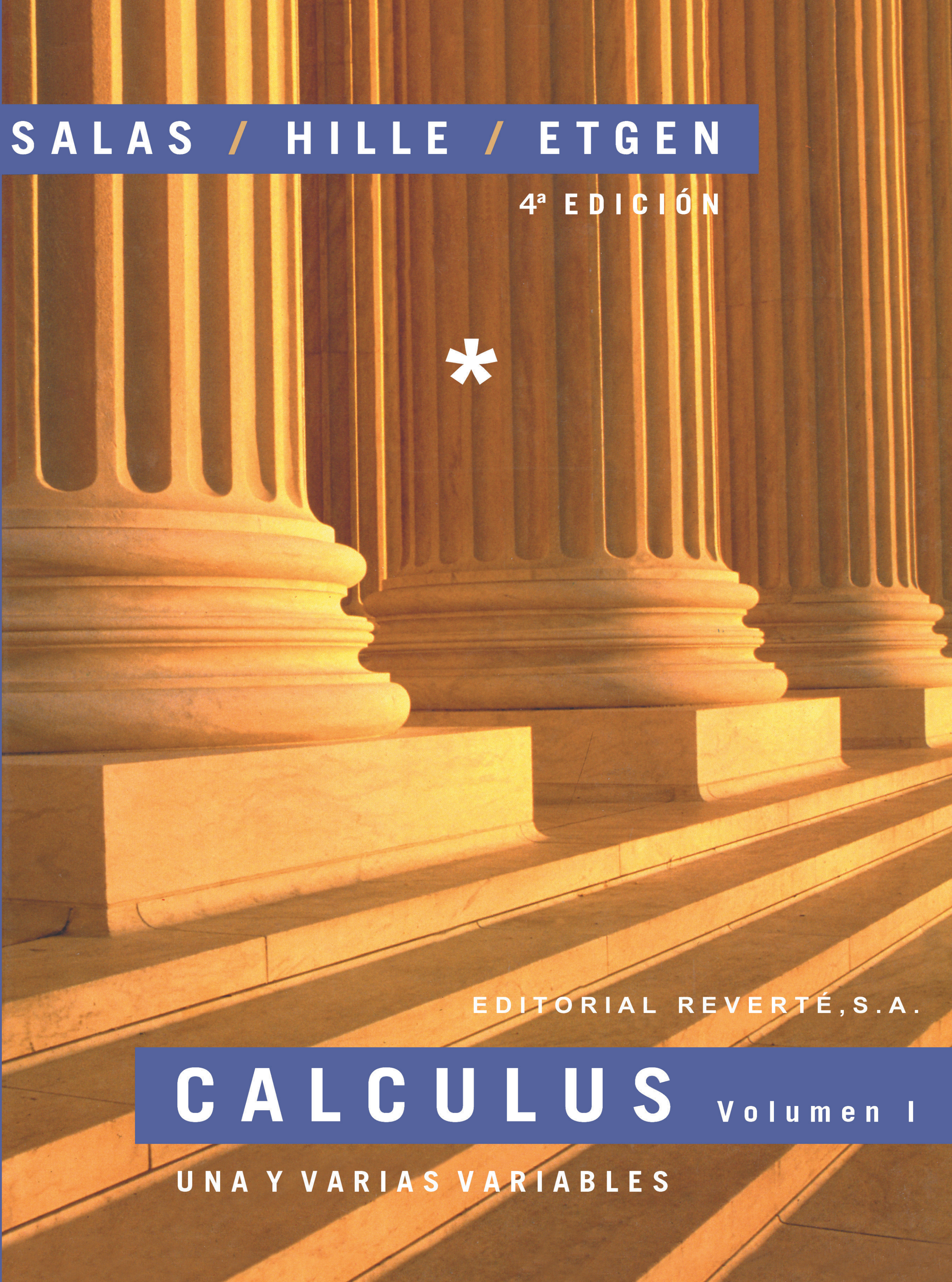


SALAS / HILLE / ETGEN

4ª EDICIÓN

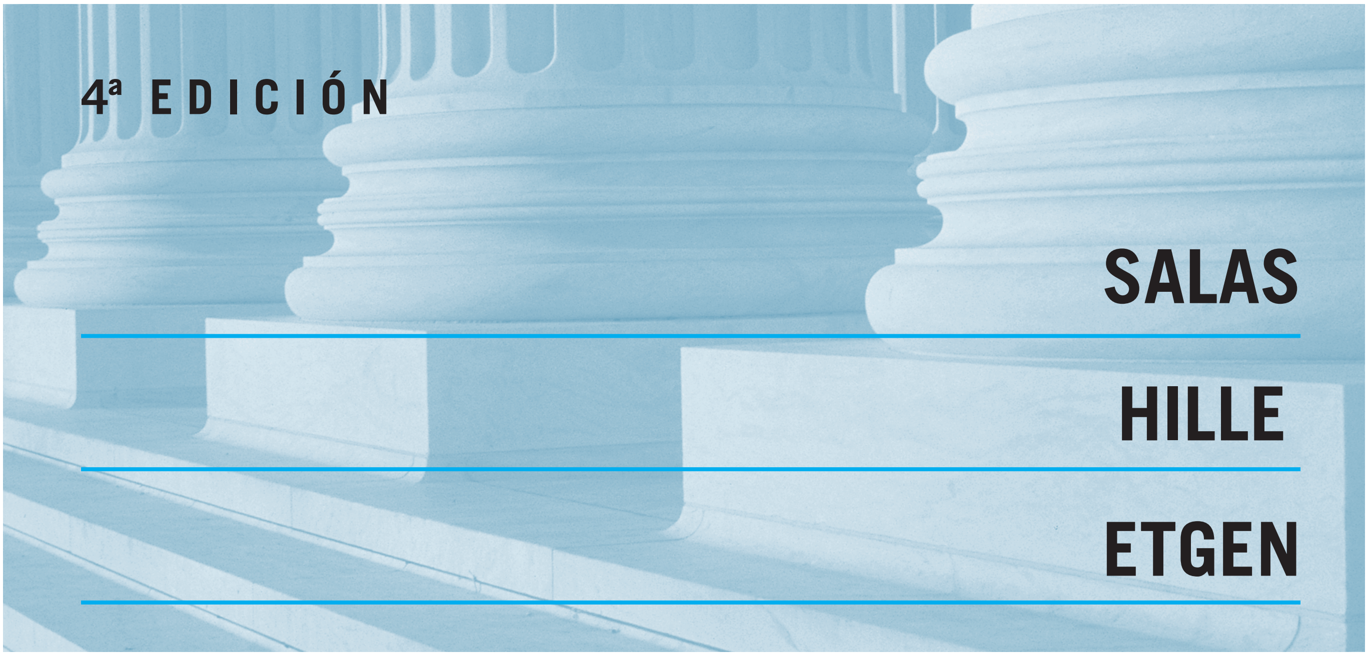
*

EDITORIAL REVERTÉ, S.A.

CALCULUS

Volumen I

UNA Y VARIAS VARIABLES



4ª EDICIÓN

SALAS

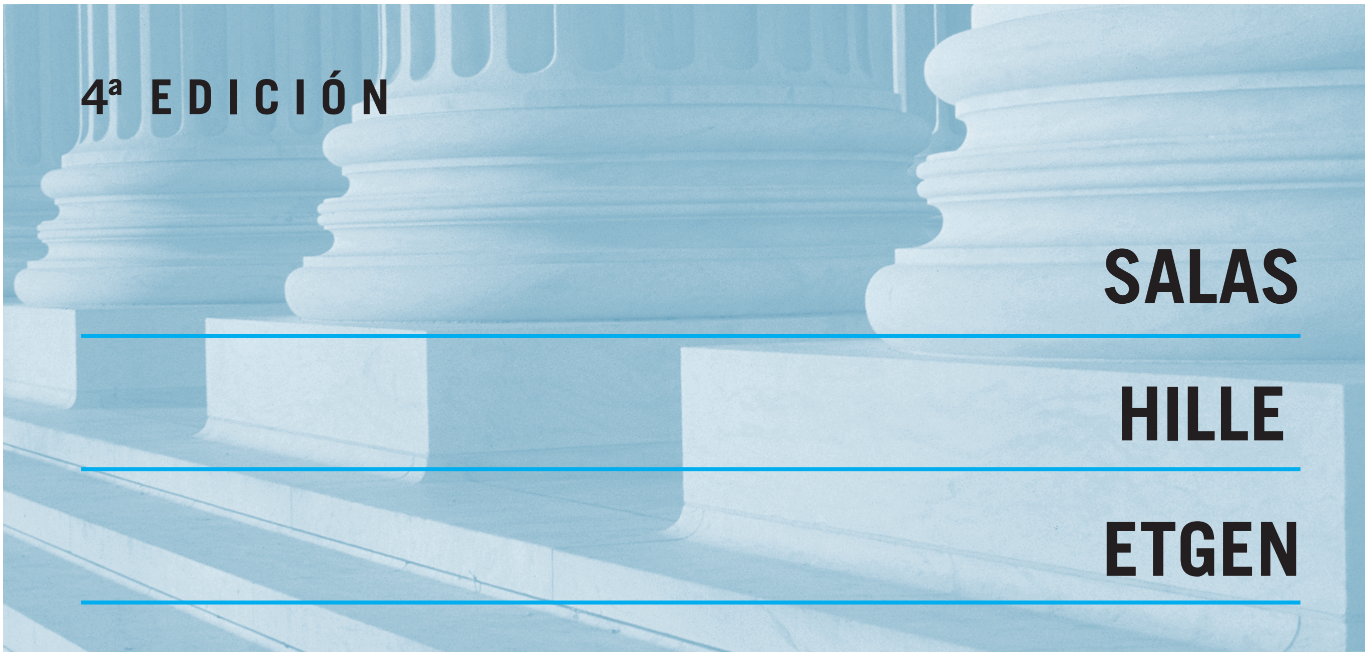
HILLE

ETGEN

CALCULUS

UNA Y VARIAS VARIABLES

Volumen I



4ª EDICIÓN

SALAS

HILLE

ETGEN

CALCULUS

UNA Y VARIAS VARIABLES

Volumen I

EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · Caracas · México

Título de la obra original:

Calculus. One and Several Variables, 8th Edition.

Edición original en lengua inglesa publicada por:

John Wiley & Sons, Inc., New York.

Edición en español

Obra completa: ISBN 978-84-291-5156-5

Edición en papel:

Volumen I: ISBN 978-84-291-5157-2
Volumen II: ISBN 978-84-291-5158-9

Edición e-book (PDF):

Volumen I: ISBN 978-84-291-9421-0
Volumen II: ISBN 978-84-291-9422-7

3ª EDICIÓN ESPAÑOLA
Traducida por:
Dr. Santiago Carrillo Menéndez
Profesor Titular de Estadística e Investigación Operativa
Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias
de la Universidad Autónoma de Madrid

4ª EDICIÓN ESPAÑOLA
Actualización a la 4ª edición española correspondiente
a la 8ª edición en inglés y revisión de la obra:
Dr. Carles Casacuberta Vergés
Catedrático de Geometría y Topología
Departamento de Álgebra y Geometría de la Facultad
de Matemáticas de la Universidad de Barcelona

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
reverte@reverte.com
www.reverte.com

630

Prefacio

Este texto está diseñado para un curso de introducción al Cálculo de una y varias variables. Es un libro de matemáticas en el cual a lo largo de todo el texto se pone énfasis en tres conceptos fundamentales: límite, derivada e integral.

Cuando se preparó la octava edición inglesa (cuarta en lengua española), el objetivo era continuar el estilo y el enfoque que caracterizaron a las ediciones anteriores. Al mismo tiempo se tuvo en cuenta el impacto que los rápidos avances en la tecnología de los ordenadores y los cambios en los planes de estudio de las Matemáticas tienen sobre el estudio del Cálculo. Por lo tanto, este texto evoluciona para adaptarse a las necesidades de los estudiantes.

CARACTERÍSTICAS DE LA OCTAVA EDICIÓN

Precisión y claridad

Se pone énfasis en la exposición matemática: los temas se tratan de una forma comprensible y precisa. Los enunciados matemáticos son cuidados y rigurosos; los conceptos fundamentales y los puntos importantes no quedan ocultos tras un exceso de verbosidad.

Accesibilidad

Este texto es totalmente accesible para los estudiantes que se inician en el Cálculo sin sacrificar el rigor matemático adecuado. Se demuestran los teoremas importantes y se justifican los métodos matemáticos empleados. Los diferentes temas pueden incluirse u omitirse de acuerdo con el nivel teórico deseado en el curso.

Equilibrio entre teoría y aplicaciones

Para poner énfasis en los conceptos básicos del Cálculo, se incluyen problemas imaginativos extraídos de las ciencias físicas. Además, los conceptos y métodos de cálculo se aplican en una variedad de campos de las ciencias, la ingeniería, los negocios y las ciencias sociales en forma de ejemplos y ejercicios. Puesto que la presentación es flexible, los profesores pueden modificar el equilibrio entre teoría y aplicaciones según las necesidades de sus alumnos.

Visualización

Se ha tenido muy en cuenta la importancia de la visualización en el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Por esta razón, más de 1200 ilustraciones acompañan a los ejemplos y ayudan a los estudiantes a resolver los ejercicios.

Tecnología

Los ejemplos basados en tecnologías incluyen numerosos ejercicios que requieren el uso de un programa gráfico (una calculadora gráfica o un programa de ordenador). Más que intentar enseñar una tecnología en particular, se utiliza un enfoque genérico. Este tipo de problemas se señalan claramente con un icono ( ) y se pueden omitir si el profesor prefiere que sus alumnos no utilicen calculadoras ni ordenadores.

Proyectos

Se han integrado al texto nuevos proyectos que ponen énfasis en la resolución de problemas. En estos proyectos se estudian diversos temas especiales que complementan el texto principal. Típicamente, requieren un enfoque que implica tanto teoría como práctica, requieren el uso de calculadora u ordenador y están pensados para facilitar el aprendizaje en grupo.

Introducción temprana de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se introducen en el capítulo 7 en relación con el crecimiento y caída exponencial. Las ecuaciones lineales de primer orden y las ecuaciones separables se tratan en secciones opcionales del capítulo 8 para sacar provecho de su natural asociación con las técnicas de integración. El capítulo 15 incluye una sección opcional sobre las ecuaciones diferenciales exactas donde se relacionan con la reconstrucción de una función a partir de su gradiente.

CAMBIOS EN EL CONTENIDO Y ORGANIZACIÓN DE ESTA EDICIÓN

En un esfuerzo por crear un texto aún más eficaz, se ha consultado a los usuarios de la edición anterior y a otros profesores. A consecuencia de ello, los principales objetivos de esta nueva edición fueron los siguientes:

1. **Reducir la extensión del texto sin sacrificar el contenido esencial.** Se ha conseguido eliminando algunos temas opcionales, reduciendo el tratamiento redundante de temas y combinando algunas secciones.
2. **Agilizar los diferentes grupos de ejercicios.** En cada grupo de ejercicios se evaluó el equilibrio entre los problemas de rutina y aquellos que incluyen aplicaciones o son conceptuales. En la mayoría de los casos se redujo el número de problemas de rutina y se añadieron, donde era apropiado, nuevas aplicaciones o problemas conceptuales.
3. **Mejorar los ejemplos ilustrativos.** Se modificaron muchos ejemplos de la edición anterior y se añadieron otros nuevos a fin de mejorar la comprensión del material por parte de los estudiantes.
4. **Mejorar la exposición y las explicaciones.** Todos los temas se revisaron para intentar mejorar su presentación. Numerosas secciones se volvieron a redactar y muchas otras se mejoraron.

Se realizaron cambios específicos en la organización y contenido de los capítulos para satisfacer las necesidades actuales de los estudiantes y de los profesores. Algunos de estos cambios son los siguientes:

Repaso de precálculo (capítulo 1)

Este material se ha reducido en longitud pero no en el tratamiento de los principales temas. En los ejercicios se ha disminuido el número de problemas de rutina. Los temas “Distancia de un punto a una recta” y “Traslaciones” se tratan ahora en el capítulo 9, junto con las “Secciones cónicas”.

Límites y continuidad (capítulo 2)

La sección de introducción sobre la "Idea de límite" se ha escrito de nuevo. Hay nuevos ejemplos, una breve exposición sobre límites infinitos y una aplicación para hallar la pendiente de la tangente a la gráfica de una función. Ahora también se trata la aplicación del teorema de los valores intermedios para resolver desigualdades; el tema "Método de bisección" se ha convertido en un Proyecto.

Diferenciación y aplicaciones de la derivada (capítulos 3 y 4)

El contenido y organización de estos dos capítulos no ha cambiado. Sin embargo, sí se modificaron numerosos ejemplos y se revisaron los ejercicios.

Integración y aplicaciones de la integral (capítulos 5 y 6)

Parte del material del capítulo 5 se ha reorganizado y redactado de nuevo. El número de secciones se ha reducido al combinar algunas de ellas. El enfoque de la integral definida se ha modificado para incluir tanto las sumas de Riemann como las sumas superiores e inferiores.

Las funciones trascendentes (capítulo 7)

La longitud de este capítulo se redujo por combinación de dos secciones de la edición anterior y eliminando parte del material. La integración de las funciones trigonométricas se trata ahora junto con la función logarítmica. La exposición de las ecuaciones diferenciales separables se ha trasladado al capítulo 8.

Técnicas de integración (capítulo 8)

El material de repaso de la sección 8.1 se ha ampliado para incluir el uso de tablas de integrales. Se ha reducido el tratamiento de los productos y potencias de las funciones trigonométricas; este material se expone ahora en una sola sección. Las sustituciones de racionalización se tratan ahora en una sección opcional. Las secciones opcionales sobre las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y las ecuaciones separables, junto con sus aplicaciones, se han trasladado al capítulo 18.

Secciones cónicas: coordenadas polares; ecuaciones paramétricas (capítulo 9)

La exposición de las secciones cónicas se ha reorganizado; el material se trata ahora en dos secciones, en lugar de la única y larga sección de la edición anterior. El tratamiento de las coordenadas polares se ha reducido combinando las secciones de representación gráfica e intersecciones de curvas polares. Las secciones opcionales sobre cónicas en coordenadas polares y cicloides se han convertido en Proyectos.

Sucesiones y series (capítulos 10 y 11)

Se han vuelto a redactar algunas partes para reducir la longitud total; el material sobre la notación sigma se ha integrado en la introducción a las series infinitas. Se han revisado los ejemplos que ilustran el enfoque mediante las series de Taylor.

Vectores y cálculo vectorial (capítulos 12 y 13)

Los vectores se introducen mediante una breve exposición de las traslaciones, fuerzas y velocidades en secciones separadas sin ejercicios.

Funciones de varias variables, gradientes, valores extremos (capítulos 14 y 15)

La introducción al gradiente y la diferenciabilidad se ha vuelto a escribir, y el cálculo del gradiente a partir de la definición formal se ha reducido. El tratamiento del teorema del valor medio y las reglas de la cadena también se ha reducido; este material se cubre ahora en una sola sección. Los extremos locales y absolutos, así como la prueba de las derivadas parciales segundas se tratan en una sola sección en lugar de las dos que había en la anterior edición. Se incluye una sección opcional sobre ecuaciones diferenciales exactas que antes estaba en el capítulo 18.

Integrales dobles y triples; integrales de línea y de superficie (capítulos 16 y 17)

Las secciones que tratan la integral doble sobre un rectángulo y las integrales dobles sobre una región se han combinado en una sola sección. Se han modificado algunos ejemplos.

Ecuaciones diferenciales (capítulo 18)

Las ecuaciones lineales de primer orden y las ecuaciones separables se han trasladado al capítulo 8; las ecuaciones exactas se tratan en el capítulo 15. Se ha añadido nuevo material sobre métodos numéricos para las ecuaciones de primer orden. El material sobre las ecuaciones no homogéneas de segundo orden se ha vuelto a escribir.

COMPLEMENTOS

Ayudas para el estudiante

Respuestas a los ejercicios de numeración impar Al final del texto se incluyen todas las respuestas a los ejercicios de numeración impar.

Student Solutions Manual, preparado por Bradley E. Garner, University of Houston, y Carrie J. Garner Este manual contiene las soluciones completas de todos los ejercicios de numeración impar.

Ayudas para el profesor

Instructor's Solutions Manual, por Bradley E. Garner, University of Houston, y Carrie J. Garner Este manual contiene las soluciones de todos los problemas del texto.

Text Bank, por Deborah Betthauser Britt Una amplia variedad de problemas y sus soluciones basados en el texto y ejercicios de este libro.

Computerized Text Bank Disponible para las plataformas IBM y Macintosh, este material permite a los profesores crear, personalizar e imprimir un test que contiene una combinación de preguntas extraídas del banco de preguntas. Los profesores también pueden modificar las preguntas existentes y añadir las suyas propias.

Instructor's Resource CD-ROM Este CD-ROM, disponible para las plataformas IBM y Macintosh, incluye el Instructor's Solutions Manual y el Test Bank.

Serie de manuales de tecnología *Getting Started*

Dos tutoriales de introducción ofrecen a los estudiantes un rápido y fácil acceso a la información que necesitan conocer en sus cursos de Cálculo. Los autores proporcionan muchos ejemplos, sugerencias y secciones de preguntas y respuestas dedicadas a resolver los problemas y dudas de los estudiantes. Maple cubre las versiones 3, 4 y 5. Mathematica cubre las versiones 2.0 y 3.0.

- ***Getting Started with Mathematica*, por C-K. Cheung, G. E. Keough, Charles Landraitis y Robert H. Gross del Boston College**
- ***Getting Started with Maple*, por C-K. Cheung, G. E. Keough, ambos del Boston College, y Michael May, de la St. Louis University**

  Estos tutoriales de introducción a las calculadoras gráficas enseñan a los estudiantes la forma de utilizar sus calculadoras como una herramienta en los cursos de Cálculo. Contienen muchos ejemplos, sugerencias y secciones especiales de preguntas y respuestas para resolver problemas y dudas.
- ***Getting Started with the Tl-83/82 Graphing Calculator* por Carl Swenson de la Seattle University**
- ***Getting Started with the Tl-86/85 Graphing Calculator* por Carl Swenson de la Seattle University**
- ***Getting Started with the Tl-92/92 Plus Graphing Calculator* por Carl Swenson, Brian Hopkins, ambos de la Seattle University**

AGRADECIMIENTOS

La revisión de un texto de esta magnitud y complejidad requiere grandes dosis de aliento y ayuda. He sido afortunado al tener un amplio suministro de ambas cosas por parte de muchas fuentes.

Cada edición de este texto se desarrolló a partir de la precedente. El libro actual debe mucho a la gente que contribuyó a las ediciones anteriores, más recientemente, Linda Becerra, University of Houston; Jay Bourland, Colorado State University; Gary Crown, Wichita State University; Stephen Davis, Davidson College; Anthony Dooley, University of New South Wales; William Fox, U.S. Military Academy-West Point; Barbara Gale, Prince Georges Community College; Pamela Gorkin, Bucknell University; Gary Itzkowitz, Rowan College of New Jersey; Harold Jacobs, East Stroudsburg University of Pennsylvania; Adam Lutoborski, Syracuse University; Douglas Mackenzie, University of New South Wales; Katherine Murphy, University of North Carolina-Chapel Hill; Jean E. Rubin, Purdue University; y Stuart Smith, University of Toronto. Estoy en deuda con todos ellos.

Los correctores de la octava edición inglesa me proporcionaron valiosas críticas y sugerencias. Ofrezco sinceramente mi reconocimiento a las siguientes personas:

Mihaly Bakonyi
Georgia State University

Edward B. Curtis
University of Washington

Kathy Davis
University of Texas-Austin

Dennis DeTurck
University of Pennsylvania

John R. Durbin
University of Texas-Austin

Charles H. Giffen
University of Virginia-Charlottesville

Michael Kinyon
Indiana University-South Bend

Nicholas Macri
Temple University

James R. McKinney
California State Polytechnic
University-Pomona

Jeff Morgan
Texas A&M University

Clifford S. Queen
Lehigh University

Yang Wang
Georgia Institute of Technology

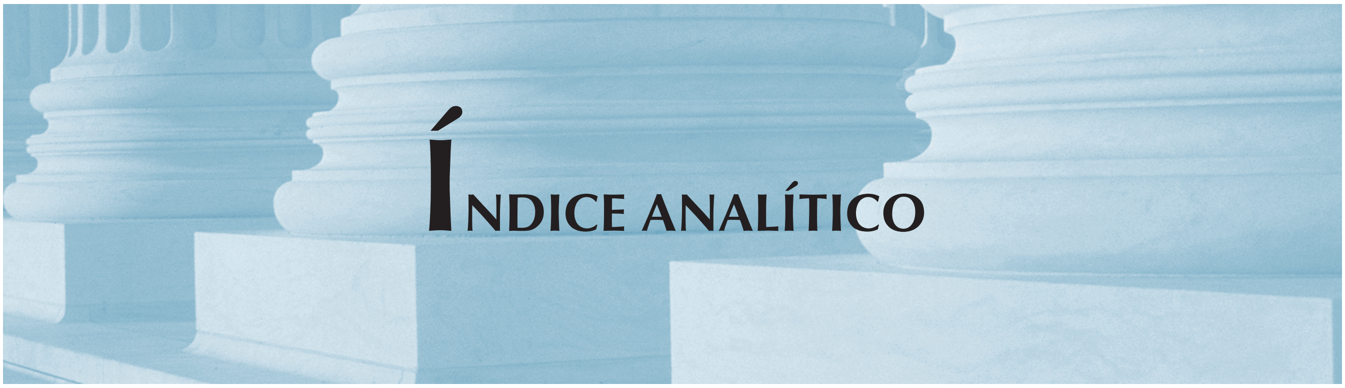
Agradezco especialmente a David Bao, University of Houston; Stephen Davis, Davidson College; Dean Hickerson; Adam Lutoborski, Syracuse University; y Yang Wang, Georgia Institute of Technology, quienes leyeron el material e hicieron muchas correcciones y comentarios útiles.

También quiero agradecer a Jun Ma, University of Minnesota, quien resolvió todos los ejercicios y proporcionó soluciones detalladas y las importante ayudas necesarias en los manuales de soluciones.

Estoy profundamente agradecido con el equipo de John Wiley & Sons. Todas las personas implicadas en este proyecto me han estimulado, ayudado y ofrecido sus consejos profesionales en cada etapa. En particular, Ruth Baruth, Executive Editor, y Nancy Perry, Senior Development Editor, me proporcionaron organización y apoyo cuando los necesité, y ánimos cuando hacía falta. Agradezco especialmente a Suzanne Ingrao, Production Editor, quien paciente e inteligentemente guió el proyecto a través las etapas de producción; Jeanine Furino, Freelance Production Manager, quien dirigió cuidadosamente el proceso de producción; Sigmund Malinowski, Illustration Editor, de cuya creatividad surgió el atractivo diseño del interior y de la cubierta.

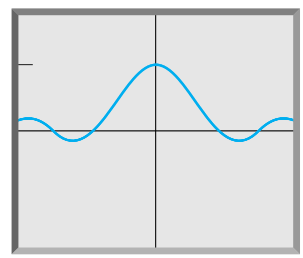
Finalmente, quiero agradecer la colaboración de mi esposa, Charlotte; sin su constante apoyo no hubiera podido terminar este trabajo.

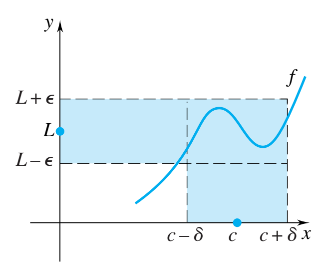
Garret J. Etgen

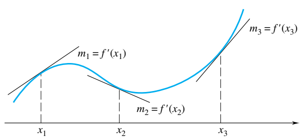


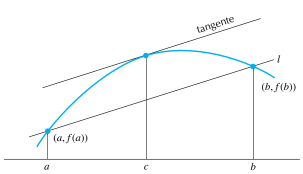
ÍNDICE ANALÍTICO

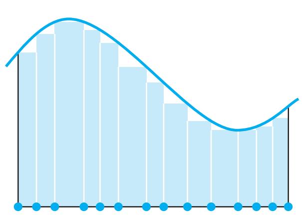
VOLUMEN 1

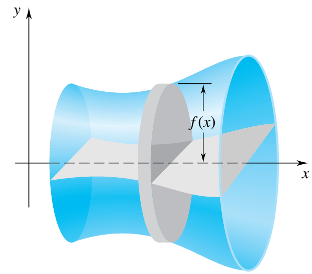


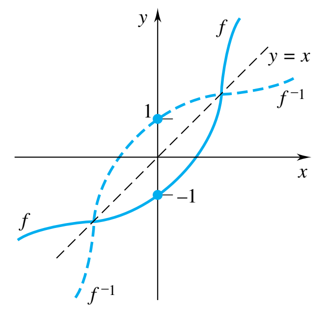


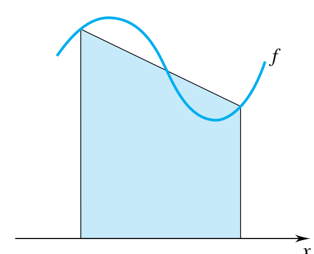

$m_1 = f'(x_1)$
$m_2 = f'(x_2)$
$m_3 = f'(x_3)$
x_1
x_2
x_3


tangente
l
$(b, f(b))$
$(a, f(a))$
a
c
b

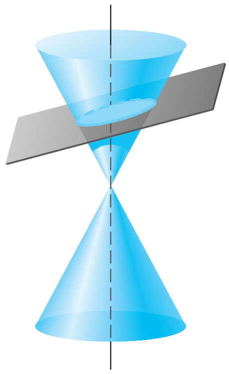


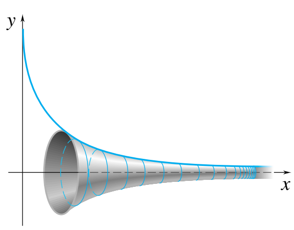


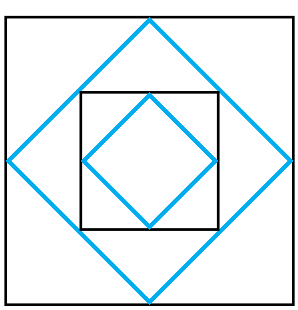




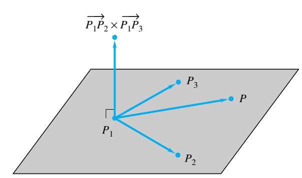
* Secciones opcionales

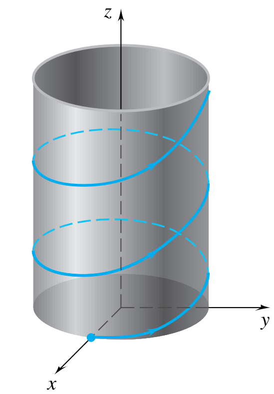



y
x

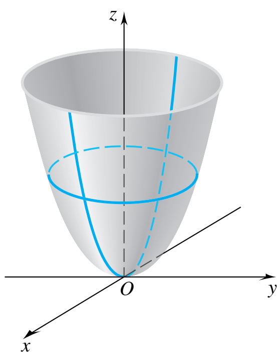


VOLUMEN 2

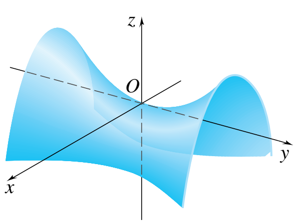




CAPÍTULO 13 CÁLCULO VECTORIAL 771

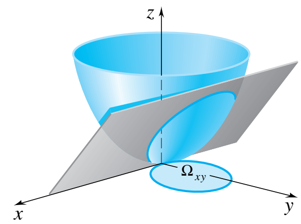


CAPÍTULO 14 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES 827

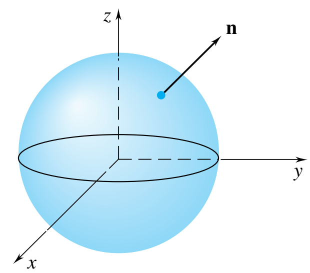


CAPÍTULO 15 GRADIENTES; VALORES EXTREMOS; DIFERENCIALES 871

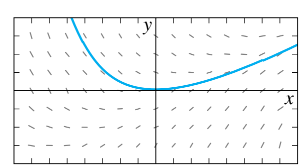
CAPÍTULO 16 INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES 955



CAPÍTULO 17 INTEGRALES DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE 1033



CAPÍTULO 18 ECUACIONES DIFERENCIALES ELEMENTALES 1111



SALAS

HILLE

ETGEN

CALCULUS

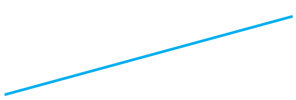
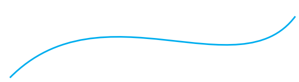
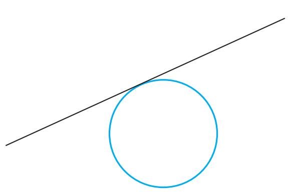
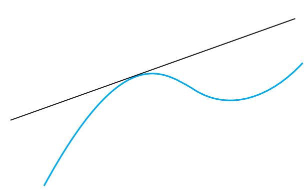
UNA Y VARIAS VARIABLES

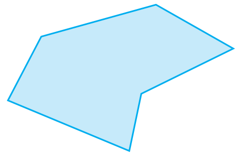
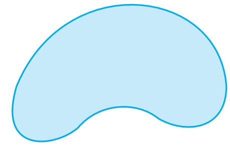
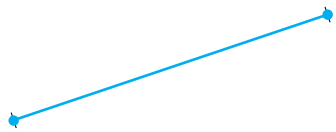
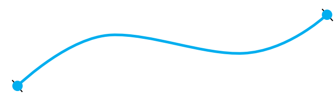
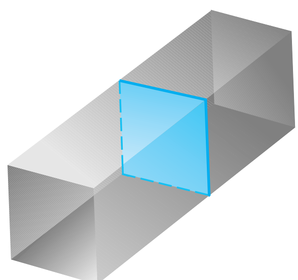
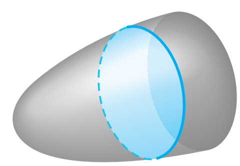
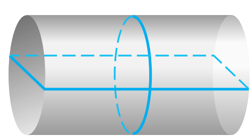
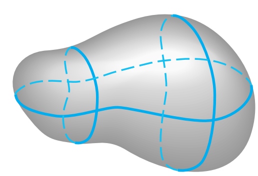
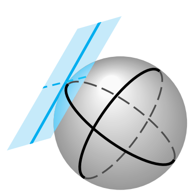
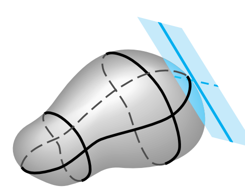
INTRODUCCIÓN 1

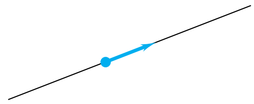
1.1 ¿QUÉ ES EL CÁLCULO?

Para un romano en los días del Imperio, un “calculus” era un pequeño guijarro utilizado para contar, así como para apostar. Unos siglos más tarde, “calculare” vino a significar lo mismo que “calcular”, “contar” o “resolver”. Para los matemáticos, físicos e investigadores en ciencias sociales de nuestros días, el cálculo está constituido por las matemáticas elementales (álgebra, geometría, trigonometría) potenciadas con *el proceso de paso al límite*.

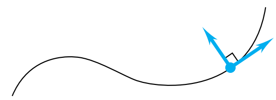
El cálculo toma ideas de las matemáticas elementales y las extiende a una situación más general. He aquí algunos ejemplos. En la columna de la izquierda se recogen algunos conceptos de las matemáticas elementales; en la de la derecha se reflejan esos mismos conceptos generalizados por el cálculo.

Matemática elemental	*Cálculo*
 pendiente de una recta $y = mx + b$	 pendiente de una curva $y = f(x)$
 recta tangente a una circunferencia	 recta tangente a una curva más general
velocidad media, aceleración media	velocidad instantánea, aceleración instantánea

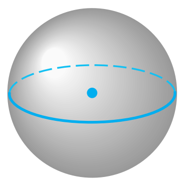
 área de una región limitada por segmentos rectilíneos	 área de una región limitada por curvas
suma de una colección finita de números $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	suma de una serie infinita $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$
 longitud de un segmento de recta	 longitud de una curva
 volumen de un sólido rectangular	 volumen de un sólido limitado por una superficie curva
 área de la superficie de un cilindro	 área de la superficie de un sólido más general
 plano tangente a una esfera	 plano tangente a una superficie más general



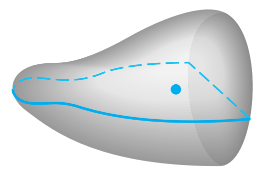
movimiento a lo largo de una recta con velocidad constante



movimiento a lo largo de una curva con velocidad variable



centro de una esfera



centro de gravedad de un sólido más general

Es oportuno decir algo acerca de la historia del cálculo. Sus orígenes se remontan a la Grecia antigua. Los antiguos griegos plantearon muchas cuestiones (a menudo paradójicas) sobre las tangentes, el movimiento, el área, lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande —cuestiones que se han visto aclaradas y han hallado su respuesta con el cálculo. En algunos casos, los griegos aportaron respuestas (algunas muy elegantes), pero, en general, sólo formularon las preguntas.

Después de los griegos, el progreso fue lento. La comunicación era limitada y cada erudito estaba prácticamente obligado a partir de cero. A lo largo de los siglos se concibieron algunas soluciones ingeniosas para el tipo de problemas que se plantean en cálculo, pero no se elaboraron técnicas generales. El progreso se vio obstaculizado por la carencia de una notación conveniente. El álgebra, fundada en el siglo noveno por los sabios árabes, no fue plenamente sistematizada hasta el siglo dieciséis. Posteriormente, en el siglo diecisiete, Descartes estableció la geometría analítica, sentando la base del desarrollo ulterior.

El invento del cálculo es atribuido a Sir Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), uno inglés y el otro alemán. El invento de Newton resultó ser una de las pocas cosas buenas que la gran epidemia de peste bubónica aportó a la humanidad. La plaga forzó el cierre de la Universidad de Cambridge en 1665 y el joven Isaac Newton, del Trinity College, volvió a su casa de Lincolnshire para pasar dieciocho meses de meditación de los cuales nacieron su *método de las fluxiones*, su *teoría de la gravitación* y su *teoría de la luz*. El método de las fluxiones es lo que nos concierne aquí. Un tratado con este título fue escrito por Newton en 1672, pero no fue publicado hasta 1736, nueve años después de su muerte. El nuevo método (cálculo para nosotros) fue anunciado por primera vez en 1687, pero en términos generales muy vagos, sin simbolismo, fórmulas ni aplicaciones. El propio Newton parecía muy reacio a publicar nada tangible acerca de su descubrimiento y no es sorprendente que el desarrollo en el Continente, pese a su iniciación tardía, pronto le adelantase y superase.

Leibniz inició su trabajo en 1673, ocho años más tarde que Newton. En 1675 estableció la notación moderna básica: dx y $\int$. Sus primeras publicaciones aparecieron en 1684 y 1686. Causaron poco impacto en Alemania, pero los hermanos Bernoulli de Basilea (Suiza) recogieron sus ideas y las enriquecieron con otras muchas. A partir de 1690, el cálculo creció rápidamente y alcanzó prácticamente su estado actual en unos cien años. Algunas sutilezas teóricas no fueron plenamente resueltas hasta el siglo veinte.

1.2 NOCIONES Y FÓRMULAS DE LA MATEMÁTICA ELEMENTAL

Para facilitar su repaso y tener una referencia a mano, presentamos el siguiente resumen.

Conjuntos

Un conjunto es una colección de diversos objetos. Los objetos de un conjunto se denominan *elementos* o *miembros* del conjunto. Generalmente se utilizan letras mayúsculas (A, B, C, …) para denotar conjuntos y letras minúsculas (a, b, c, …) para designar los elementos de un conjunto.

Para que una colección S de objetos sea un conjunto, aquella debe estar *bien definida*. Esto quiere decir que, dando un objeto x cualquiera, debe ser posible determinar si x es o no un elemento de S. Así, la colección de letras mayúsculas de esta página, la colección de estados de los Estados Unidos de América y la colección de soluciones de la ecuación $x^2 = 9$ son todas ejemplos de conjuntos. Por otro lado, supongamos que queremos hacer la colección de las ciudades más bellas de Inglaterra. Personas diferentes podrían hacer colecciones diferentes. En consecuencia, la colección de las ciudades más bellas de Inglaterra no es un conjunto. Las colecciones basadas en juicios subjetivos tales como "todos los jugadores del fútbol buenos" o "todos los adultos inteligentes" no son conjuntos.

Notación

el objeto x está en el conjunto A	$x \in A$
el objeto x no está en el conjunto A	$x \notin A$
el conjunto de todos los x que verifican la propiedad P	$\{x : P\}$
(por ejemplo, $A = \{x : x \text{ es una vocal}\} = \{a, e, i, o, u\}$)	
A es un subconjunto de B (A está incluido en B)	$A \subseteq B$
la unión de A y B	$A \cup B$
($A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$)	
la intersección de A y B	$A \cap B$
($A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$)	
conjunto vacío	$\varnothing$

Estas son las nociones básicas de la teoría de conjuntos que se necesitan en este libro.

Números reales

Nuestro estudio del cálculo se basa en el sistema de los números reales. Este sistema consiste en el conjunto de los números reales junto con las operaciones aritméticas familiares —suma, resta, multiplicación y división— y otras propiedades que se repasan brevemente a continuación.

Clasificación

números naturales (*o enteros positivos*)	1, 2, 3, …
enteros	0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, etc.
números racionales	$\{x : x = p/q$ con p y q enteros, $q \neq 0\}$[†];
por ejemplo,	$\frac{2}{5}, \ -\frac{19}{2}, \ \frac{4}{1} = 4.$
números irracionales	números reales que no son racionales;
por ejemplo,	$\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, π, las soluciones de la ecuación $x^2 - 5 = 0$.

† La división por 0 no está definida.

Representación decimal

Todo número real puede ser representado por un decimal. Si $r = p/q$ es un número racional, entonces su representación decimal se halla dividiendo el numerador p por el denominador q. El desarrollo decimal resultante puede ser o bien finito o bien periódico. Por ejemplo,

$$\tfrac{3}{2} = 0{,}6, \quad \tfrac{27}{20} = 1{,}35, \quad \tfrac{43}{8} = 5{,}375$$

son decimales finitos y

$$\tfrac{2}{3} = 0{,}6666\cdots = 0{,}\bar{6}, \quad \tfrac{15}{11} = 1{,}363636\cdots = 1{,}\overline{36}, \quad \tfrac{116}{37} = 3{,}135135\cdots = 3{,}\overline{135}$$

son decimales periódicos (la barra sobre la secuencia de cifras indica que la secuencia se repite indefinidamente). Lo contrario también es cierto: todo decimal finito o periódico representa un número racional.

El desarrollo decimal de un número irracional no es ni finito ni periódico. Por ejemplo,

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\cdots, \quad \pi = 3{,}141592653\cdots,$$
$$r = 0{,}10110111011110\cdots$$

son números irracionales.

Si detenemos el desarrollo decimal de un número dado en un cierto lugar decimal, entonces el resultado es un número racional que se aproxima al número en cuestión. Por ejemplo, los números irracionales $1{,}414 = 1414/1000$ y $3{,}14 = 314/100$ son aproximaciones habituales de $\sqrt{2}$ y π, respectivamente. Tomando más lugares decimales en los desarrollos se pueden obtener aproximaciones más exactas.

Representación geométrica

En matemáticas, un concepto fundamental que relaciona la noción abstracta de *número real* con la noción geométrica de *punto* es la representación de los números reales como puntos sobre una línea recta. Esto se realiza eligiendo un punto O arbitrario sobre una línea recta horizontal para representar el número 0, y otro punto U (generalmente tomado a la derecha de O) para representar el número 1 (figura 1.2.1). El punto O se denomina *origen*, y la distancia entre O y U determina una escala (una longitud unidad). Especificados O y U, cada número real puede ser representado como un punto sobre la recta e, inversamente, cada punto sobre la recta representa un número real. Una línea recta que representa números reales se denomina *recta real*; el número asociado al punto P sobre esta recta se dice que es la *coordenada* de P. Los números *positivos* se identifican con los puntos que se encuentran a la derecha de O y los *negativos* con los puntos que están a la izquierda de O. El punto que representa x ($x \neq 0$) está a x unidades de O si x es positivo y a $-x$ unidades de O si x es negativo. En este contexto, frecuentemente nos referiremos a los números reales como "puntos", pero con esto queremos decir "puntos sobre una recta real". En la figura 1.2.2 se muestran algunos números representados como puntos sobre una recta real.

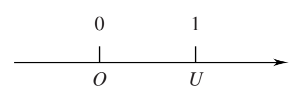


Figura 1.2.1

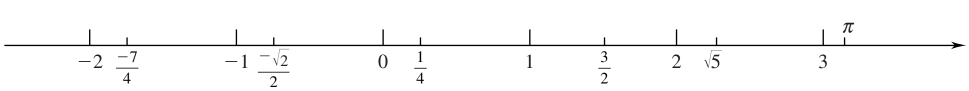


Figura 1.2.2

Propiedades de orden

Si a y b son números reales, entonces *a es menor que b* ($a < b$) si $b - a$ es un número positivo. Esto es equivalente a decir que *b es mayor que a* ($b > a$). Desde el punto de vista geométrico, $a < b$ si el punto a está a la izquierda del punto b sobre la recta real. La notación $a \le b$ significa tanto $a < b$ como $a = b$ (equivalentemente, $b \ge a$).

Los números reales están ordenados de manera que si a y b son números reales, entonces se verifica solamente una de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b. \qquad \text{(tricotomía)}$$

Los símbolos $<$, $>$, $\le$, $\ge$ se llaman *desigualdades*. Las desigualdades satisfacen las siguientes propiedades:

(i) Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. (propiedad transitiva)
(ii) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$ para todos los números reales c.
(iii) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
(iv) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
(v) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Estas propiedades también se verifican para $>$, $\le$ y $\ge$. La propiedad (v) es muy importante: si se multiplica una desigualdad por una cantidad negativa, entonces la "dirección" de la desigualdad se invierte. Las técnicas para resolver desigualdades utilizan estas propiedades, por lo que se volverán a ver en la sección 1.3.

Densidad

Entre dos números reales cualesquiera existe una infinidad de números racionales y una infinidad de números irracionales. En particular, *no existe un número real positivo minimal*.

Valor absoluto

Dos propiedades importantes de un número real a son su *signo* y su *medida* o *magnitud*. Desde el punto de vista geométrico, el signo de a nos dice si el punto a está a la derecha o a la izquierda de 0 sobre la recta real. La magnitud de a es la distancia entre el punto a y 0; el número 0 no tiene signo y su magnitud es 0. Habitualmente a la magnitud de a se le llama *valor absoluto de a* (se representa como $|a|$). El valor absoluto de a también viene dado por

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \ge 0 \\ -a, & \text{si } a \le 0. \end{cases}$$

otras caracterizaciones $|a| = \max\{a, -a\}$; $\quad |a| = \sqrt{a^2}$.

interpretaciones geométricas $|a| = $ distancia de a a 0.
$|a - c| = $ distancia de a a c.

otras propiedades
(i) $|a| = 0$ sii $a = 0$.[†]
(ii) $|-a| = |a|$.
(iii) $|ab| = |a||b|$.
(iv) $|a + b| \le |a| + |b|$. (desigualdad triangular)[††]
(v) $||a| - |b|| \le |a - b|$. (variante de la desigualdad triangular)
(vi) $|a|^2 = |a^2| = a^2$

[†] Con "sii" queremos decir "si y sólo si". Esta expresión es tan común en matemáticas que conviene tener una abreviación.
[††] El valor absoluto de la suma de dos números no puede exceder la suma de sus valores absolutos, del mismo modo que la longitud de un lado de un triángulo no puede exceder la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Las técnicas para la resolución de inecuaciones que implican valores absolutos también serán examinadas en la sección 1.3.

Intervalos

Supongamos que $a < b$. El *intervalo abierto* (a, b) es el conjunto de todos los números comprendidos entre a y b:

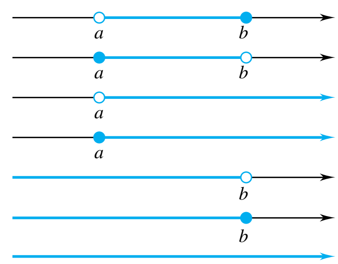
$$(a, b) = \{x: a < x < b\}.$$

El *intervalo cerrado* $[a, b]$ es el intervalo abierto (a, b) junto con los puntos extremos a y b:

$$[a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}.$$

Existen otros siete tipos de intervalos:

$$(a, b] = \{x: a < x \leq b\},$$
$$[a, b) = \{x: a \leq x < b\},$$
$$(a, \infty) = \{x: a < x\},$$
$$[a, \infty) = \{x: a \leq x\},$$
$$(-\infty, b) = \{x: x < b\},$$
$$(-\infty, b] = \{x: x \leq b\},$$
$$(-\infty, \infty) = \text{conjunto de los números reales.}$$



Esta notación para los intervalos es fácil de recordar: utilizamos un corchete para indicar la inclusión de un extremo; en caso contrario, un paréntesis. En una recta real la inclusión o exclusión de un extremo se indica con un punto “lleno” o un punto “vacío”, respectivamente. Los símbolos ∞ y $-\infty$ (léase “infinito” e “infinito negativo” o “menos infinito”) no representan números reales. En los intervalos dados más arriba, el símbolo ∞ indica que el intervalo se extiende indefinidamente en la dirección positiva; del mismo modo, el símbolo $-\infty$ indica que el intervalo se extiende indefinidamente en la dirección negativa. Puesto que ∞ y $-\infty$ no son números reales, no existen los intervalos $[a, \infty]$ ni $[-\infty, b]$ ni otros de la misma forma.

Acotación

Se dice que un conjunto S de números reales está

(i) *acotado superiormente* sii existe un número real M tal que

$$x \leq M \qquad \text{para todo } x \in S.$$

Se dice que M es una *cota superior* para S.

(ii) *acotado inferiormente* sii existe un número real m tal que

$$x \geq m \qquad \text{para todo } x \in S.$$

Se dice que m es una *cota inferior* para S.

(iii) *acotado* sii está acotado superior e inferiormente.

Por ejemplo, los intervalos $(-\infty, 2]$ y $(-\infty, 2)$ están acotados superiormente, pero no inferiormente; el número 2 es una cota superior de estos dos conjuntos. Observar que cualquier número mayor que 2 será también una cota superior. El conjunto de los números enteros positivos $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ está acotado inferiormente pero no superiormente; 0 es una cota inferior de N, al igual que $\frac{1}{2}$ y 1. El conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ y el intervalo $(-1, 3)$ están acotados (tanto superiormente como inferiormente); -1 o cualquier número menor que -1 es una cota inferior de cada uno de estos conjuntos y 3 o cualquier número mayor que 3 es una cota superior.

Factoriales

Sea n un entero positivo. El *factorial* de n (se representa $n!$) es el producto de los enteros de 1 a n. Así,

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Observar que

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6.$$

Es fácil verificar que $4! = 24$, $5! = 120$, y así sucesivamente. Por último, es conveniente definir $0! = 1$.

Álgebra

Fórmulas de factorización básicas

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2)
\end{aligned}$$

Expresiones polinómicas

Una *variable* (también llamada *incógnita*) es un símbolo que se utiliza para representar un elemento arbitrario de un conjunto dado. Habitualmente se utilizan las últimas letras del alfabeto, en minúsculas, para representar variables ($t, u, x, y, \ldots$). Los conjuntos considerados en este texto son generalmente conjuntos de números reales, por lo que frecuentemente nos referimos a *variables reales*.

Un *polinomio en una variable* es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) son números reales llamados *coeficientes* de P y n es un entero no negativo llamado *grado* de P. Por ejemplo,

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + \pi x - \sqrt{2}$$

es un polinomio de grado 4;

$$P(x) = 3x + 1 \qquad y \qquad P(x) = 6$$

son polinomios de grado 1 y 0, respectivamente. En general, todo número real no nulo es un polinomio de grado 0; el número 0 es también un polinomio, pero no tiene asignado un grado. La expresión

$$F(x) = x^3 + 4x^{3/2} + \frac{1}{x^2}$$

no es un polinomio.

Un número r es una *raíz* o *solución* de una ecuación polinómica

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

sii

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$