la prueba de las derivadas parciales segundas se tratan en una sola sección en lugar de las dos que había en la anterior edición. Se incluye una sección opcional sobre ecuaciones diferenciales exactas que antes estaba en el capítulo 18.

Integrales dobles y triples; integrales de línea y de superficie (capítulos 16 y 17)

Las secciones que tratan la integral doble sobre un rectángulo y las integrales dobles sobre una región se han combinado en una sola sección. Se han modificado algunos ejemplos.

Ecuaciones diferenciales (capítulo 18)

Las ecuaciones lineales de primer orden y las ecuaciones separables se han trasladado al capítulo 8; las ecuaciones exactas se tratan en el capítulo 15. Se ha añadido nuevo material sobre métodos numéricos para las ecuaciones de primer orden. El material sobre las ecuaciones no homogéneas de segundo orden se ha vuelto a escribir.

COMPLEMENTOS

Ayudas para el estudiante

Respuestas a los ejercicios de numeración impar Al final del texto se incluyen todas las respuestas a los ejercicios de numeración impar.

Student Solutions Manual, preparado por Bradley E. Garner, University of Houston, y Carrie J. Garner Este manual contiene las soluciones completas de todos los ejercicios de numeración impar.

Ayudas para el profesor

Instructor's Solutions Manual, por Bradley E. Garner, University of Houston, y Carrie J. Garner Este manual contiene las soluciones de todos los problemas del texto.

Text Bank, por Deborah Betthausen Britt Una amplia variedad de problemas y sus soluciones basados en el texto y ejercicios de este libro.

Computerized Text Bank Disponible para las plataformas IBM y Macintosh, este material permite a los profesores crear, personalizar e imprimir un test que contiene una combinación de preguntas extraídas del banco de preguntas. Los profesores también pueden modificar las preguntas existentes y añadir las suyas propias.

Instructor's Resource CD-ROM Este CD-ROM, disponible para las plataformas IBM y Macintosh, incluye el Instructor's Solutions Manual y el Test Bank.

Serie de manuales de tecnología *Getting Started*

Dos tutoriales de introducción ofrecen a los estudiantes un rápido y fácil acceso a la información que necesitan conocer en sus cursos de Cálculo. Los autores proporcionan muchos ejemplos, sugerencias y secciones de preguntas y respuestas dedicadas a resolver los problemas y dudas de los estudiantes. Maple cubre las versiones 3, 4 y 5. Mathematica cubre las versiones 2.0 y 3.0.

- ***Getting Started with Mathematica***, por C-K. Cheung, G. E. Keough, Charles Landraitis y Robert H. Gross del Boston College
- ***Getting Started with Maple***, por C-K. Cheung, G. E. Keough, ambos del Boston College, y Michael May, de la St. Louis University

Estos tutoriales de introducción a las calculadoras gráficas enseñan a los estudiantes la forma de utilizar sus calculadoras como una herramienta en los cursos de Cálculo. Contienen muchos ejemplos, sugerencias y secciones especiales de preguntas y respuestas para resolver problemas y dudas.

- ***Getting Started with the TI-83/82 Graphing Calculator*** por Carl Swenson de la Seattle University
- ***Getting Started with the TI-86/85 Graphing Calculator*** por Carl Swenson de la Seattle University
- ***Getting Started with the TI-92/92 Plus Graphing Calculator*** por Carl Swenson, Brian Hopkins, ambos de la Seattle University

AGRADECIMIENTOS

La revisión de un texto de esta magnitud y complejidad requiere grandes dosis de aliento y ayuda. He sido afortunado al tener un amplio suministro de ambas cosas por parte de muchas fuentes.

Cada edición de este texto se desarrolló a partir de la precedente. El libro actual debe mucho a la gente que contribuyó a las ediciones anteriores, más recientemente, Linda Becerra, University of Houston; Jay Bourland, Colorado State University; Gary Crown, Wichita State University; Stephen Davis, Davidson College; Anthony Dooley, University of New South Wales; William Fox, U.S. Military Academy-West Point; Barbara Gale, Prince Georges Community College; Pamela Gorkin, Bucknell University; Gary Itzkowitz, Rowan College of New Jersey; Harold Jacobs, East Stroudsburg University of Pennsylvania; Adam Lutoborski, Syracuse University; Douglas Mackenzie, University of New South Wales; Katherine Murphy, University of North Carolina-Chapel Hill; Jean E. Rubin, Purdue University; y Stuart Smith, University of Toronto. Estoy en deuda con todos ellos.

Los correctores de la octava edición inglesa me proporcionaron valiosas críticas y sugerencias. Ofrezco sinceramente mi reconocimiento a las siguientes personas:

Mihaly Bakonyi	Nicholas Macri
Georgia State University	Temple University
Edward B. Curtis	James R. McKinney
University of Washington	California State Polytechnic
Kathy Davis	University-Pomona
University of Texas-Austin	Jeff Morgan
Dennis DeTurck	Texas A&M University
University of Pennsylvania	Clifford S. Queen
John R. Durbin	Lehigh University
University of Texas-Austin	Yang Wang
Charles H. Giffen	Georgia Institute of Technology
University of Virginia-Charlottesville	
Michael Kinyon	
Indiana University-South Bend	

Agradezco especialmente a David Bao, University of Houston; Stephen Davis, Davidson College; Dean Hickerson; Adam Lutoborski, Syracuse University; y Yang Wang, Georgia Institute of Technology, quienes leyeron el material e hicieron muchas correcciones y comentarios útiles.

También quiero agradecer a Jun Ma, University of Minnesota, quien resolvió todos los ejercicios y proporcionó soluciones detalladas y las importantes ayudas necesarias en los manuales de soluciones.

Estoy profundamente agradecido con el equipo de John Wiley & Sons. Todas las personas implicadas en este proyecto me han estimulado, ayudado y ofrecido sus consejos profesionales en cada etapa. En particular, Ruth Baruth, Executive Editor, y Nancy Perry, Senior Development Editor, me proporcionaron organización y apoyo cuando los necesité, y ánimos cuando hacía falta. Agradezco especialmente a Suzanne Ingrao, Production Editor, quien paciente e inteligentemente guió el proyecto a través las etapas de producción; Jeanine Furino, Freelance Production Manager, quien dirigió cuidadosamente el proceso de producción; Sigmund Malinowski, Illustration Editor, de cuya creatividad surgió el atractivo diseño del interior y de la cubierta.

Finalmente, quiero agradecer la colaboración de mi esposa, Charlotte; sin su constante apoyo no hubiera podido terminar este trabajo.

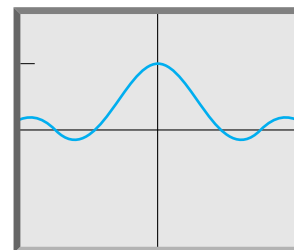
Garret J. Etgen

ÍNDICE ANALÍTICO

VOLUMEN 1

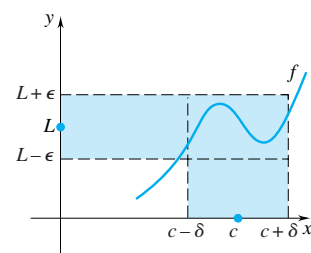
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN1

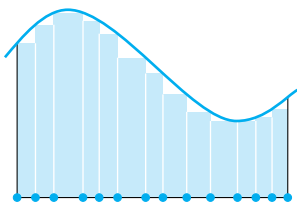
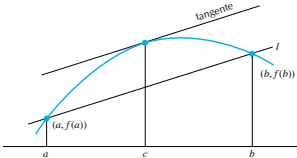
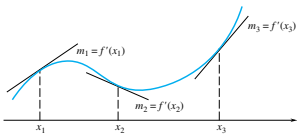
1.1 ¿Qué es el cálculo?	1
1.2 Nociones y fórmulas de la matemática elemental	4
PROYECTO 1.2 Desarrollos decimales y números decimales	12
1.3 Desigualdades	13
1.4 Plano de referencia; geometría analítica	20
1.5 Funciones	28
1.6 Funciones elementales	37
1.7 Combinaciones de funciones	47
PROYECTO 1.7 Funciones inversas	52
1.8 Una observación acerca de la demostración en matemáticas; inducción matemática	53
Temas importantes del capítulo	57



CAPÍTULO 2 LÍMITES Y CONTINUIDAD59

2.1 La noción de límite	59
2.2 Definición de límite	71
PROYECTO 2.2 Hallar un δ para un ϵ dado	80
2.3 Algunos teoremas sobre límites	81
2.4 Continuidad	90
2.5 El teorema de la función intermedia; límites trigonométricos	99
2.6 Dos propiedades básicas de las funciones continuas	106
PROYECTO 2.6 El método de bisección	111
Temas importantes del capítulo	112





CAPÍTULO 3 DIFERENCIACIÓN 115

3.1 La derivada 115

3.2 Algunas fórmulas de diferenciación 127

3.3 La notación d/dx ; derivadas de orden superior 137

 PROYECTO 3.3 Generalización de la regla del producto 143

3.4 La derivada como tasa de variación 144

3.5 La regla de la cadena 155

3.6 Diferenciación de las funciones trigonométricas 163

3.7 Diferenciación implícita; potencias racionales 170

3.8 Tasas de variación por unidad de tiempo 177

 PROYECTO 3.8 Velocidad angular; movimiento circular uniforme 183

3.9 Diferenciales; aproximaciones de Newton-Raphson 184

 PROYECTO 3.9 Puntos fijos 191

Temas importantes del capítulo 192

CAPÍTULO 4 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y APLICACIONES 195

4.1 El teorema del valor medio 195

4.2 Funciones crecientes y decrecientes 201

 PROYECTO 4.2 Energía de un cuerpo en caída libre 208

4.3 Valores extremos locales 209

4.4 Extremos y valores extremos absolutos 217

4.5 Algunos problemas sobre máximos y mínimos 225

 PROYECTO 4.5 Trayectorias de vuelo de pájaros 235

4.6 Concavidad y puntos de inflexión 236

4.7 Asíntotas verticales y horizontales; tangentes verticales y cúspides 240

4.8 Algunos trazados de curvas 247

Temas importantes del capítulo 256

CAPÍTULO 5 INTEGRACIÓN 257

5.1 Integral definida de una función continua 257

 PROYECTO 5.1 Distancia 269

5.2 La función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 269

 PROYECTO 5.2 Funciones representadas por una integral 278

5.3 El teorema fundamental del cálculo integral 278

5.4 Algunos problemas de área 285

5.5 Integrales indefinidas 291

5.6 Cambio de variable 299

5.7 Otras propiedades de la integral definida 308

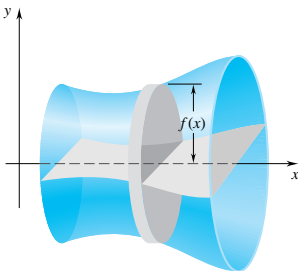
 PROYECTO 5.7 Medias móviles 313

5.8 Teoremas del valor medio para integrales; valor medio o promedio 314

Temas importantes del capítulo 319

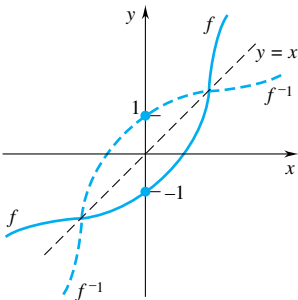
CAPÍTULO 6 ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL321

6.1 Algo más acerca del área321
 PROYECTO 6.1 Distribución de la renta325
6.2 Cálculo de volúmenes por secciones paralelas; discos y arandelas326
6.3 Cálculo de volúmenes por el método de las capas338
6.4 Centroide de una región; teorema de Pappus relativo a volúmenes344
 PROYECTO 6.4 Centroide de un sólido de revolución350
6.5 La noción de trabajo351
6.6 Presión y fuerza de los fluidos358
Temas importantes del capítulo362



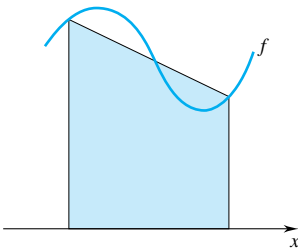
CAPÍTULO 7 FUNCIONES TRASCENDENTES365

7.1 Funciones inyectivas; inversas365
7.2 La función logaritmo, parte I374
7.3 La función logaritmo, parte II382
7.4 La función exponencial392
 PROYECTO 7.4 Estimación del número e 400
7.5 Potencias arbitrarias; otras bases401
7.6 Crecimiento y caída exponencial408
7.7 Funciones trigonométricas inversas417
 PROYECTO 7.7 Refracción429
7.8 Seno y coseno hiperbólicos430
* 7.9 Otras funciones hiperbólicas435
Temas importantes del capítulo439

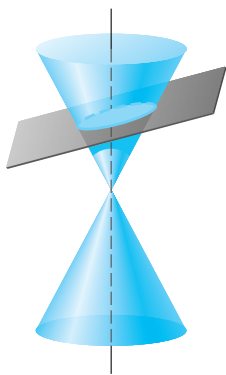


CAPÍTULO 8 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN441

8.1 Tablas de integrales y repaso441
8.2 Integración por partes445
 PROYECTO 8.2 Flujo de renta454
8.3 Potencias y productos de funciones trigonométricas455
8.4 Sustituciones trigonométricas464
8.5 Fracciones simples470
* 8.6 Algunas sustituciones de racionalización479
8.7 Integración numérica482
 PROYECTO 8.7 La función de error491
* 8.8 Ecuaciones diferenciales; ecuaciones lineales de primer orden492
* 8.9 Ecuaciones separables500
Temas importantes del capítulo507



* Secciones opcionales



CAPÍTULO 9 SECCIONES CÓNICAS; COORDENADAS POLARES; ECUACIONES PARAMÉTRICAS 509

9.1 Traslaciones; la parábola 509

9.2 La elipse y la hipérbola 518

9.3 Coordenadas polares 529

9.4 Trazado de gráficas en coordenadas polares 535

 PROYECTO 9.4 Secciones cónicas en coordenadas polares 543

9.5 Área en coordenadas polares 544

9.6 Curvas dadas paramétricamente 549

 PROYECTO 9.6 Trayectorias parabólicas 557

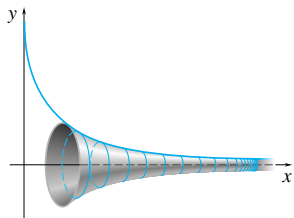
9.7 Tangentes a curvas dadas paramétricamente 558

9.8 Longitud de un arco y velocidad 564

9.9 Área de una superficie de revolución; centroide de una curva; teorema de Pappus para el área de una superficie 573

 PROYECTO 9.9 La cicloide 581

Temas importantes del capítulo 583



CAPÍTULO 10 SUCESIONES; FORMAS INDETERMINADAS; INTEGRALES IMPROPIAS 585

10.1 El axioma del supremo 585

10.2 Sucesiones de números reales 590

10.3 Límite de una sucesión 596

 PROYECTO 10.3 Sucesiones y el método de Newton-Raphson 606

10.4 Algunos límites importantes 608

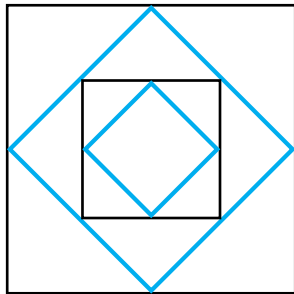
10.5 La forma indeterminada (0/0) 613

10.6 La forma indeterminada (∞/∞); otras formas indeterminadas 618

 PROYECTO 10.6 Formas indeterminadas peculiares 624

10.7 Integrales impropias 625

Temas importantes del capítulo 635



CAPÍTULO 11 SERIES INFINITAS 637

11.1 Series infinitas 637

11.2 El criterio de la integral; teoremas de comparación 648

11.3 Criterio de la raíz y criterio del cociente 656

11.4 Convergencia absoluta y condicional; series alternadas 661

 PROYECTO 11.4 Convergencia de series alternadas 668

11.5 Polinomios de Taylor en x ; series de Taylor en x 668

11.6 Polinomios de Taylor en $x - a$; series de Taylor en $x - a$ 680

11.7 Series de potencias684

11.8 Diferenciación e integración de series de potencias691

 PROYECTO 11.8 Aproximaciones de π 703

11.9 La serie binomial705

Temas importantes del capítulo707

APÉNDICE A ALGUNOS TEMAS ADICIONALESA-1

A.1 Rotación de ejes; ecuaciones de segundo gradoA-1

A.2 Matrices y determinantesA-5

APÉNDICE B ALGUNAS DEMOSTRACIONES ADICIONALESA-9

B.1 El teorema de los valores intermediosA-9

B.2 El teorema de los valores extremos.....A-10

B.3 Funciones inversasA-11

B.4 Integrabilidad de las funciones continuasA-12

B.5 La integral como límite de sumas de RiemannA-15

ÍNDICE ALFABÉTICOI-1

VOLUMEN 2

CAPÍTULO 12 VECTORES709

12.1 Coordenadas cartesianas en el espacio709

12.2 Traslaciones; fuerzas y velocidades714

12.3 Vectores717

12.4 El producto escalar728

 PROYECTO 12.4 Trabajo738

12.5 El producto vectorial739

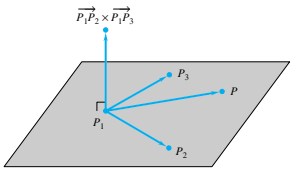
 PROYECTO 12.5 Momento748

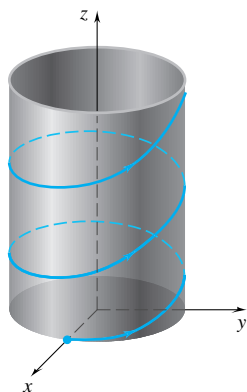
12.6 Rectas749

12.7 Planos757

 PROYECTO 12.7 Algo de geometría con métodos vectoriales768

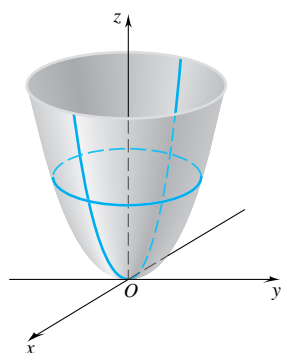
Temas importantes del capítulo769





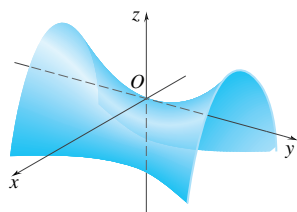
CAPÍTULO 13 CÁLCULO VECTORIAL 771

13.1	Funciones vectoriales	771
13.2	Fórmulas de diferenciación	780
13.3	Curvas	785
13.4	Longitud de un arco	794
13.5	Movimiento curvilíneo; cálculo vectorial en mecánica	800
* 13.6	El movimiento planetario	812
13.7	Curvatura	817
	PROYECTO 13.7 Curvas de transición	825
	Temas importantes del capítulo	825



CAPÍTULO 14 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 827

14.1	Ejemplos elementales	827
14.2	Breve catálogo de superficies cuádricas; proyecciones	831
14.3	Gráficas; curvas de nivel y superficies de nivel	837
	PROYECTO 14.3 Curvas de nivel y superficies	846
14.4	Derivadas parciales	847
14.5	Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados	854
14.6	Límites y continuidad; igualdad de las derivadas parciales mixtas	858
	PROYECTO 14.6 Ecuaciones en derivadas parciales	867
	Temas importantes del capítulo	868



CAPÍTULO 15 GRADIENTES; VALORES EXTREMOS; DIFERENCIALES 871

15.1	Diferenciabilidad y gradiente	871
	PROYECTO 15.1 Puntos en los que $\nabla f = 0$	878
15.2	Gradientes y derivadas direccionales	880
15.3	El teorema del valor medio; reglas de la cadena	890
15.4	El gradiente como normal; rectas tangentes y planos tangentes	904
15.5	Valores máximos y mínimos	914
15.6	Máximos y mínimos condicionados	926
	PROYECTO 15.6 Máximos y mínimos con dos condiciones de ligadura	934
15.7	Diferenciales	935
15.8	Reconstrucción de una función a partir de su gradiente	940
* 15.9	Ecuaciones diferenciales exactas	947
	Temas importantes del capítulo	952

CAPÍTULO 16 INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES955

16.1 Notación de sumatorio múltiple955

16.2 Integrales dobles958

16.3 Cálculo de integrales dobles por integraciones sucesivas970

PROYECTO 16.3 Métodos numéricos para integrales dobles981

16.4 La integral doble como límite de sumas de Riemann; coordenadas polares ..983

* 16.5 Algunas aplicaciones de la integración doble989

16.6 Integrales triples997

16.7 Reducción a integrales iteradas1003

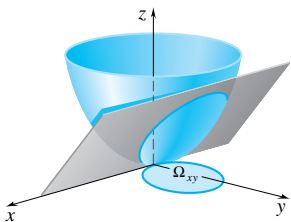
16.8 Coordenadas cilíndricas1012

16.9 La integral triple como límite de sumas de Riemann; coordenadas esféricas ... 1018

16.10 Jacobianos; cambio de variables en integrales múltiples1026

PROYECTO 16.10 Coordenadas polares generalizadas1031

Temas importantes del capítulo1031



CAPÍTULO 17 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE1033

17.1 Integrales de línea1034

17.2 Teorema fundamental de las integrales de línea1042

* 17.3 Fórmula trabajo-energía; conservación de la energía mecánica1047

17.4 Otra notación para las integrales de línea; integrales de línea con respecto a la longitud de arco1050

17.5 El teorema de Green1056

PROYECTO 17.5 El folio de Descartes1065

17.6 Superficies parametrizadas; área de una superficie1067

17.7 Integrales de superficie1078

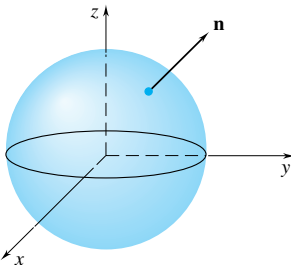
17.8 El operador diferencial vectorial ∇ 1089

17.9 El teorema de la divergencia1095

PROYECTO 17.9 Cargas estáticas1101

17.10 El teorema de Stokes1101

Temas importantes del capítulo1109



CAPÍTULO 18 ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES1111

18.1 Introducción1111

18.2 Ecuaciones diferenciales de primer orden; métodos numéricos1116

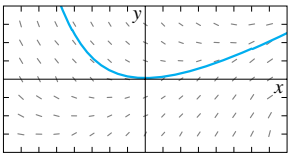
PROYECTO 18.2 Campos de direcciones1124

18.3 La ecuación $y'' + ay' + by = 0$ 1125

18.4 La ecuación $y'' + ay' + by = \phi(x)$ 1134

18.5 Vibraciones mecánicas1144

Temas importantes del capítulo1154



APÉNDICE A ALGUNOS TEMAS ADICIONALESA-1**A.1 Rotación de ejes; ecuaciones de segundo grado A-1****A.2 Matrices y determinantes A-5****APÉNDICE B ALGUNAS DEMOSTRACIONES ADICIONALESA-9****B.1 El teorema de los valores intermedios A-9****B.2 El teorema de los valores extremos A-10****B.3 Funciones inversas A-11****B.4 Integrabilidad de las funciones continuas A-12****B.5 La integral como límite de sumas de Riemann A-15****RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS DE NUMERACIÓN IMPARA-17****ÍNDICE ALFABÉTICO..... I-1**

SALAS

HILLE

ETGEN

CALCULUS

UNA Y VARIAS VARIABLES

VECTORES

12

12.1 COORDENADAS CARTESIANAS EN EL ESPACIO

Para establecer un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional, partimos de un sistema de coordenadas cartesianas $O-xy$ en el plano. Por el punto O , que seguimos llamando el origen, trazamos una recta que sea perpendicular a las otras dos. A esta tercera recta la llamamos eje z . La transformamos en un eje de coordenadas usando la misma escala que en los otros dos ejes y asignando la coordenada $z = 0$ al origen.

Por conveniencia ulterior, orientamos el eje z de tal manera que $O-xyz$ forme un sistema “orientado positivamente”. Es decir, que si el índice de la mano derecha apunta en la dirección de las x positivas y el dedo medio de la misma mano apunta en la dirección de las y positivas, el pulgar señalará en la dirección de las z positivas. (Ver la figura 12.1.1.)

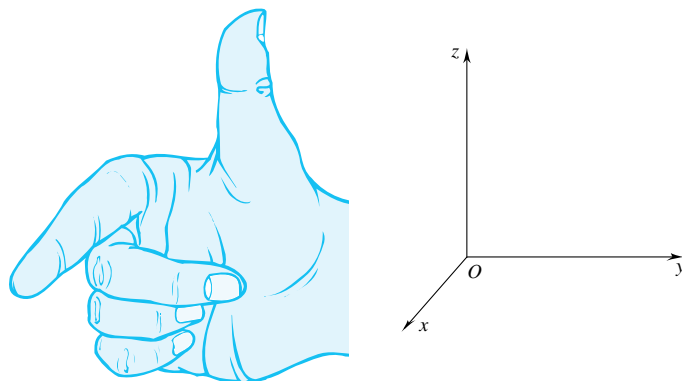


Figura 12.1.1

Los planos determinados por los ejes x y y , los ejes x y z y los ejes y y z se llaman *planos de coordenadas*. Nos referiremos a ellos como el *plano xy* , el *plano xz* y el *plano yz* , respectivamente. Si P es un punto arbitrario del espacio, entonces el plano que pasa por P y es paralelo al plano yz cortará al eje x en un punto x_0 ; análogamente, el plano que pasa por P y es paralelo al plano xz cortará al eje y en un punto y_0 y el plano que pasa por P y es paralelo al plano xy cortará al eje z en un punto z_0 . Asociaremos al punto P la terna ordenada de números (x_0, y_0, z_0) , que llamaremos *coordenadas*.

nadas espaciales cartesianas (o *rectangulares*), o simplemente las *coordenadas espaciales* de P . En particular, el punto del eje x cuya coordenada es x_0 posee las coordenadas espaciales $(x_0, 0, 0)$; el punto del eje y cuya coordenada es y_0 posee las coordenadas espaciales $(0, y_0, 0)$ y el punto del eje z cuya coordenada es z_0 posee las coordenadas espaciales $(0, 0, z_0)$. (Ver la figura 12.1.2.)

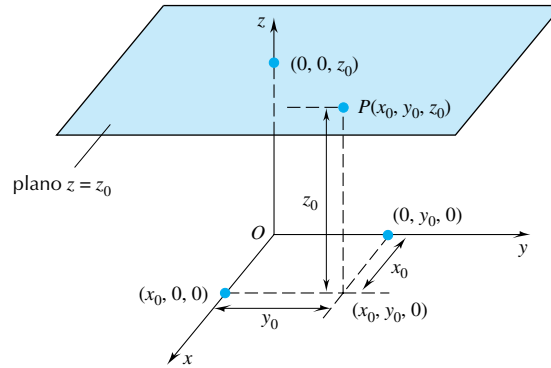


Figura 12.1.2

Un punto está sobre el plano xy sii es de la forma $(x, y, 0)$. Luego una ecuación del plano xy es $z = 0$. La ecuación

$$z = z_0$$

representa un plano paralelo al plano xy , situado z_0 unidades por encima del plano xy cuando z_0 es positivo y $|z_0|$ unidades por debajo del plano xy cuando z_0 es negativo. De manera análoga, las ecuaciones de la forma $x = x_0$ (con x_0 constante) representan planos paralelos al plano yz y las ecuaciones de la forma $y = y_0$ (con y_0 constante) representan planos paralelos al plano xz . (Ver, por ejemplo, la figura 12.1.3. En este caso hemos representado los planos $x = 1$ e $y = 3$.)

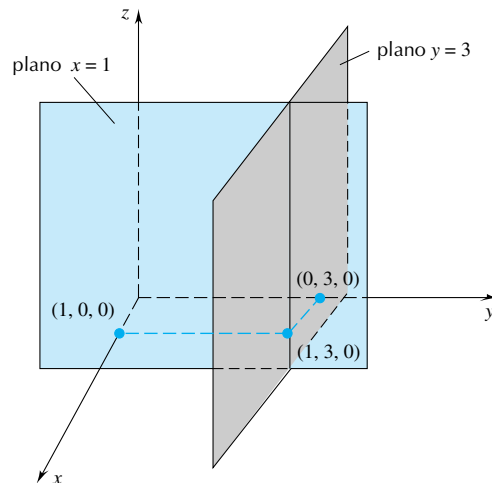


Figura 12.1.3

La fórmula de la distancia

La distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ puede hallarse aplicando dos veces el teorema de Pitágoras. Con Q y R como en la figura 12.1.4, P_1P_2R y P_1RQ son ambos triángulos rectángulos. Utilizando el primer triángulo, obtenemos

$$[d(P_1, P_2)]^2 = [d(P_1, R)]^2 + [d(R, P_2)]^2$$

y utilizando el segundo

$$[d(P_1, R)]^2 = [d(Q, R)]^2 + [d(P_1, Q)]^2.$$

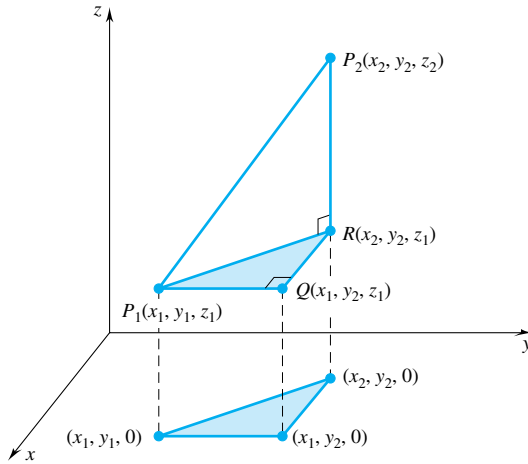


Figura 12.1.4

Combinando las igualdades anteriores, resulta

$$\begin{aligned} [d(P_1, P_2)]^2 &= [d(Q, R)]^2 + [d(P_1, Q)]^2 + [d(R, P_2)]^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

Tomando raíces cuadradas, obtenemos la fórmula de la distancia:

$$(12.1.1) \quad d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

La *esfera* de radio r y centro en $P_0(a, b, c)$ es el conjunto de los puntos $P(x, y, z)$ tales que $d(P, P_0) = r$. Podemos obtener la ecuación de esa esfera a partir de (12.1.1):

$$(12.1.2) \quad \text{Ecuación de una esfera: } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Ver la figura 12.1.5. La ecuación de la esfera de radio r centrada en el origen es

$$(12.1.3) \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

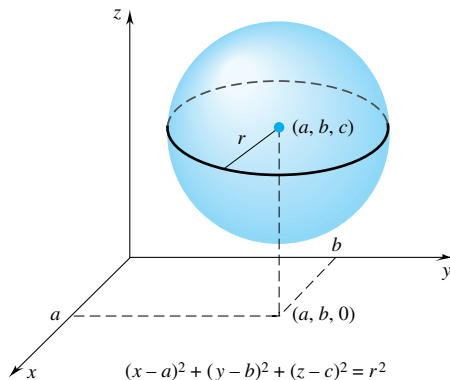


Figura 12.1.5

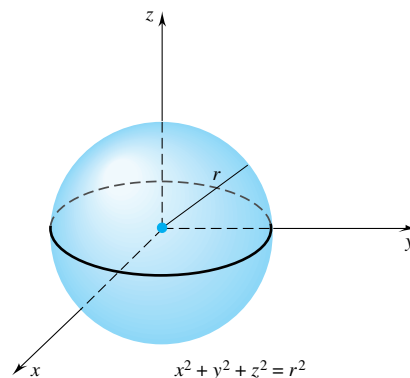


Figura 12.1.6

Ver la figura 12.1.6.

Ejemplo 1 La ecuación de la esfera de radio 3 y centro $(5, -2, 0)$ es

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9.$$

Ejemplo 2 Demostrar que

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y - 4z = 11$$

es la ecuación de una esfera. Hallar su centro y su radio.

Solución Escribimos la ecuación como

$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 2y) + (z^2 - 4z) = 11$$

y completamos cuadrados. El resultado es

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 4z + 4) = 11 + 9 + 1 + 4 = 25$$

o bien

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 25.$$

El centro de la esfera es $(-3, -1, 2)$ y su radio es $r = 5$.

Simetría

El lector ya debe estar familiarizado con dos tipos de simetría. En primer lugar, la simetría respecto a un punto: por ejemplo, los extremos de un segmento son simétricos respecto al punto medio del segmento (12.1.7a); la gráfica de una función impar $y = f(x)$ es simétrica respecto al origen. En segundo lugar, la simetría respecto a una recta (figura 12.1.7b): la gráfica de una función par $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje y ; si f y f^{-1} son funciones inversas, entonces sus gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$. En el espacio, podemos considerar también la simetría respecto a un plano. La idea se ilustra en la figura 12.1.7c.

Los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ del segmento $\overline{P_1P_2}$ son simétricos respecto al punto medio del segmento:

$$(12.1.4) \quad \text{Fórmula del punto medio: } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

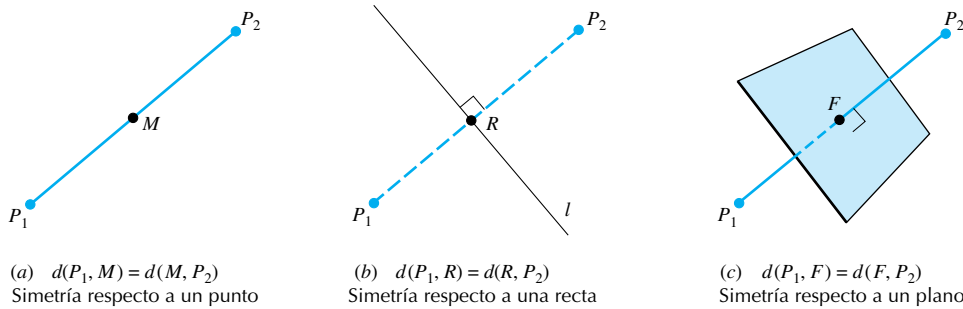


Figura 12.1.7

EJERCICIOS 12.1

Representar los puntos A y B en un sistema de coordenadas orientado positivamente. Calcular entonces la longitud del segmento $\overline{AB}$ y hallar su punto medio.

1. $A(2, 0, 0)$, $B(0, 0, -4)$.
2. $A(0, -2, 0)$, $B(0, 0, 6)$.
3. $A(0, -2, 5)$, $B(4, 1, 0)$.
4. $A(4, 3, 0)$, $B(-2, 0, 6)$.

Hallar la ecuación del plano que pasa por $(3, 1, -2)$ y satisface la condición dada.

5. Paralelo al plano xy .
6. Paralelo al plano xz .
7. Perpendicular al eje y .
8. Perpendicular al eje z .
9. Paralelo al plano yz .
10. Perpendicular al eje x .

Hallar la ecuación de la esfera que satisface las condiciones dadas.

11. Centro en $(0, 2, -1)$ y radio 3.
12. Centro en $(1, 0, -2)$ y radio 4.
13. Centro en $(2, 4, -4)$ y que pase por el origen.
14. Centro en el origen y que pase por $(1, -2, 2)$.
15. El segmento de recta que une $(0, 4, 2)$ y $(6, 0, 2)$ es un diámetro.
16. Centro en $(2, 3, -4)$ y tangente al plano xy .
17. Centro en $(2, 3, -4)$ y tangente al plano $x = 7$.
18. Centro en $(2, 3, -4)$ y tangente al plano $y = 1$.

Demostrar que la ecuación dada es la ecuación de una esfera y hallar su centro y su radio.

19. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 2z + 5 = 0$.
20. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 12x - 6z + 3 = 0$.

Los puntos $P(a, b, c)$ y $Q(2, 3, 5)$ son simétricos en el sentido que se indica. Hallar a, b, c .

21. Respecto del plano xy .
22. Respecto del plano xz .
23. Respecto del plano yz .
24. Respecto del eje x .
25. Respecto del eje y .
26. Respecto del eje z .

27. Respecto del origen.
28. Respecto del plano $x = 1$.
29. Respecto del plano $y = -1$.
30. Respecto del plano $z = 4$.
31. Respecto del punto $(0, 2, 1)$.
32. Respecto del punto $(4, 0, 1)$.
33. Hallar la ecuación de cada una de las esferas que pasen por el punto $(5, 1, 4)$ y sean tangentes a los tres planos coordenados.
34. Hallar la ecuación de la mayor esfera que tenga su centro en $(2, 1, -2)$ y corte a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
35. ¿Es la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 6z + 20 = 0$ la ecuación de una esfera? En caso afirmativo, hallar su centro y su radio. En caso negativo, explicar por qué no lo es.

36. Imponer condiciones sobre A, B, C, D para que la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

represente a una esfera.

37. Demostrar que los puntos $P(1, 2, 3)$, $Q(4, -5, 2)$ y $R(0, 0, 0)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
38. Los puntos $(5, -1, 3)$, $(4, 2, 1)$ y $(2, 1, 0)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo PQR . Hallar los vértices P, Q y R de ese triángulo.

En los ejercicios siguientes, el punto R está en el segmento que une los puntos $P(a_1, a_2, a_3)$ y $Q(b_1, b_2, b_3)$.

39. (a) Hallar las coordenadas de R suponiendo que

$$d(P, R) = t d(P, Q) \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 1.$$

- (b) Determinar el valor de t para que R sea el punto medio de $\overline{PQ}$.

40. (a) Hallar las coordenadas de R suponiendo que

$$d(P, R) = r d(R, Q) \quad \text{donde } r > 0.$$

- (b) Determinar el valor de r para que R sea el punto medio de $\overline{PQ}$.

12.2 TRASLACIONES; FUERZAS Y VELOCIDADES

Traslaciones

Nuestro objetivo aquí es justificar la introducción de la noción de “vector”, el tema principal de este capítulo. Una lectura rápida de esta sección será suficiente.

Una *traslación* a lo largo de una recta puede caracterizarse mediante un número real y representarse mediante una flecha. Para una traslación de a_1 unidades podemos usar el número a_1 y una flecha que parta de cualquier número x y acabe en $x + a_1$. Si $a_1 > 0$, la flecha apuntará hacia la derecha, según el convenio habitual, y si $a_1 < 0$, la flecha apuntará hacia la izquierda (figura 12.2.1). El *módulo* de la traslación a_1 se define como la longitud de la flecha, que coincide con la distancia entre los puntos x y $x + a_1$. Así pues, el módulo de la traslación a_1 es igual a $|a_1|$.



Figura 12.2.1

Las traslaciones en el plano son más interesantes. En lugar de tener dos posibles direcciones, existe una infinidad de direcciones posibles. La figura 12.2.2 muestra varias traslaciones a partir de un punto (x, y) . Las traslaciones del plano se describen mediante pares ordenados de números reales. El módulo de una traslación (a_1, a_2) es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, que es la distancia entre los puntos (x, y) y $(x + a_1, y + a_2)$.

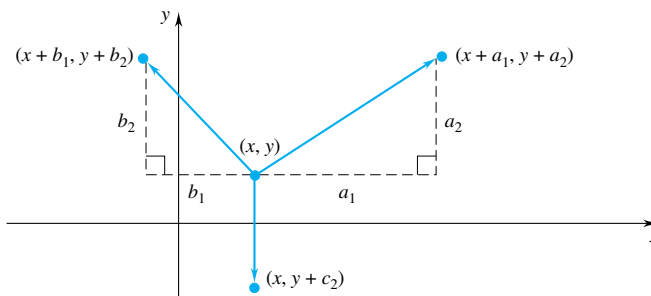


Figura 12.2.2

A continuación vamos a considerar traslaciones en el espacio tridimensional, lo cual exige el uso de ternas ordenadas de números reales. Una traslación de a_1 unidades en la dirección del eje x , a_2 unidades en la dirección del eje y y a_3 unidades en la dirección del eje z puede representarse mediante una flecha que empiece en un punto arbitrario (x, y, z) y termine en el punto $(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$. Esa traslación vendrá descrita por la terna ordenada (a_1, a_2, a_3) . (Ver la figura 12.2.3.) El módulo de la traslación (a_1, a_2, a_3) es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Observación Como se habrá podido notar, hemos dejado aparte las traslaciones de módulo 0 en los ejemplos precedentes. En el caso del espacio tridimensional, una traslación de módulo 0 está descrita por la terna ordenada $(0, 0, 0)$, que denotaremos por $\mathbf{0}$. A esta traslación no se le asigna ninguna dirección, por lo que no usaremos ninguna flecha para representarla. Como ve-

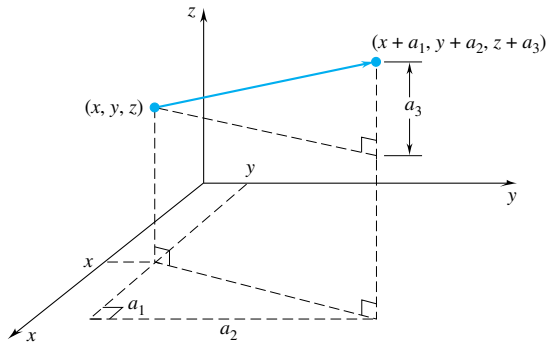


Figura 12.2.3

remos más adelante, la terna ordenada $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ aparece a menudo en el estudio de los vectores y tendremos que comentarla más en la próxima sección.

Las traslaciones se pueden componer. Una traslación (a_1, a_2, a_3) seguida por otra traslación (b_1, b_2, b_3) da como resultado una traslación $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Podemos expresar este hecho escribiendo

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Podemos representar la primera traslación mediante una flecha que parta de algún punto $P(x, y, z)$ y llegue hasta

$$Q(x + a_1, y + a_2, z + a_3).$$

La segunda traslación también puede representarse mediante una flecha que parta de $Q(x + a_1, y + a_2, z + a_3)$ y llegue hasta

$$R(x + a_1 + b_1, y + a_2 + b_2, z + a_3 + b_3).$$

Por consiguiente, podemos representar la traslación resultante mediante una flecha desde $P(x, y, z)$ hasta

$$R(x + a_1 + b_1, y + a_2 + b_2, z + a_3 + b_3).$$

Las tres flechas forman entonces un triángulo fácil de recordar (figura 12.2.4):

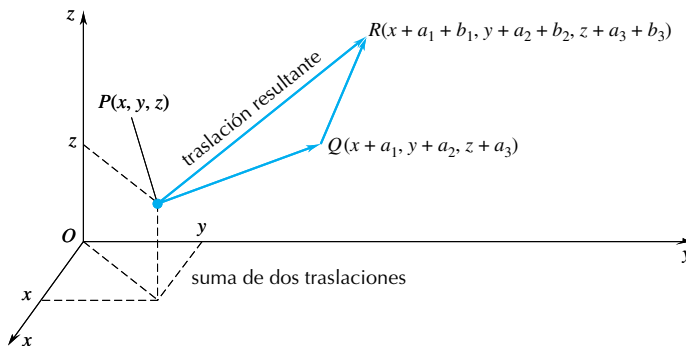


Figura 12.2.4

Con una traslación (a_1, a_2, a_3) y un número real α podemos formar una nueva traslación $(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$. Interpretaremos esta nueva traslación como α veces la traslación inicial y escribiremos

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

El efecto de multiplicar una traslación por un número α es un cambio en el módulo de la traslación en un factor $|\alpha|$:

$$\sqrt{(\alpha a_1)^2 + (\alpha a_2)^2 + (\alpha a_3)^2} = \sqrt{\alpha^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = |\alpha| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

conservando el mismo sentido si $\alpha > 0$, pero invirtiéndolo si $\alpha < 0$. [Si $\alpha = 0$, entonces $0(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$.] La traslación

$$2(a_1, a_2, a_3) = (2a_1, 2a_2, 2a_3)$$

es dos veces más larga que (a_1, a_2, a_3) y tiene el mismo sentido que ella; la traslación

$$-(a_1, a_2, a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

tiene la misma longitud que (a_1, a_2, a_3) y sentido opuesto; la traslación

$$-\frac{3}{2}(a_1, a_2, a_3) = (-\frac{3}{2}a_1, -\frac{3}{2}a_2, -\frac{3}{2}a_3)$$

es una vez y media más larga que (a_1, a_2, a_3) y tiene sentido opuesto (figura 12.2.5).

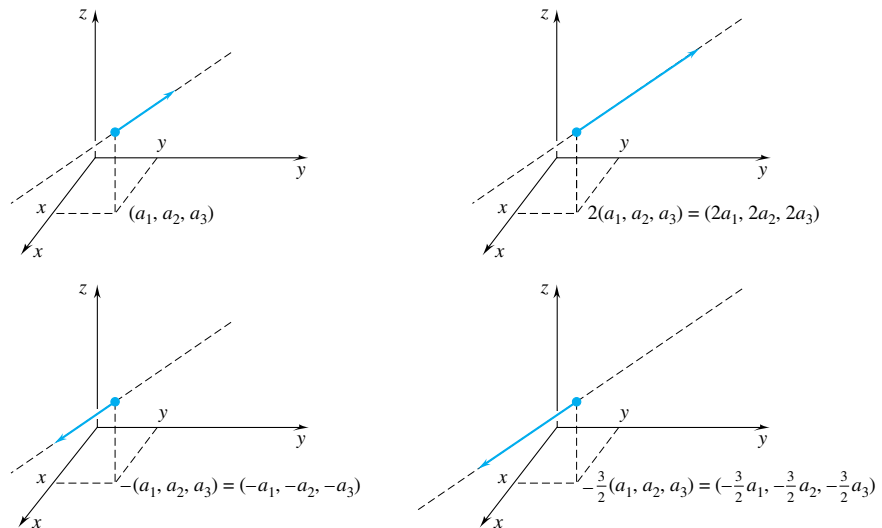


Figura 12.2.5

Fuerzas y velocidades

Hemos visto que una traslación (no nula) es una magnitud que posee dirección y módulo. Las traslaciones aparecen en contextos muy variados. Por ejemplo, cuando se estudia el movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta, su *velocidad* en un instante t puede representarse mediante una flecha dirigida en el sentido del movimiento. La longitud de esa flecha representará la rapidez con que se mueve el objeto. La *fuerza* y la *aceleración* también poseen